П. С. МОДЕНОВ и Г. Л. НЕВЯЖСКИЙ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Допущено Министерством Высшего Образования СССР в качестве учебника для педагогических институтов

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

Редактор *С. П. Новосёлов.* Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*

Подписано к печати 3/V—3/VI 1948 г. А-01809. 33 печ. л. 43,47 уч.-изд. л. 51 400 тип. зн. в печ. листе. Тираж 35 000 экз. Цена книги 16 р. Переплёт 1 р. Заказ № 1203.

2-я типография «Печатный Двор» им. А. М. Горького треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР. Ленинград, Гатчинская, 26.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга предназначена для физико-математических факультетов учительских институтов и нематематических факультетов педагогических институтов.

Дополнительный материал, несколько выходящий за рамки программы, набран петитом; всё это можно опустить без ущерба для понимания основного текста.

Понятие непрерывности функции в точке и понятие предела функции в точке излагаются с весьма общей точки зрения, при которой не удаётся получить частичное объединение теорем, сюда относящихся (как это делается обычно). Если ограничиться рассмотрением точек, в окрестности которых функция определена, то § 97 можно опустить и рассматривать его как следствие § 106. Понятия выпуклости (§ 91) и экстремума (§ 93) можно также перенести в соответствующие параграфы, указывающие на достаточные признаки этих понятий.

Наконец, можно в преподавании сократить и §§ 94, 95, перенося содержание их в дифференциальное исчисление.

Однако следует иметь в виду, что исследование функций ограниченными средствами и ряд понятий, связанных с функциями (возрастание, выпуклость, экстремум и др.), полезно дать вне всякой связи с дифференциальным исчислением.

Во всяком случае порядок изложения материала можно по желанию менять. Дополнительный материал будет полезен в том отношении, что он увязывает целый ряд вопросов «высшей математики» с элементарной.

В заключение мы хотим выразить глубокую благодарность редактору книги С. И. Новосёлову за большую помощь, оказанную нам при работе над рукописью, проф. В. В. Немыцкому и проф. А. И. Маркушевичу за ценные указания и советы, а также И. Я. Танатару за помощь, оказанную при окончательном просмотре рукописи.

Москва, июнь 1947 г.

П. С. Моденов,
Г. Л. Невяжский

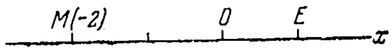
ГЛАВА I

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПРЯМОЙ

§ 1. Координата точки на прямой

Рассмотрим прямую, на которой фиксированы две различные точки O и E, взятые в определённом порядке.

Этот геометрический образ, т. е. *прямая, на которой фиксированы две различные точки O и E, взятые в определённом порядке, называется декартовой осью координат.*



Черт. 1.

Первая из двух указанных точек, т. е. точка O, называется началом координат, вторая, т. е. точка E, называется единичной точкой (черт. 1).

Точки O и E называются также фундаментальными точками оси координат.

Отрезок OE, границами которого являются фундаментальные точки, называется масштабным отрезком.

Ось координат мы будем обозначать так: Ox. Положение любой точки M на оси координат мы будем определять числом x, называемым координатой точки M. *Координатой точки M, лежащей на оси координат, называется число*

$$x = \pm \frac{OM}{OE},$$

причём справа берётся знак $+$, если отрезки OM и OE направлены в одну сторону, и знак $-$, если эти отрезки направлены противоположно.

На чертеже 1 координата точки M равна -2, так как отношение $\frac{OM}{OE}$ равно 2, а отрезки OM и OE направлены в разные стороны.

Координата начала координат равна нулю.

Координата единичной точки равна 1.

Ясно, что координаты всех точек оси координат, расположенных по ту сторону от начала координат, где находится единичная точка,—

положительны, а координаты всех точек, расположенных по другую сторону от начала координат,— отрицательны.

Итак, *каждой точке M оси координат ставится в соответствие число x, называемое координатой точки M.*

Обратно: *если x любое действительное число, то на оси координат найдётся точка M, для которой это число x является координатой.*

На чертеже 2 построены точки M, N, P, координаты которых соответственно равны 3, 5 и $-\frac{5}{2}$.

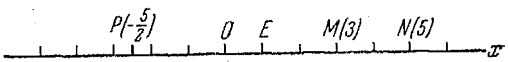
Точку M, координата которой равна x, будем обозначать так:

$$M(x).$$

Подведём итог. Мы видим, что:

1) *каждой точке M прямой линии (оси координат) поставлено в соответствие одно определённое число x, называемое координатой этой точки;*

2) *двум разным точкам M_1 и M_2 соответствуют две разные координаты x_1 и x_2 (это следует из определения координаты точки);*



Черт. 2.

3) *каждому числу x на оси координат соответствует точка M, для которой это число x служит координатой.*

Соответствие (отображение), обладающее указанными свойствами, называется в з а и м н о о д н о з н а ч н ы м.

Таким образом *введение понятия координаты точки на прямой приводит ко взаимнооднозначному отображению множества всех точек прямой линии на множество всех действительных чисел.*

Упражнения

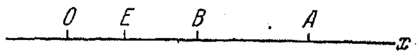
1. Выбрав на прямой масштабные точки O и E на расстоянии 2 *см* друг от друга, построить точки:

$$A(4), B(-1), C(6), D\left(-\frac{1}{2}\right), K\left(\frac{5}{3}\right), F\left(-\sqrt{2}\right), G\left(\sqrt{29}\right).$$

§ 2. Ориентированное расстояние

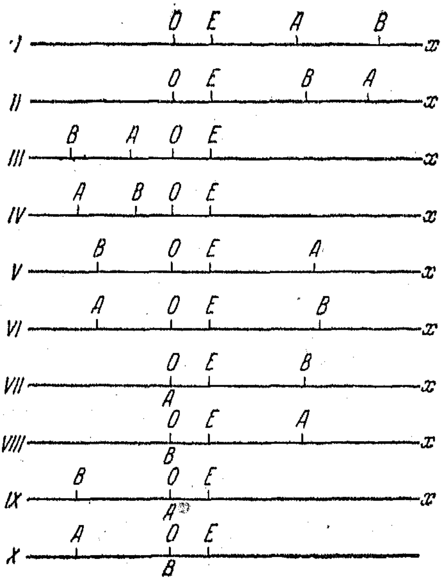
В элементарной геометрии длины отрезков обычно измеряют положительными числами.

Длиной отрезка AB или его мерой (или «величиной») *называется положительное число, равное отношению $\frac{AB}{OE}$ отрезка AB к масштабному отрезку OE.* В ряде вопросов геометрии и физики удобно измерять отрезки как положительными, так и отрицательными числами; такого рода измерения производят в случаях, когда приходится иметь дело с отрезками, расположенными на одной и той же прямой. Рассмотрим следующий пример: по прямой дороге идут несколько пешеходов в противоположных направлениях. Пройденные пути удобно измерять как положительными числами, так и отрицательными, причём знак числа будет указывать на направление движения. Например, фраза «пешеходы прошли пути, соответственно равные 2 *км*,—3 *км*,—5 *км* и т. д.» будет означать, что первый пешеход прошёл 2 *км* в одном направлении, а второй и третий прошли 3 *км* и 5 *км* в противоположном направлении.



Черт. 3.

Координата x точки M на оси координат Ox есть, очевидно, ориентированное расстояние от начала координат до точки M. Таким образом с понятием ориентированного расстояния мы по существу встречаемся с первых же шагов построения аналитической геометрии.



Черт. 4.

Рассмотрим на оси координат произвольный отрезок AB (черт. 3).

Будем называть ориентированной его длиной число $\gamma = \pm \frac{AB}{OE}$, *причём знак* $+$ *берётся в случае, если отрезки* AB *и* OE *направлены в одну сторону, и знак* $-$, *если эти отрезки направлены в противоположные стороны.* Например, на чертеже 3 ориентированная длина γ отрезка AB равна -2, так как отрезок AB направлен в сторону, противоположную направлению отрезка OE, а отношение отрезка AB к OE равно 2. На том же чертеже ориентированная длина отрезка BA равна 2, так как отрезок BA направлен направо, а его отношение к OE попрежнему равно 2.

Теорема. *Ориентированная длина* γ *отрезка* AB, *концы которого имеют координаты, соответственно равные* x_1 *и* x_2, *равна разности* $x_2 - x_1$, *в которой уменьшаемое есть координата конца отрезка, а вычитаемое — координата начала отрезка:*

$$\gamma = x_2 - x_1. \qquad (1)$$

Доказательство. Для вывода формулы (1) надо рассмотреть всевозможные расположения точек A и B относительно начала координат; таких расположений будет всего десять (черт. 4). Выведем формулу (1) для каких-нибудь двух случаев; рассмотрение же всех остальных случаев мы предоставляем читателю.

Рассмотрим, например, случай II. Здесь координаты точек A и B положительны, а γ отрицательно, поэтому

$$x_1 = \frac{OA}{OE}, \quad x_2 = \frac{OB}{OE},$$

$$\gamma = -\frac{AB}{OE} = -\frac{OA - OB}{OE} = -\left(\frac{OA}{OE} - \frac{OB}{OE}\right) = \frac{OB}{OE} - \frac{OA}{OE} = x_2 - x_1.$$

В случае VI имеем:

$$x_1 = -\frac{OA}{OE}, \quad x_2 = \frac{OB}{OE},$$

$$\gamma = \frac{AB}{OE} = \frac{OA + OB}{OE} = \frac{OA}{OE} + \frac{OB}{OE} = -x_1 + x_2 = x_2 - x_1.$$

Замечание. Формула (1) верна и в случае, когда точки A и B совпадают; при этом $\gamma = 0$.

Упражнения

2. Выбрав на оси координат точки O и E на расстоянии 1 *см* друг от друга, построить следующие пары точек:

1) $A(4)$, $B(7)$;
2) $A(3)$, $B(-2)$;
3) $A(-2)$, $B(-7)$;
4) $A(-1)$, $B(5)$.

Вычислить в каждом из четырёх указанных случаев ориентированную длину γ отрезка AB и проверить результаты вычислений по чертежу.

3. Доказать, что ориентированное расстояние от начала координат до точки M равно координате точки M.

4. Термометр показывал температуру $t_1 = -10°$; через некоторое время его показание $t_2 = -25°$. Найти ориентированное расстояние от первого показания до второго и пояснить результат вычислений.

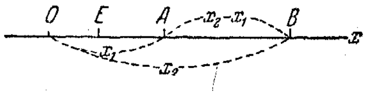
§ 3. Расстояние

Из сказанного в предыдущем параграфе следует, что *длина d отрезка AB есть абсолютная величина ориентированной длины γ этого отрезка*: $d = |\gamma|$ *или*

$$d = |x_2 - x_1|. \qquad (1)$$

Следовательно, *длина отрезка AB с концами $A(x_1)$ и $B(x_2)$ равна абсолютной величине разности координат этих* *точек*, при этом совершенно безразлично, какая из координат является уменьшаемым и какая — вычитаемым, так как берётся абсолютная величина этой разности.

Замечание I. Формула $d = |x_2 - x_1|$ верна и для совпадающих точек, если условиться считать расстояние d между совпадающими точками равным нулю.



Черт. 5.

Замечание II. Формулы $\gamma = x_2 - x_1$ и $d = |x_2 - x_1|$ легко восстановить в памяти по чертежу 5.

Упражнения

5. Вычислить длину отрезка AB в каждом из следующих случаев:

1) $A(3)$, $B(-2)$;
2) $A(-5)$, $B(-10)$;
3) $A(0)$, $B(-4)$.

§ 4. Интервал и сегмент

В дальнейшем нам часто придётся встречаться со множеством всех чисел, заключённых между двумя различными числами α и β. Возьмём, например, выражение

$$(x-2)(x-5)$$

и поставим вопрос: при каких значениях x это выражение будет отрицательным? Нетрудно видеть, что все значения x, для которых указанное произведение отрицательно, образуют множество всех чисел, заключённых между числами 2 и 5:

$$2 < x < 5.$$

Множество всех чисел x, заключённых между двумя различными числами α и β:

$$\alpha < x < \beta,$$

называется интервалом и обозначается так:

$$(\alpha, \beta);$$

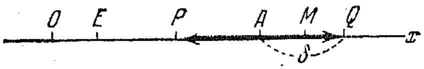
на первом месте пишется всегда меньшее число (α); числа α и β называются граничными числами интервала (α, β). В интервал (α, β) входят все числа x строго бóльшие чем α и меньшие чем β, тогда как граничные числа интервалу не принадлежат.

Построим на оси координат точки $P(\alpha)$ и $Q(\beta)$ (черт. 6). Множество точек $M(x)$, соответствующих всем значениям координаты x из интервала (α, β), состоит из всех точек оси координат, заключённых между точками P и Q (на черт. 6 стрелки в концах отрезка PQ поставлены для того, чтобы подчеркнуть, что сами точки P и Q не входят в рассматриваемое множество).

Центром интервала (α, β) *называется полусумма чисел* α *и* β, *т. е. число* $\frac{\alpha+\beta}{2}$; этому числу соответствует середина отрезка PQ, так как расстояния от точки $A\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ до точек P и Q равны:

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right|=\frac{1}{2}|\alpha-\beta| \quad \text{и} \quad \left|\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right|=\frac{1}{2}|\alpha-\beta|.$$

Радиусом интервала называется число $\delta=\frac{\beta-\alpha}{2}$, *т. е. половина длины отрезка* PQ или расстояние от центра интервала до любой из его границ (черт. 6).



Черт. 6.

С помощью понятий центра и радиуса можно охарактеризовать интервал следующим неравенством:

$$|x-a|<\delta.$$

Это неравенство выражает, что расстояние между точками $M(x)$ и центром интервала $A(a)$ меньше радиуса δ интервала, а потому множество точек $M(x)$, соответствующих всем x, удовлетворяющим неравенству $|x-a|<\delta$, будет множество всех точек оси координат, заключённых между точками P и Q.

Из соотношений

$$a=\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \delta=\frac{\beta-\alpha}{2}$$

можно найти α и β, зная a и δ:

$$\alpha=a-\delta,$$
$$\beta=a+\delta,$$

следовательно, при любых a и $\delta>0$ интервал может быть обозначен так:

$$(a-\delta, \ a+\delta)$$

или

$$a-\delta<x<a+\delta,$$

что, впрочем, совершенно ясно и геометрически.

Пример 1. Для интервала $(3, 7)$ или $3<x<7$ центр $a=\frac{3+7}{2}=5$, радиус $\delta=\frac{7-3}{2}=2$, значит этот интервал можно обозначить так:

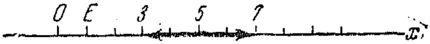
$$|x-5|<2$$

(черт. 7).

Пример 2. Интервал $|x+4|<6$ или $|x-(-4)|<6$ можно обозначить так: $(-4-6,\ -4+6)$ или $(-10,\ 2)$, или $-10<x<2$ (черт. 8).

Переходим к следующему важному понятию.

Сегментом или отрезком называется множество всех чисел x,



Черт. 7.

заключённых между двумя числами α и β, включая и сами эти числа:

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta.$$

Сегмент обозначается так:

$$[\alpha,\ \beta];$$

на первом месте ставится всегда меньшее число α. Ясно, что сегмент можно обозначить и так:

$$|x-a| \leqslant \delta,$$

где

$$a=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \delta=\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Черт. 8.

Геометрически сегменту $[\alpha,\ \beta]$ соответствует множество всех точек отрезка оси координат, ограниченного точками $P(\alpha)$ и $Q(\beta)$, включая сами эти точки (черт. 9).

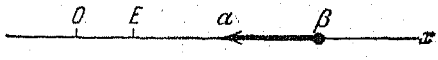
Черт. 9.

Множество всех чисел x, заключённых между двумя числами α и β, включая одно из них, называется полуинтервалом или полусегментом и обозначается так: $[\alpha,\ \beta)$ *(если в полуинтервал входит число α) и так:* $(\alpha\ \beta]$ *(если в полуинтервал входит число β).*

Черт. 10.

На чертежах 10 и 11 изображены полуинтервалы $[\alpha,\ \beta)$ и $(\alpha,\ \beta]$.

Множество всех чисел, бо́льших числа α $(x>\alpha)$ (черт. 12), *называется также интервалом и обозначается так:* $(\alpha,\ +\infty)$ *или* $\alpha<x<+\infty$. *Множество всех чисел, меньших α $(x<\alpha)$, также называется интервалом и обозначается так:* $(-\infty,\ \alpha)$ *или* $-\infty<x<\alpha$ (черт. 13).



Черт. 11.

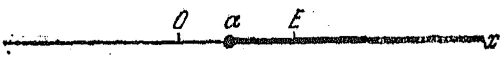
Множество всех действительных чисел также называют интервалом и обозначают так: $(-\infty,\ +\infty)$ *или* $-\infty<x<+\infty$.

Наконец, множество всех чисел, бо́льших или равных числа α, *меньших или равных числа* α, *называется полуинтервалом* или *полусегментом; обозначения:* $[\alpha, +\infty)$, $(-\infty, \alpha]$ *или* $\alpha \leqslant x < +\infty$, $-\infty < x \leqslant \alpha$, или $x \geqslant \alpha$, $x \leqslant \alpha$ (черт. 14 и 15).

Интервал $(a-\delta, a+\delta)$ *или* $|x-a| < \delta$ *называется также* δ*-окрестностью числа* a. *Правой* δ*-окрестностью точки* a *называется множество всех чисел* x, *удовлетворяющих условию* $a \leqslant x < a+\delta$. *Левой* δ*-окрестностью точки* a *называется множество всех чисел* x, *для которых выполнены неравенства* $a-\delta < x \leqslant a$ (черт. 16 и 17).

Черт. 12.

Черт. 13.

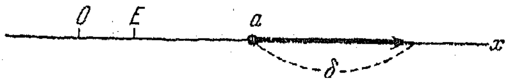


Черт. 14.

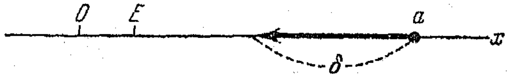
Замечание. $-\infty$ и $+\infty$ мы будем называть несобственными числами ($-\infty$ — несобственное число «минус бесконечность»); $+\infty$ — несобственное число «плюс бесконечность». Как ясно из предыдущих определений, число $+\infty$ больше любого действительного числа, а число $-\infty$ меньше любого действительного числа.

Черт. 15.

Над несобственными числами можно производить и некоторые арифметические операции. Однако эти числа не обладают целым рядом свойств действительных чисел, известных читателю из курса элементарной математики*), а потому в операциях над ними надо быть очень осторожными, да и сами эти операции нужно, конечно, прежде всего определить. На этих вопросах в настоящем курсе мы останавливаться не будем **).



Черт. 16.



Черт. 17.

---

*) Новосёлов С. И., Алгебра, учебник для учительских институтов, Учпедгиз, М., 1947.

**) См., например, журнал «Математика в школе» № 4 за 1947 г., статья проф. А. И. Маркушевича «Понятие функции».

Упражнения

6. Обозначить всеми способами следующие множества чисел:

1) $|x-1|<3$, 2) $2>x>0$, 3) $|x|<1$, 4) $-3\leqslant x<7$, 5) $|5-x|\leqslant 2$, 6) $1<x\leqslant 10$, 7) $-1<x<10$, 8) $5\leqslant x\leqslant 9$, 9) $x\geqslant 6$, 10) $x<3$, 1) $x>-4$, 12) $x\leqslant 0$, 13) $-3<x<3$, 14) $(-\infty, 3)$, 15) $(2, +\infty)$.

Сделать чертежи.

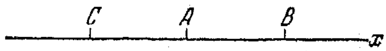
§ 5. Простое отношение

Рассмотрим на прямой три попарно различные точки A, B и C. *Будем называть простым отношением (ABC) число, определяемое равенством*

$$(ABC)=\pm\frac{AB}{BC},$$

причём перед дробью берётся знак плюс, если отрезки AB и BC направлены в одну сторону, и знак минус, если они направлены в разные стороны.

Например, на чертеже 18 простое отношение (ABC) равно $-\frac{1}{2}$ (почему?), простое отношение (CBA) равно -2 (почему?).



Черт. 18.

Простое отношение (ABC) мы будем обозначать часто одной буквой λ.

Упражнения

7. Расстояние между точками A и B равно 3 *см*, расстояние между точками B и C равно 7 *см*; точка B лежит между точками A и C.

Найти следующие простые отношения:

$$(ABC),\ (ACB),\ (BAC),\ (BCA),\ (CAB) \text{ и } (CBA).$$

8. Чему равно простое отношение (ABC), если точка B является серединой отрезка AC?

§ 6. Простое отношение в координатах

Теорема. *Простое отношение λ или (ABC) трёх попарно различных точек $A(x_1)$, $B(x_2)$ и $C(x_3)$ равно дроби, в которой числитель есть разность между координатой второй точки и координатой первой точки, а знаменатель — разность между координатами третьей и второй точек:*

$$\lambda=(ABC)=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}. \qquad (1)$$

Доказательство. Сначала докажем, что

$$\lambda=(ABC)=\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}},$$

где γ_{12} — ориентированное расстояние от точки A до точки B, а γ_{23} — ориентированное расстояние от точки B до точки C. В самом деле, на основании § 2 абсолютная величина ориентированного расстояния γ_{12} равна отношению $\frac{AB}{OE}$:

$$|\gamma_{12}| = \frac{AB}{OE}$$

и точно так же:

$$|\gamma_{23}| = \frac{BC}{OE},$$

значит

$$\frac{|\gamma_{12}|}{|\gamma_{23}|} = \frac{AB}{OE} : \frac{BC}{OE} = \frac{AB}{BC}$$

или

$$\left|\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}\right| = \frac{AB}{BC}.$$

Но на основании определения простого отношения $\frac{AB}{BC} = |\lambda|$, значит, $|\lambda| = \left|\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}\right|$. Если отрезки AB и BC направлены в одну сторону, то λ — положительное число, а γ_{12} и γ_{23} — числа одного знака, поэтому число $\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}$ также положительно. Значит, из равенства $|\lambda| = \left|\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}\right|$ мы получим $\lambda = \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}$. Если же отрезки AB и BC направлены в разные стороны, то λ — отрицательное число, а γ_{12} и γ_{23} — числа разных знаков, поэтому число $\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}$ также отрицательно; из равенства $|\lambda| = \left|\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}\right|$ опять следует $\lambda = \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}$. Итак, имеем всегда:

$$\lambda = \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}};$$

но на основании формулы, определяющей ориентированное расстояние (§ 2), имеем $\gamma_{12} = x_2 - x_1$, $\gamma_{23} = x_3 - x_2$, и значит,

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}.$$

Следствие. Координата x точки M, лежащей на декартовой оси координат, равна взятому со знаком минус простому отношению (MOE), т. е.

$$x = -(MOE). \tag{2}$$

В самом деле: на основании только что доказанной формулы имеем:

$$-(MOE) = -\frac{0 - x}{1 - 0} = x.$$

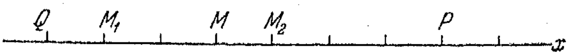
Упражнения

9. Найти (ABC), (ACB), (BAC), (BCA), (CAB), (CBA), если даны точки $A(2)$, $B(-3)$ и $C(5)$, и проверить результаты вычислений по чертежу.

§ 7. Деление отрезка в данном отношении

Рассмотрим на прямой три попарно различные точки M_1, M и M_2. Мы будем говорить, что *точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, если простое отношение (M_1MM_2) равно λ.*

Например: на чертеже 19 точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении 2, точка P делит отрезок M_1M_2 в отношении -2, точка Q делит отрезок M_1M_2 в отношении $-\frac{1}{4}$ и т. д., так как простые отношения (M_1MM_2), (M_1PM_2), (M_1QM_2) равны соответственно $2, -2, -\frac{1}{4}$.



Черт. 19.

В тех случаях, когда «делящая» точка находится вне отрезка M_1M_2 (как, например, точки P и Q на чертеже 19), говорят, что она «делит отрезок M_1M_2 внешним образом».

Поставим следующую задачу: найти координату точки M, зная координаты точек M_1 и M_2 и отношение λ, в котором точка M делит отрезок M_1M_2. Задача эта имеет и чисто практическое значение: пусть, например, в точках M_1 и M_2 помещены массы m_1 и m_2, а M есть центр тяжести системы из этих двух материальных точек. Тогда, как известно, точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении, обратно пропорциональном массам этих точек, т. е. в отношении $\frac{m_2}{m_1}$, и мы как раз и приходим к поставленной выше задаче: как определить центр тяжести, зная координаты точек M_1 и M_2 и отношение $\frac{m_2}{m_1}$, в котором этот центр тяжести делит отрезок M_1M_2.

Теорема 1. *Если точка $M(x)$ делит отрезок, ограниченный двумя различными точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ в отношении λ, то координата точки M определяется по формуле*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}. \tag{1}$$

Доказательство. По условию $(M_1MM_2) = \lambda$; на основании соотношения (1), § 6, имеем $\frac{x-x_1}{x_2-x} = \lambda$, откуда и находим x в виде (1).

Верно и обратное положение.

Теорема 2. *Если дано любое число* $\lambda \neq -1$, *то формулой* $x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$ *определяется координата* x *точки* M, *делящей отрезок* M_1M_2 *в отношении* λ (*мы требуем, чтобы* $\lambda \neq -1$, *так как только при этом условии дробь* $\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$ *имеет смысл*).

Доказательство. Найдём (M_1MM_2), предполагая, что координата x точки M определяется формулой $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; имеем:

$$(M_1MM_2) = \frac{\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} - x_1}{x_2 - \frac{x_1+\lambda x}{1+\lambda}} = \frac{x_1+\lambda x_2 - x_1 - \lambda x_1}{x_2+\lambda x_2 - x_1 - \lambda x_2} = \frac{\lambda(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = \lambda,$$

чем и доказано наше утверждение.

Следствие. *Координата середины отрезка равна полусумме координат его концов*:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}. \tag{2}$$

Доказательство. Если точка M является серединой отрезка M_1M_2, то $(M_1MM_2)=\lambda=1$ и из формулы $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$ получим:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}.$$

Упражнения

10. Даны две точки: M_1 (2) и M_2 (—4). Найти координату точки M, делящей отрезок M_1M_2 в отношении

$$1)\ \lambda=1,\ 2)\ \lambda=-\frac{1}{2},\ 3)\ \lambda=-4,\ 4)\ \lambda=-2.$$

11. Точки P и Q делят отрезок AB в отношениях, соответственно равных λ и μ. В каком отношении точки A и B делят отрезок PQ?

12. Найти координату середины отрезка с концами A (—5) и B (4).

13. Дано $(ABC)=\lambda$. Найти (ACB), (BAC), (BCA), (CAB) и (CBA).

§ 8. Центр тяжести

В качестве приложения теории, изложенной в предыдущем параграфе, решим поставленную там же задачу: в точках M_1 (x_1) и M_2 (x_2), лежащих на декартовой оси координат, расположены массы m_1 и m_2. Найти координату x центра тяжести M.

Как мы уже указали, точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении $\frac{m_2}{m_1}$, поэтому на основании формулы $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$ получим:

$$x = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}} \quad \text{или} \quad x = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}. \tag{1}$$

Решим такую же задачу для трёх точек: $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ и $M_3(x_3)$, в которых расположены массы, соответственно равные m_1, m_2 и m_3. Центр тяжести системы из первых двух точек находится в точке $M\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}\right)$ и в нём сосредоточена масса m_1+m_2. Для нахождения центра тяжести P системы из трёх данных точек надо заметить, что точка P делит отрезок MM_3 в отношении $\frac{m_3}{m_1+m_2}$, так как в точке M_3 помещена масса m_3, а в точке M сосредоточена масса m_1+m_2. Поэтому, применив опять формулу (1) § 7, получим:

$$x=\frac{\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}+\frac{m_3}{m_1+m_2}x_3}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}}$$

или

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}. \tag{2}$$

Методом полной индукции можно получить аналогичную формулу для любого числа материальных точек, расположенных на прямой:

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+\ldots+m_kx_k}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_k}. \tag{3}$$

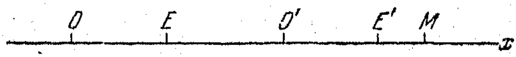
Упражнения

14. В точках $M_1(2)$ и $M_2(-5)$ помещены массы 2 *кг* и 5 *кг*. Найти центр тяжести системы.

15. На невесомом стержне на равных расстояниях друг от друга помещены грузы в 1 *кг*, 2 *кг*, 3 *кг*, 4 *кг*, . . ., 10 *кг*. Доказать, что центр тяжести системы расположен там, где помещён груз в 7 *кг*.

§ 9. Преобразование системы координат

Рассмотрим ось координат с началом O и единичной точкой E. Пусть x — координата какой-нибудь точки M (черт. 20). Перенесём масштабный отрезок OE вдоль оси координат, не меняя его длины и направления, и пусть $O'E'$ — его новое положение. Теперь точка M будет иметь координату x' в новой системе координат, в которой за начало координат принята точка O', а за единичную точку принята точка E'. Координату x мы будем называть с т а р о й, а координату x' н о в о й; начальную систему координат будем называть старой. Будем говорить, что новая система получена из старой п е р е н о с о м.



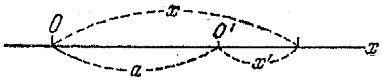
Черт. 20.

Поставим следующий вопрос: какова связь между старой и новой координатами x и x' одной и той же точки M? Ответ на этот вопрос даётся следующей теоремой:

Теорема. *Новая координата x' точки M равна разности между старой координатой x точки M и старой координатой a нового начала, т. е.*

$$x' = x - a. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть a — старая координата нового начала. Обозначим через b старую координату новой единичной точки E'. Тогда ориентированное расстояние от точки O' до точки E' равно $b - a$; с другой стороны, это ориентированное расстояние равно 1, так как отрезки OE и $O'E'$ равны и направлены в одну сторону. Итак, $b - a = 1$. Теперь, на основании следствия из теоремы § 6, имеем:



Черт. 21.

$$x' = -(MO'E') = -\frac{a-x}{b-a} = -(a-x) = x - a,$$

ч. т. д. Эту формулу удобно восстанавливать в памяти по чертежу 21.

Упражнения

16. Найти новые координаты точек $A\,(3)$, $B\,(-1)$, $C\,(4)$, $D\,(6)$, если новым началом координат является точка $O'\,(5)$. Проверить результаты вычислений по чертежу.

17. Старая координата точки A равна 3, новая 5. Найти старую координату нового начала.

18. Доказать, что при переносе сумма старой координаты нового начала и новой координаты старого начала равна нулю.

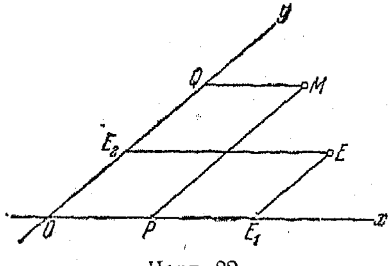
ГЛАВА II

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

§ 10. Декартова система координат на плоскости

В предыдущей главе мы видели, что положение точки на прямой может быть определено одним числом. В этом параграфе мы покажем, как может быть определено положение точки на плоскости.

Пусть M — *произвольная точка плоскости*. Проведём на этой плоскости две прямые, пересекающиеся в точке O под произвольным углом (черт. 22). Будем считать эту пару прямых упорядоченной, т. е. одну из них (безразлично какую!) будем считать первой, а другую — второй. Выберем на первой прямой произвольную точку E_1, а на второй — произвольную точку E_2, лишь бы только обе эти точки были отличны от точки O, и будем считать эти прямые за оси координат Ox и Oy с масштабными отрезками OE_1 и OE_2. Проведём через выбранную точку M прямые, коллинеарные*) осям координат до встречи с соответствующими осями в точках P и Q. Пусть x — координата точки P на оси Ox, а y — координата точки Q на оси Oy. Тогда *числа x и y называются декартовыми координатами точки M. Точка O пересечения осей координат называется началом координат. Ось Ox называется осью абсцисс, а ось Oy — осью ординат. Точки E_1 и E_2 называются единичными или масштабными точками осей координат, отрезки OE_1 и OE_2 называются масштабными отрезками осей координат.*



Черт. 22.

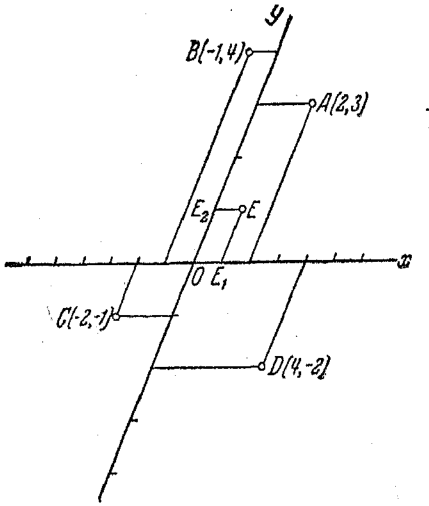
Ясно, что 1) каждой точке M плоскости соответствует вполне определённая пара чисел x и y — её координат; 2) двум разным точ-

*) Прямые называются коллинеарными, если они параллельны или совпадают.

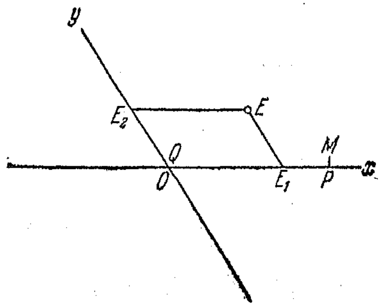
кам M_1 и M_2 соответствуют разные*) пары координат x_1, y_1 и x_2, y_2; 3) любой паре чисел x и y соответствует, и притом только одна, точка, для которой эти числа являются координатами.

Таким образом при помощи метода координат на плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством всех пар действительных чисел (ср. с § 1).

На чертеже 23 построены точки $A(2, 3)$, $B(-1, 4)$, $C(-2, -1)$, $D(4, -2)$. Если точка M лежит на оси Ox, то точка Q совпадает с началом координат O и значит $y = 0$, т. е. если точка M лежит на оси Ox, то её ордината y равна нулю. Обратно, если ордината y точки M равна нулю, то эта точка лежит на оси Ox, так как если $y = 0$, то точка Q совпадает с точкой O, а прямая QM, на которой лежит точка M, совпадает с осью Ox (черт. 24).



Черт. 23.



Черт. 24.

Итак, *ордината y точки M равна нулю, тогда и только тогда, когда эта точка лежит на оси Ox* (черт. 24).

Точно так же *абсцисса x точки M равна нулю тогда и только тогда, когда эта точка лежит на оси Oy* (черт. 25).

На чертеже 26 построены точки:

$$A(3, 0),\quad B(0, -4),\quad C(0, 2),\quad D(-2, 0).$$

Отметим ещё следующие точки вместе с их координатами:

O (0,0) — начало координат;

E_1 (1,0) — единичная или масштабная точка оси Ox;

E_2 (0,1) — единичная или масштабная точка оси Oy;

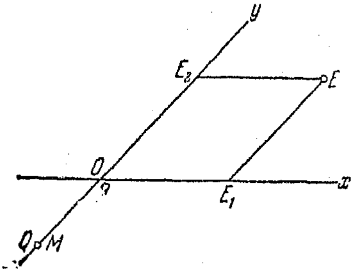
E (1,1) — единичная точка.

---

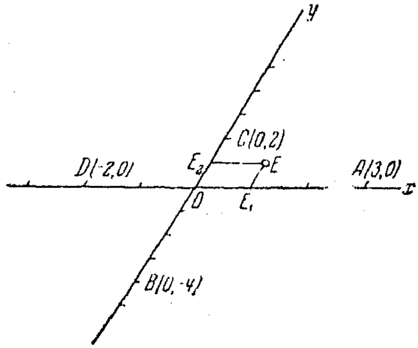
*) Пары чисел x_1, y_1 и x_2, y_2 называются разными, если имеет место хотя бы одно из неравенств $x_1 \neq x_2$ или $y_1 \neq y_2$ или имеют место оба эти неравенства. Например, пары 2, 5 и 2, 7 — разные, так как $5 \neq 7$; пары 3, 7 и 8, 9 — разные, пары 3, 4 и 4, 3 — разные (так как $3 \neq 4$ и $4 \neq 3$) и т. д.

Для построения единичной точки E надо провести через точку E_1 прямую, параллельную оси Oy, а через точку E_2 прямую, параллельную оси Ox; точка E есть точка пересечения указанных прямых (черт. 27).

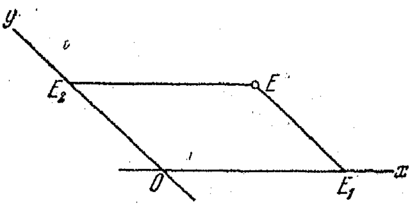
Параллелограмм, вершины которого совпадают с единичными точками E_1, E, E_2 и началом координат O, называется масштабным. Он может быть, в частности, квадратом (черт. 28), прямоугольником или ромбом. Соответствующие системы координат естественно было бы называть декартовой квадратной, декартовой прямоугольной и декартовой ромбической. В дальнейшем изложении мы будем пользоваться только двумя системами: общей декартовой и квадратной, которые будем называть соответственно **косоугольной** и **прямоугольной** (эти названия широко распространены в учебной литературе).



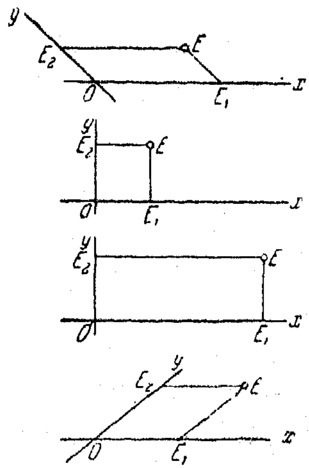
Черт. 25.



Черт. 26.



Черт. 27.



Черт. 28.

Упражнение

19. Выбрав на плоскости произвольную декартову систему координат, построить точки: $A(4, 1)$, $B(-2, 5)$, $C(3, -6)$, $D(-1, -1)$, $F(-2, 0)$, $G(4, 0)$, $K(5, 0)$, $L(0, -5)$, $S(0, 4)$.

§ 11. Полярная система координат

Положение точки на плоскости можно определить, пользуясь и другими системами координат. Одной из широко распространённых систем координат на плоскости является полярная. В этой системе координат положение каждой точки M плоскости определяется ориентированным углом*) от какой-нибудь оси Ox (полярная ось) до луча OM и расстоянием r от точки M до точки O (черт. 29).

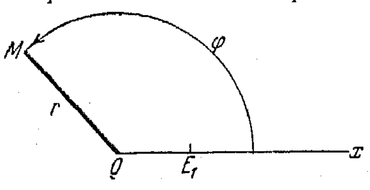
Число r называется полярным радиусом или 1-й полярной координатой точки M.

Число φ называется амплитудой, полярным углом или 2-й полярной координатой точки M.

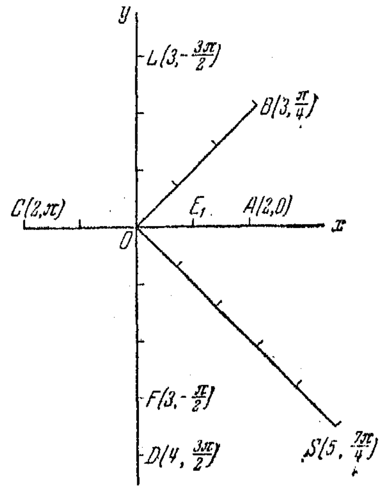
Запись $M(r, \varphi)$ означает, что точка M имеет полярные координаты r и φ.

На чертеже 30 построены точки $A(2,0)$, $B\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, $C(2, \pi)$, $D\left(4, \frac{3\pi}{2}\right)$, $S\left(5, \frac{7\pi}{4}\right)$, $F\left(3, -\frac{\pi}{2}\right)$, $L\left(3, -\frac{3\pi}{2}\right)$.

Точка O называется полюсом полярной системы координат;



Черт. 29.



Черт. 30.

отрезок OE_1, служащий для измерения длин, называется масштабным, а точка E_1 — единичной. Углы φ мы будем обычно измерять в радианах.

Замечание I. Полярные координаты полюса O обычно не определяются (можно считать, что для точки O $r=0$, а φ — любое число).

*) Ориентированным углом называют угол, стороны которого взяты в определённом порядке. Мы будем приписывать мере ориентированного угла φ знак так, как это делается в тригонометрии.

Угол, мера которого равна 1, называется масштабным; например, угол в 1°, угол 1 радиан и т. д. — наиболее широко распространённые масштабные углы. За масштабный угол можно взять, конечно, совершенно произвольный угол, отличный от нуля.

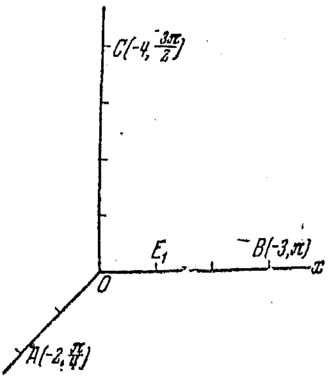
Замечание II. В некоторых вопросах удобно полярному радиусу r приписывать знак; именно считают $r<0$, если отрезок OM откладывают на продолжении луча, образующего с полярной осью угол φ. На чертеже 31 построены точки

$$A\left(-2, \frac{\pi}{4}\right),\ B\ (-3, \pi),\quad C\left(-4, \frac{3\pi}{2}\right).$$

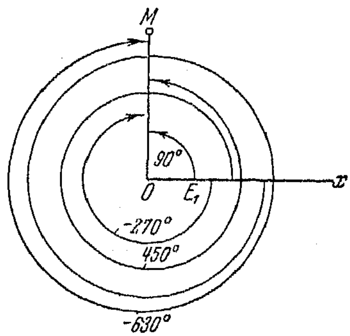
Замечание III. Амплитуда φ для каждой точки плоскости имеет бесконечное множество значений; если φ — одно из значений амплитуды, то все её значения заключены в выражении

$$\varphi+2k\pi,$$

где k принимает все целые значения. Например, различные значе-



Черт. 31.



Черт. 32.

ния амплитуды точки $M(1, 90^\circ)$ таковы: $90^\circ, -270^\circ$, $450^\circ, -630^\circ$, $810^\circ, -990^\circ$ и т. д. (черт. 32).

Значение амплитуды, заключённое в полуинтервале $0 \leqslant \varphi < 360^\circ$ или $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, называется **главным**.

Полярная система координат имеет широкое практическое применение в геодезии, артиллерии, астрономии и других науках, где приходится иметь дело с отсчётом углов и расстояний до измеряемых предметов.

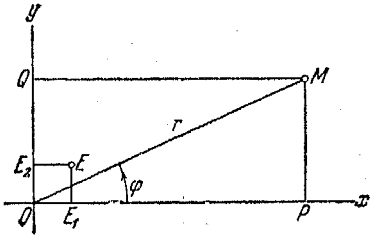
Упражнения

20. Построить точки:

$$A\left(3, \frac{3\pi}{4}\right), B\left(2, -\frac{\pi}{2}\right), C(1, -\pi), D\left(5, \frac{\pi}{4}\right),\ K\left(4, -\frac{3\pi}{4}\right), L\left(-3, \frac{\pi}{2}\right),$$
$$M\left(-2, \frac{\pi}{4}\right),\ N\left(-4, -\frac{3\pi}{2}\right).$$

§ 12. Связь декартовых координат с полярными

Пусть на плоскости задана полярная система координат, т. е. полярная ось Ox, направление отсчёта углов и масштабный угол. Построим декартову прямоугольную систему координат, совмещая начало координат с полюсом O, а ось Ox с полярной осью, при этом пусть масштабный отрезок оси Oy получается из масштабного отрезка оси Ox поворотом последнего на $+90°$ (черт. 33). Возьмём на плоскости точку M. Эта точка будет иметь полярные координаты r, φ и декартовы x и y. Как связаны между собой эти координаты?



Черт. 33.

Предполагая, что точка M не совпадает с началом координат O, по определению тригонометрических функций *) имеем:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Если точка M совпадает с началом координат, то формулы эти верны и в этом случае, так как для начала координат

$$x = y = 0, \text{ но и } r = 0.$$

Из этих формул находим

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2,$$

откуда

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

и, следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{3}$$

Эти формулы позволяют определить полярные координаты по декартовым.

Пример 1. Найти декартовы координаты точки $M\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$.

Решение:

$$x = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \quad y = 4\sin\frac{\pi}{6} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2,$$

$$M(2\sqrt{3}, 2).$$

*) Перепёлкина А. Н. и Новоселов С. И., Геометрия и тригонометрия, учебник для учительских институтов, Учпедгиз, М., 1947.

Пример 2. Найти полярные координаты точки $M(-1, -1)$.
Решение:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi = \frac{5\pi}{4},$$

$$M\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right).$$

Упражнения

21. Найти декартовы координаты точек

$$M\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \quad P\left(4, \frac{7\pi}{4}\right).$$

22. Найти полярные координаты точек

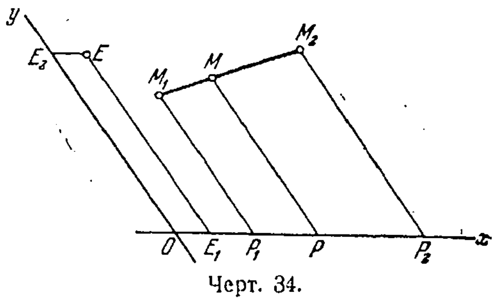
$$M(3, \sqrt{3}), \quad P(1, -1).$$

23. Найти полярные координаты точек

$$M(-2, -3), \quad N(3, -4).$$

§ 13. Деление отрезка в данном отношении

В настоящем параграфе мы решим задачу о делении отрезка в данном отношении. Аналогичная задача была нами решена в аналитической геометрии на прямой. Здесь имеют место теоремы, вполне аналогичные теоремам 1 и 2 § 7:



Черт. 34.

Теорема 1. *Если точка $M(x, y)$ делит отрезок с концами $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ в отношении λ, то её координаты определяются следующими формулами:*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{1}$$

Доказательство. Предположим сначала, что отрезок M_1M_2 не коллинеарен оси Oy. Проведём через точки M_1, M и M_2 прямые, коллинеарные оси Oy, и пусть P_1, P и P_2 — точки встречи этих прямых с осью Ox (черт. 34). Очевидно, простое отношение $\lambda = (M_1MM_2)$ при таком проектировании не изменится, т. е. в каком отношении точка M делит отрезок M_1M_2, в таком же отношении точка P делит отрезок P_1P_2:

$$(M_1MM_2) = (P_1PP_2) = \lambda.$$

На основании формулы, определяющей координату точки, делящей отрезок в данном отношении (§ 7), находим координату x точки P:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};$$

эта координата x будет вместе с тем и первой координатой точки M. Итак, первая из формул (1) нами доказана для случая, когда отрезок M_1M_2 не коллинеарен оси Oy. Если этот отрезок коллинеарен оси Oy, то точки P_1, P, P_2 сливаются, т. е. $x_1=x_2=x$. Предыдущих рассуждений привести нельзя, так как простое отношение (P_1PP_2) теперь не имеет смысла, однако и в этом случае первая из формул (1) верна; в самом деле: так как $x_1=x_2=x$, то

$$\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{x_1+\lambda x_1}{1+\lambda}=\frac{x_1(1+\lambda)}{1+\lambda}=x_1=x;$$

итак, опять

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

Проектируя точки M_1, M и M_2 на ось Oy прямыми, коллинеарными оси Ox, мы получим вторую из формул (1).

Имеет место и обратная теорема:

Теорема 2. *Каково бы ни было число $\lambda\neq-1$, формулами*

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

определяются координаты некоторой точки M, лежащей на прямой, проходящей через точки $(M_1\ x_1,\ y_1)$ и $M_2\ (x_2,\ y_2)$ и делящей отрезок M_1M_2 в отношении λ.

Доказательство. Пусть λ — любое число, отличное от -1. В § 7 (теорема 2) мы доказали, что существует точка M, делящая отрезок M_1M_2 в отношении λ. Рассмотрим эту точку. На основании только что доказанной теоремы её координаты как раз и определяются формулами $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$. Этим и обосновано обратное предложение.

Следствие. *Координаты середины отрезка с концами $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2\ (x_2,\ y_2)$ равны полусуммам соответствующих координат его концов:*

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \qquad (2)$$

Пример. Координаты точки M, делящей отрезок с концами $M_1(3, 5)$ и $M_2(-2, 0)$ в отношении $\lambda = -\frac{2}{3}$:

$$x = \frac{3 - \frac{2}{3}(-2)}{1 - \frac{2}{3}} = 13, \qquad y = \frac{5 - \frac{2}{3} \cdot 0}{1 - \frac{2}{3}} = 15.$$

Упражнения

24. Найти координаты точек, делящих отрезок с концами $M_1(2, 5)$ и $M_2(-3, 4)$ в отношениях:

$$1)\ \lambda = \frac{1}{2}, \quad 2)\ \lambda = 3, \quad 3)\ \lambda = -\frac{4}{3}, \quad 4)\ \lambda = -5.$$

25. Найти середину отрезка с концами $M_1(2, 5)$ и $M_2(3, -7)$.

26. Доказать, что точки $M_1(x, y)$ и $M_2(-x, -y)$ симметричны *) относительно начала координат.

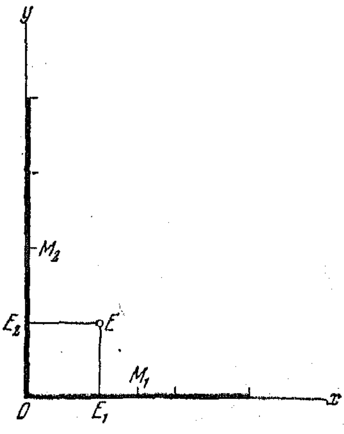
27. Доказать, что середина отрезка с концами $M_1(x, y)$ и $M_2(-x, y)$ лежит на оси Oy, а середина отрезка с концами $M_1(x, y)$ и $M_2(x, -y)$ лежит на оси Ox. Сделать чертёж.

§ 14. Центр тяжести

Повторяя рассуждения § 8, но применяя теперь формулы $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, получаем следующий результат: центр тяжести системы материальных точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2), \ldots, M_k(x_k, y_k)$, в которых помещены соответственно массы $m_1, m_2, \ldots, m_k$, определяется координатами

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots + m_k x_k}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k},$$

$$y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots + m_k y_k}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k}.$$



Черт. 35.

Пример. Однородный стержень согнут под прямым углом; длины его прямолинейных частей 3 *см* и 4 *см*. Определить положение центра тяжести (черт. 35).

Решение. Будем считать, что линейная плотность стержня равна 1, т. е. что масса стержня длиной в 1 *см* равна 1. Сосредоточим массу каждой из прямолинейных частей в её середине. Тогда вопрос сведётся к отысканию центра тяжести двух масс 3 и 4, расположенных в точках

$$M_1\left(\frac{3}{2}, 0\right) \text{ и } M_2(0, 2).$$

*) Точки M_1 и M_2 называются симметричными относительно точки O, если середина отрезка M_1M_2 совпадает с точкой O или если обе они совпадают с этой точкой.

Располагая оси координат так, как указано на чертеже 35, находим:

$$x=\frac{\frac{2}{3}\cdot 3+0\cdot 4}{3+4}=\frac{9}{14}\text{ см},\quad y=\frac{3\cdot 0+4\cdot 2}{3+4}=\frac{8}{7}\text{ см}.$$

Центр тяжести:

$$S\left(\frac{9}{14},\ \frac{8}{7}\right).$$

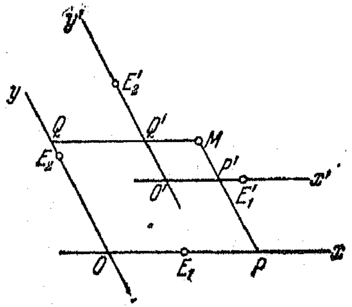
Упражнения

28. Найти центр тяжести трёх масс 2 *кг*, 3 *кг* и 5 *кг*, помещённых в точках $M_1(2, 3)$, $M_2(-2, 5)$, $M_3(-7, 0)$.

29. Найти центр тяжести проволочного треугольника, длины сторон которого 6, 8 и 10 *см*.

§ 15. Перенос осей координат

Поставим и решим задачу, аналогичную задаче, рассмотренной в § 9. Рассмотрим две системы координат xOy и $x'O'y'$, одна из которых получается переносом другой, т. е. в этих системах масштабные отрезки OE_1, OE_2 и $O'E_1'$, $O'E'_2$ соответственно равны и одинаково направлены (черт. 36). Каждая точка M плоскости имеет координаты x, y в системе xOy — старые координаты в старой системе и координаты x', y' в системе $x'O'y'$ — новые координаты в новой системе.



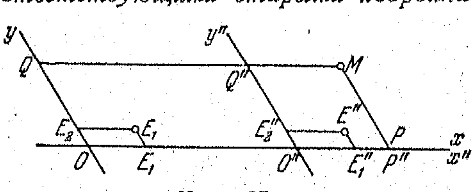
Черт. 36.

Теорема. *Если старые координаты нового начала координат O' равны a и b, то*

$$x'=x-a,\quad y'=y-b,$$

т. е. новые координаты точки M равны разностям между её старыми координатами и соответствующими старыми координатами нового начала координат.

Доказательство. Рассмотрим сначала такой перенос осей координат, при котором старая и новая оси абсцисс совпадают (черт. 37), т. е. новое начало координат O'' лежит на старой оси Ox. В этом случае ордината y точки M, очевидно, не изменится: $y''=y$, а так как абсциссы x и x'' точки M,



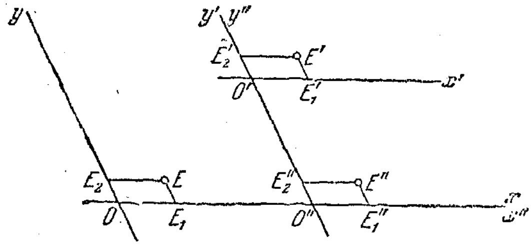
Черт. 37.

равны абсциссам точки P, а абсцисса точки O'' равна a, то на основании § 9 получим:

$$x'' = x - a.$$

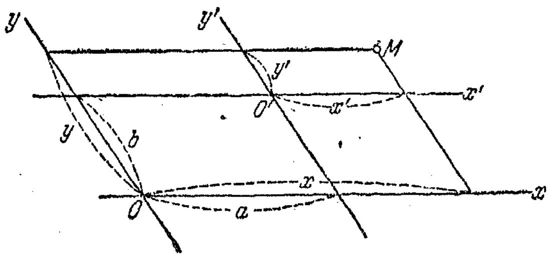
Итак,

$$x'' = x - a, \quad y'' = y.$$



Черт. 38.

Перенос осей координат, при котором точка O' является новым началом координат, можно произвести в два приёма: сначала перенести начало координат вместе с осями в точку $O''(a, 0)$, а затем начало O'' перенести в точку O' (a, b) (черт. 38). Тогда



Черт. 39.

$$x'' = x - a, \quad y'' = y;$$
$$x' = x'', \quad y' = y'' - b$$

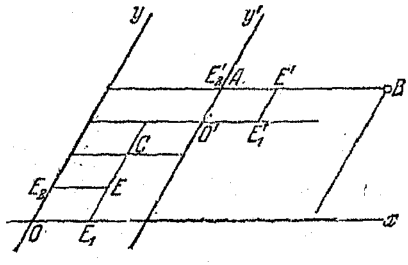
и, значит, окончательно

$$x' = x - a,$$
$$y' = y - b.$$

Формулы переноса удобно восстанавливать в памяти по чертежу 39.

Пример. После переноса начала координат в точку O' (2, 3) (черт. 40) новые координаты точек A (2, 4), B (5, 4), C (1, 2) будут:

$$x_A' = 0, \qquad y_A' = 1;$$
$$x_B' = 3, \qquad y_B' = 1;$$
$$x_C' = -1, \qquad y_C' = -1.$$



Черт. 40.

Упражнения

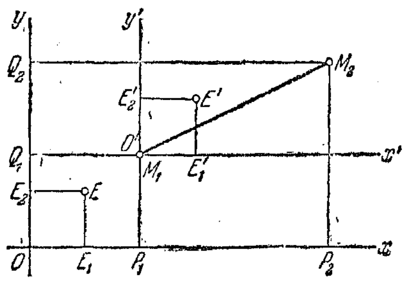
30. Каковы будут новые координаты точек A (3, 5), B (7, —1), C (—2, 5) после переноса, если новым началом координат служит точка O' (3, —2)? Проверить результаты вычислений по чертежу.

31. Найти новые координаты старого начала при переносе осей координат, если старые координаты нового начала равны a и b.

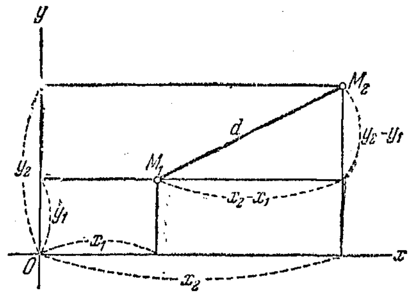
32. В какую точку надо перенести начало координат, чтобы новые координаты точки A (3, 5) были бы равны —2 и 6? Проверить результаты вычислений по чертежу.

§ 16. Расстояние между двумя точками

В § 12 была получена формула $r=\sqrt{x^2+y^2}$, определяющая расстояние от точки $M(x, y)$ до начала координат; подчёркиваем, что эта формула выведена лишь для декартовой прямоугольной системы координат. В декартовой косоугольной системе эта формула не верна. Поставим теперь вопрос: как определить расстояние между двумя произвольными точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ в декартовой прямоугольной системе координат.



Черт. 41.



Черт. 42.

Решение этой задачи легко сводится к предыдущей: перенесём оси координат так, чтобы новым началом стала точка $M_1(x_1, y_1)$ (черт. 41). Тогда новые координаты точки M_2 на основании формул переноса (§ 15) будут:

$$x'=x_2-x_1,\quad y'=y_2-y_1.$$

Расстояние d между точками M_1 и M_2 равно расстоянию $r'=\sqrt{x'^2+y'^2}$ точки M_2 от нового начала координат, т. е. $d=r'$. Заменяя в последней формуле x' и y' разностями x_2-x_1 и y_2-y_1, получим:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Итак, *расстояние d между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ в декартовой прямоугольной системе координат равно корню квадратному из суммы квадратов разностей соответствующих координат.* Формулу, определяющую расстояние между двумя точками, удобно восстанавливать в памяти по чертежу 42.

Пример. $M_1(3, 5)$, $M_2(7, 4)$, $d=\sqrt{(7-3)^2+(4-5)^2}=\sqrt{17}$.

Упражнения

33. Найти расстояние d между точками M_1 и M_2:

1) $M_1(3, 5)$, $M_2(6, 9)$,
2) $M_1(0, -3)$, $M_2(-5, 4)$.

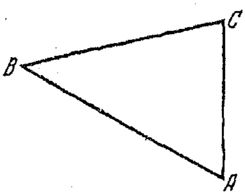
34. Найти центр и радиус окружности, описанной около треугольника вершины которого: $A(3, 1)$, $B(-2, 0)$, $C(1, 4)$.

35. На оси Ox найти точку, отстоящую от точки $(2, 1)$ на расстоянии 7.

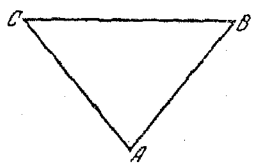
36. На оси Oy найти точки, равноудалённые от двух точек $(3, 5)$ и $(-7, 4)$.

§ 17. Площадь треугольника

В элементарной геометрии площади выражаются обычно положительными числами. В некоторых вопросах геометрии удобно приписывать площади знак.



Черт. 43.



Черт. 44.

Пусть дан треугольник ABC (черт. 43). Зафиксируем порядок его вершин, именно, условимся считать 1-й ту вершину, которая обозначена буквой, стоящей на первом месте, 2-й ту, которая обозначена буквой, стоящей на втором месте, и 3-й ту, которая обозначена последней буквой.

Примеры:

в $\triangle ABC$ имеем: A — 1-я вершина, B — 2-я, C — 3-я;
в $\triangle CBA$ имеем: C — 1-я вершина, B — 2-я, A — 3-я.

Рассмотрим обход по периметру треугольника от 1-й вершины через 2-ю к 3-й. Этот обход в зависимости от порядка вершин может производиться в одном из двух направлений (по часовой стрелке — черт. 43 или против часовой стрелки — черт. 44).

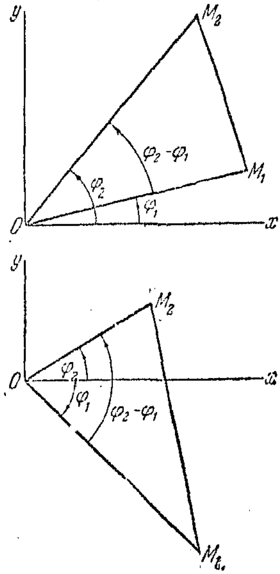
Условимся считать площадь положительной при каком-нибудь определённом направлении обхода (например, при обходе против часовой стрелки) и отрицательной, если обход производится в противоположном направлении (по часовой стрелке).

На чертеже 44 в соответствии с принятым соглашением площадь положительна, а на чертеже 43 — отрицательна. Обход, при котором мы считаем площадь положительной, будем называть правым (против часовой стрелки), а противоположный обход левым (по часовой стрелке). Площадь треугольника, которой приписан знак, мы будем называть ориентированной. Докажем следующую теорему:

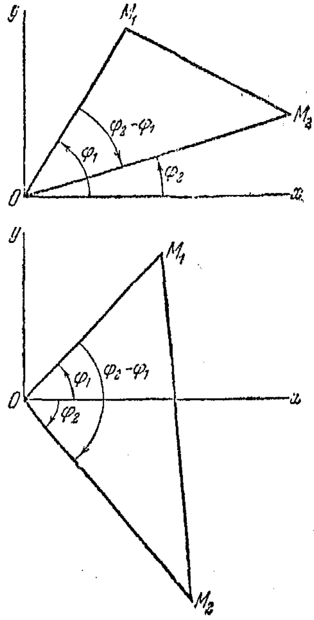
Теорема 1. *Ориентированная площадь треугольника M_1M_2O равна:* $\sigma = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$ *или* $\sigma = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ *), *где x_1, y_1 — декартовы прямоугольные координаты точки M_1, а x_2, y_2 — декартовы прямоугольные координаты точки M_2.*

*) Основные свойства детерминантов изложены в учебнике алгебры — С. И. Новоселов, Алгебра, учебник для учительских институтов. Учпедгиз, 1947.

Доказательство. Рассмотрим полярные координаты r_1, φ_1 и r_2, φ_2 точек M_1 и M_2. Пусть обход треугольника M_1M_2O — правый (черт. 45). Тогда его ориентированная площадь σ — положительна. С другой стороны, площадь треугольника равна половине



Черт. 45.



Черт. 46.

произведения длин его сторон на синус угла между ними, а угол между сторонами OM_1 и OM_2 равен $\varphi_2 - \varphi_1$, значит

$$\sigma = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{1}$$

Если обход треугольника M_1M_2O — левый (черт. 46), то его ориентированная площадь отрицательна, но в этом случае $\varphi_2 - \varphi_1$ — острый или тупой отрицательный угол ($-\pi < \varphi_2 - \varphi_1 < 0$) и, значит, произведение $\frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ опять будет равно σ, ибо по абсолютной величине это произведение равно площади треугольника M_1M_2O, а кроме того, оно отрицательно (так как $-\pi < \varphi_2 - \varphi_1 < 0$ и, значит, $\sin(\varphi_2 - \varphi_1) < 0$). Итак, и в этом случае

$$\sigma = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Задача о вычислении ориентированной площади треугольника решена в полярной системе координат.

Преобразуя последнее выражение в прямоугольные координаты, получим:

$$\sigma = \frac{1}{2} r_1 r_2 (\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2) =$$
$$= \frac{1}{2} (r_1 \cos\varphi_1 \cdot r_2 \sin\varphi_2 - r_1 \sin\varphi_1 \cdot r_2 \cos\varphi_2) = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Теорема 2. *Ориентированная площадь σ треугольника $M_1M_2M_3$ с вершинами $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, заданными относительно прямоугольной системы координат, равна:*

$$\sigma = \frac{1}{2} [(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)] =$$
$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Доказательство. Перенесём оси координат так, чтобы новым началом координат была бы точка $M_3(x_3, y_3)$; тогда новые координаты точек M_1 и M_2 на основании формул переноса будут

$$x_1' = x_1 - x_3, \quad y_1' = y_1 - y_3;$$
$$x_2' = x_2 - x_3, \quad y_2' = y_2 - y_3,$$

и, значит, на основании предыдущей теоремы:

$$\sigma = \frac{1}{2} (x_1' y_2' - x_2' y_1') = \frac{1}{2} [(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)].$$

Это выражение для ориентированной площади треугольника $M_1M_2M_3$ можно переписать также в виде

$$\sigma = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Следствия из теорем. Площадь треугольника M_1M_2O, третья вершина которого лежит в начале координат, а две другие $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ заданы относительно декартовой прямоугольной системы координат, равна половине абсолютной величины числа $x_1y_2 - x_2y_1$, т. е.

$$S = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|. \tag{4}$$

Площадь треугольника $M_1M_2M_3$, вершины которого $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$ заданы относительно декартовой прямоугольной системы координат, равна

$$S = \frac{1}{2} |(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)| \tag{5}$$

или

$$S=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}^{*)}. \qquad (6)$$

Пример. Ориентированная площадь треугольника с вершинами $M_1(-2, 3)$, $M_2(2, 5)$, $M_3(3, -2)$ равна

$$\sigma=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 1\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=-15,$$

а площадь этого треугольника равна 15.

Упражнения

37. Найти ориентированную площадь и площадь треугольника $M_1M_2M_3$, вершины которого заданы относительно декартовой прямоугольной системы координат:

1) $M_1(3, 1)$, $M_2(-2, 0)$, $M_3(0, 0)$;
2) $M_1(-1, 4)$, $M_2(3, -7)$, $M_3(-2, 5)$.

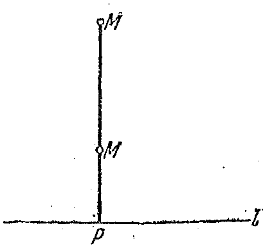
38. Доказать, что точки M_1 (3, 5) и $M_2(-1, 4)$ лежат по одну сторону от прямой, проходящей через точки M_3 (3, 0) и $M_4(2, -1)$.

39. На плоскости дан треугольник $M_1M_2M_3$. Берётся произвольная точка M. Определить знаки чисел σ_1, σ_2, σ_3, измеряющих ориентированные площади треугольников MM_2M_3, MM_3M_1 и MM_1M_2 в зависимости от различных положений точки M относительно данного треугольника.

40. Лежит ли начало координат внутри или вне треугольника с вершинами $M_1(2, 3)$, $M_2(-3, 4)$, $M_3(4, 5)$? Дать ответ на этот вопрос, не прибегая к чертежу, а затем проверить правильность решения, построив данные точки.

41. По отношению к декартовой прямоугольной системе координат даны четыре точки $M_1(2, 3)$, $M_2(-1, 4)$, $M_3(0, -1)$, $M_4(5, 3)$. Пересекаются ли отрезки M_1M_2 и M_3M_4?

42. Найти на оси Oy такую точку P, чтобы площадь треугольника PQR, где точки $Q(1, 1)$ и $R(3, 5)$ даны относительно декартовой прямоугольной системы координат, равнялась 8.



Черт. 47.

§ 18. Сжатие и сдвиг

I. Сжатие или растяжение.

Определение. *Сжатием плоскости к прямой l называется такое преобразование множества всех точек плоскости, при котором любой точке M плоскости ставится в соответствие точка M', лежащая на прямой MP, перпендикулярной к прямой l, по ту же сторону от прямой l, что и точка M, причём*

$$M'P=k\cdot MP,$$

---

*) Символ mod заменяет знак модуля.

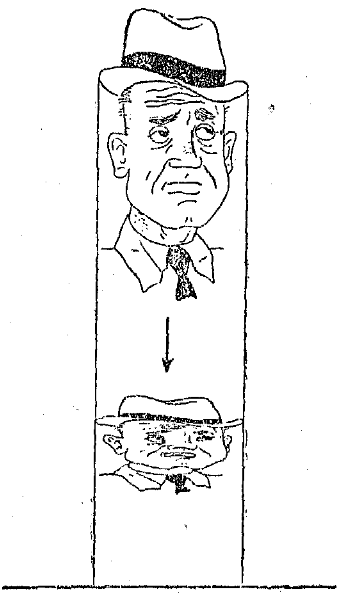
где k — одно и то же положительное число для всех точек плоскости (черт. 47).

Число k называется **коэффициентом сжатия** (при $k > 1$ естественнее говорить о растяжении).

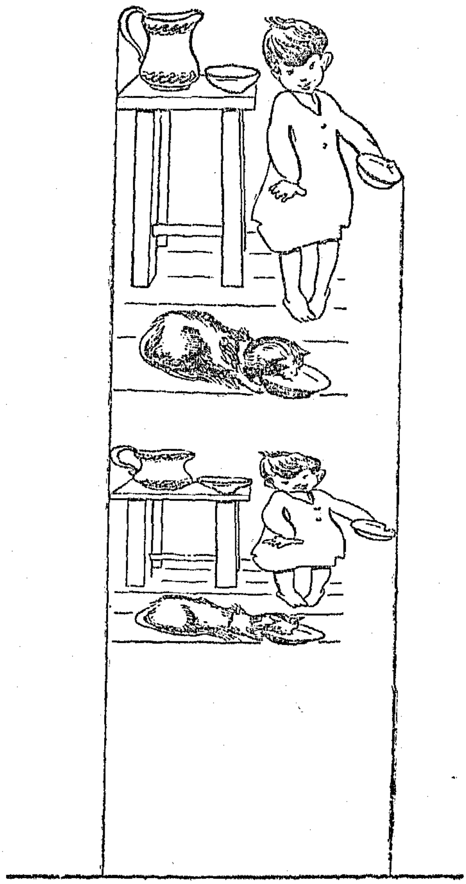
Точка M' называется **образом** точки M, а точка M — **прообразом** точки M' (в преобразовании сжатия к прямой).

На чертеже 48 указаны рисунки, а также их образы при сжатии к прямой.

Сжатие к прямой легко осуществить на тенях при помощи источника параллельных лучей: вырежьте из бумаги какую-нибудь фигуру и передвигайте источник света, лучи которого параллельны по направлению, перпендикулярному к основанию фигуры. Тогда тень будет растягиваться. Такое преобразование теней можно наблюдать вечером; когда пешеход идёт по улице мимо фонаря, то тень коротка, затем тень начинает постепенно удлиняться и вытягиваться, по мере того как пешеход идёт дальше. Строго говоря, в



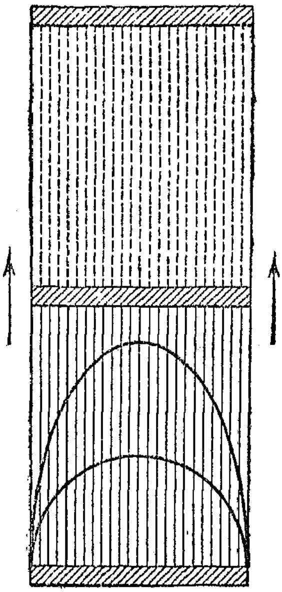
Черт. 48а.



Черт. 48б.

этом примере происходит ещё и перенос тени; мы имеем дело с растяжением и переносом.

Можно приготовить, и мы это рекомендуем читателю, простой прибор, позволяющий наблюдать, что происходит с различными фигурами при сжатии и растяжении. При помощи этого прибора можно также наглядно изучать и другое преобразование, о котором мы будем говорить ниже: возьмём две планки и перетянем их пучком параллельных резиновых тесёмок. Если теперь нижнюю планку закрепить, а верхнюю отодвигать от нижней, то тесёмки будут растягиваться, мы получим преобразование растяжения (черт. 49). Если на тесёмках нарисовать различные фигуры, то мы будем наблюдать, что произойдёт с этими фигурами при растяжении.



Черт. 49.

Рекомендуем сделать такой прибор и рассмотреть, во что переходят при растяжении треугольник, квадрат, две параллельные прямые и т. д.

Введём на плоскости декартову прямоугольную систему координат, принимая прямую l, к которой производится сжатие, за ось Ox. Тогда если $M(x, y)$ — прообраз точки $M'(x', y')$, то

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= ky. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Эти формулы выражают координаты образа M' точки M при сжатии через координаты прообраза. Опираясь на эти формулы сжатия, докажем, что сжатие обладает следующими свойствами:

1) *Две различные точки переходят при сжатии в две различные точки, т. е. два любых различных прообраза имеют при сжатии различные образы.*

2) *Если мы возьмём на плоскости любую точку, то в эту точку перейдёт какая-то точка плоскости после сжатия, т. е. каждая точка плоскости имеет прообраз.*

3) *Если M' — образ точки M при сжатии, то преобразование*

$$M' \to M$$

также будет сжатием; иначе: преобразование, обратное сжатию, также является сжатием.

4) *При сжатии три точки, лежащие на одной прямой, переходят в три точки, также лежащие на одной прямой, причём, если точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то точка M' делит отрезок $M_1'M_2'$ в том же отношении λ.*

5) *Параллельные прямые после сжатия переходят в параллельные прямые.*

6) *При сжатии (или растяжении) с коэффициентом k ориентированная площадь треугольника умножается на k.*

Доказательство.

1) Возьмём две различные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Если абсциссы точек M_1 и M_2 различны: $x_1 \neq x_2$, то будут различны и абсциссы x'_1 и x'_2 образов M'_1 и M'_2 точек M_1 и M_2 (почему?); значит, эти образы различны.

Если абсциссы прообразов равны, то (так как сами прообразы M_1 и M_2 различны) должны быть непременно различны их ординаты: $y_1 \neq y_2$, но тогда будут различны и ординаты y'_1 и y'_2 образов, так как $y'_1 = ky_1$, а $y'_2 = ky_2$, где $k \neq 0$, т. е. образы M'_1 и M'_2 различны и в этом случае; таким образом *при сжатии образы будут различны, если различны прообразы.*

2) Возьмём на плоскости любую точку (α, β) и докажем, что в эту точку перейдёт некоторая точка при сжатии её к оси Ox. В самом деле, такой точкой является точка $\left(\alpha, \frac{\beta}{k}\right)$; эта точка при сжатии её к оси Ox с коэффициентом сжатия k перейдёт в точку (α, β). Таким образом *при сжатии каждая точка плоскости имеет прообраз.*

3) Решим систему

$$x' = x,$$
$$y' = ky$$

относительно x и y; получим:

$$x = x',$$
$$y = \frac{1}{k} y',$$

т. е. снова формулы сжатия к оси Ox $\Big($только вместо k коэффициент сжатия равен $\frac{1}{k}\Big)$.

Значит, *преобразование, обратное преобразованию сжатия к оси, есть снова сжатие к той же оси.*

4) Пусть $M'_1(x'_1, y'_1)$, $M'_2(x'_2, y'_2)$, $M'_3(x'_3, y'_3)$ — образы точек M_1, M_2, M_3; тогда

$$x'_1 = x_1, \quad y'_1 = ky_1;$$
$$x'_2 = x_2, \quad y'_2 = ky_2;$$
$$x'_3 = x_3, \quad y'_3 = ky_3;$$

отсюда

$$\frac{x'_1 + \lambda x'_2}{1 + \lambda} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = x = x',$$

$$\frac{y'_1 + \lambda y'_2}{1 + \lambda} = \frac{ky_1 + \lambda k y_2}{1 + \lambda} = k\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = ky = y';$$

итак,

$$x' = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y' = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

т. е. точка M' лежит на прямой $M_1'M_2'$ и делит отрезок $M_1'M_2'$ в отношении λ; *при сжатии простое отношение сохраняется.* Отсюда следует, что *прямая после сжатия остаётся прямой* (она не «искривляется»).

5) Доказательство того, что при сжатии сохраняется параллельность прямых, предоставляется провести читателю.

6) Остаётся доказать свойство сжатия, относящееся к площади треугольника.

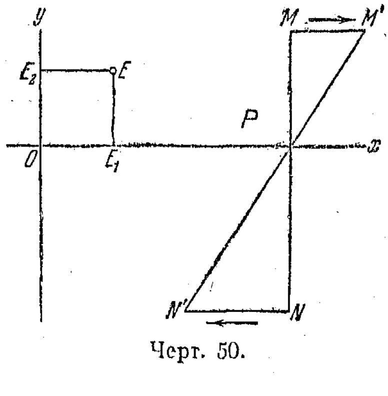
Пусть $M_1M_2M_3$ — произвольный треугольник, а $M_1'M_2'M_3'$ — треугольник, получаемый из треугольника $M_1M_2M_3$ при сжатии; тогда по формулам сжатия находим координаты вершин образа $M_1'M_2'M_3'$ треугольника $M_1M_2M_3$ через координаты вершин этого треугольника:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, & y_1' &= ky_1; \\ x_2' &= x_2, & y_2' &= ky_2; \\ x_3' &= x_3, & y_3' &= ky_3. \end{aligned}$$

Ориентированная площадь σ' треугольника $M_1'M_2'M_3'$ равна

$$\sigma' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & ky_1 & 1 \\ x_2 & ky_2 & 1 \\ x_3 & ky_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}k\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = k\sigma,$$

где σ — ориентированная площадь треугольника $M_1M_2M_3$. Отсюда следует, что *отношение ориентированных площадей треугольников при сжатии не меняется* (так как при составлении отношения коэффициент k сжатия сократится).



Черт. 50.

II. Сдвиг. Проведём на плоскости произвольную прямую l. Возьмём произвольную точку M и сдвинем её параллельно прямой l на расстояние MM', пропорциональное расстоянию MP от точки M до прямой l (черт. 50):

$$MM' = k \cdot MP;$$

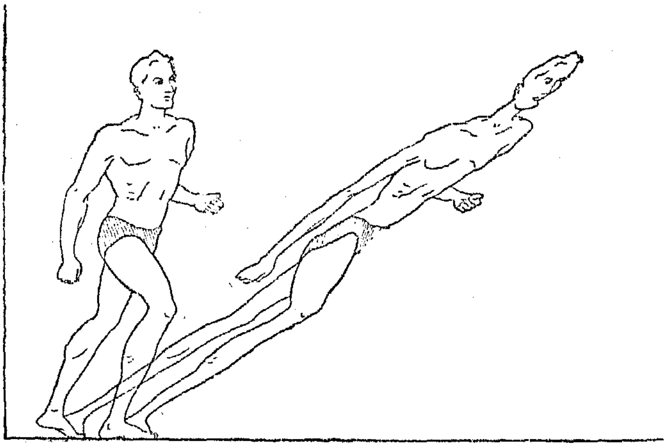
коэффициент k пропорциональности будем считать одним и тем же для всех точек плоскости. Условимся также в том, что все точки плоскости, расположенные по одну сторону от прямой l, сдвигаются в одном направлении, а все точки плоскости, расположенные по другую сторону от прямой l, сдвигаются в противоположном направлении.

Точки прямой l остаются неподвижными при сдвиге, так как расстояние любой точки прямой l до этой прямой равно нулю.

Указанное преобразование множества всех точек плоскости называется сдвигом.

Точка M', в которую переходит точка M при сдвиге, называется образом точки M, а точка M — прообразом точки M'. Каждую геометрическую фигуру можно рассматривать как множество точек. После сдвига плоскости это множество точек перейдёт в другое множество, называемое образом первого множества (при сдвиге). На чертеже 51 изображён рисунок и его образ при сдвиге.

Если внимательно присмотреться к фигурам, полученным из начальных при сдвиге, то нетрудно заметить, что они напоминают тени этих фигур; и действительно: сдвиг очень просто получить при помощи теней. Вырежьте



Черт. 51.

из бумаги какую-нибудь фигуру и передвигайте источник света, лучи которого параллельны, так, чтобы верхняя часть тени передвигалась параллельно её основанию; при таком перемещении источника света тень будет испытывать сдвиг. Читатель, вероятно, замечал, как «бежит» тень какого-нибудь предмета (столба, трамвая и т. д.), когда предмет находится в слабо освещённом месте, а мимо проезжает автомобиль, освещая его фарами; тень (приблизительно) испытывает сдвиг. Две тени от дома, забора, дерева, столба и т. д. одинаковой длины (утром и вечером) получаются одна из другой сдвигом.

Введём на плоскости декартову прямоугольную систему координат, принимая прямую l за ось Ox (черт. 50).

Обозначим координаты точки M через x и y, а координаты образа M' точки M при сдвиге — через x' и y'. Ясно, что ординаты точек M и M' будут равны, а абсцисса x' по сравнению с абсциссой x прообраза M изменится на величину ky, пропорциональную ординате y точки M:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + ky, \\ y' &= y. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Если, например, $k = \frac{1}{2}$, то

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + \frac{1}{2}y, \\ y' &= y, \end{aligned}\right\}$$

т. е. абсциссы точек, лежащих над осью Ox, увеличатся на число $\frac{1}{2}y$, т. е. эти точки сдвинутся в направлении масштабного отрезка OE_1. Для точек, лежащих под осью Ox, ординаты y отрицательны и, значит, эти точки сдвинутся в направлении, противоположном отрезку OE_1 ($x' < x$, так как $y < 0$). Для точек, лежащих на оси Ox, имеем $y = 0$ и, значит, для этих точек $x' = x$, $y' = y$, т. е. эти точки неподвижны при сдвиге.

Формулы (2) будем называть формулами сдвига.

Опираясь на эти формулы, докажем ряд геометрических свойств сдвига, а именно:

Свойства 1) — 5), указанные для сжатия, имеют место и для сдвига, и свойство 6) видоизменяется так: при сдвиге ориентированная площадь треугольника не меняется.

Доказательство:

1) Возьмём две различные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Если $y_1 \neq y_2$, то это неравенство сохранится и после сдвига (почему?) и, значит, образы M_1' и M_2' точек M_1 и M_2 различны. Если же ординаты y_1 и y_2 точек M_1 и M_2 равны, то непременно различны их абсциссы (почему?) и, значит, будут различны абсциссы $x_1' = x_1 + ky_1$, $x_2' = x_2 + ky_2$ (ибо $y_1 = y_2$, а $x_1 \neq x_2$), т. е. точки M_1' и M_2' опять оказываются различными.

2) Возьмём на плоскости любую точку (α, β) и докажем, что в эту точку перейдёт после сдвига какая-то точка $M(x, y)$ плоскости. Для нахождения такой точки M надо, очевидно, решить систему

$$\alpha = x + ky,$$
$$\beta = y,$$

откуда

$$x = \alpha - k\beta,$$
$$y = \beta.$$

Итак, точка $M(\alpha - k\beta, \beta)$ при сдвиге $x' = x + ky'$ $y' = y$ переходит в данную точку (α, β).

3) Решим систему

$$x' = x + ky,$$
$$y' = y$$

относительно x и y; получим:

$$x = x' - ky',$$
$$y = y'.$$

Мы видим, что преобразование от образа M' к прообразу M определяется формулами вида (2) (только k изменилось на $-k$); значит, это преобразование есть также сдвиг.

4) Возьмём три различные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$. Пусть точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ; тогда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$
$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

После сдвига наши точки перейдут в точки $M_1'(x_1', y_1')$, $M'(x', y')$ и $M_2'(x_2', y_2')$, координаты которых мы определим по формулам сдвига

$$x_1' = x_1 + ky_1, \quad y_1' = y_1;$$
$$x_2' = x_2 + ky_2, \quad y_2' = y_2;$$
$$x' = x + ky, \quad y' = y.$$

Отсюда легко находим:

$$\frac{x_1'+\lambda x_2'}{1+\lambda}=\frac{x_1+ky_1+\lambda(x_2+ky_2)}{1+\lambda}=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+k\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=x+ky=x'$$

и

$$\frac{y_1'+\lambda y_2'}{1+\lambda}=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=y=y'.$$

Итак,

$$x'=\frac{x_1'+\lambda x_2'}{1+\lambda},\quad y'=\frac{y_1'+\lambda y_2'}{1+\lambda},$$

т. е. точка M' лежит на прямой $M_1'M_2'$ и делит отрезок $M_1'M_2'$ в отношении λ. Отсюда, между прочим, следует, что прямая после сдвига остаётся прямой (т. е. не искривляется).

5) Две любые параллельные прямые l и m после сдвига перейдут в параллельные прямые l' и m'. Доказательство проведём от противного. Предположим, что «сдвинутые» прямые l' и m' пересекаются в точке M'; тогда, производя «обратный» сдвиг, мы должны будем заключить, что точка M' должна вернуться и на прямую l и на прямую m; так как эти прямые l и m параллельны, т. е. не имеют ни одной общей точки, то ясно, что точка M' после обратного сдвига должна занять два разных положения на плоскости, что явно неверно, так как при сдвиге каждая точка занимает только одно вполне определённое положение на плоскости.

6) Докажем, наконец, что ориентированная площадь σ треугольника при сдвиге не меняется.

Пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$ — вершины треугольника, заданные в прямоугольной системе координат. После сдвига эти точки перейдут в точки $M_1'(x_1', y_1')$, $M_2'(x_2', y_2')$, $M_3'(x_3' y_3')$, координаты которых определяются формулами, указанными выше. Имеем:

$$\text{пл. } \Delta M_1'M_2'M_3'=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1\\ x_2' & y_2' & 1\\ x_3' & y_3' & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1+ky_1 & y_1 & 1\\ x_2+ky_2 & y_2 & 1\\ x_3+ky_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\text{пл. } \Delta M_1M_2M_3.$$

Изучая сдвиг и сжатие, мы относили точки к одной и той же прямоугольной системе координат.

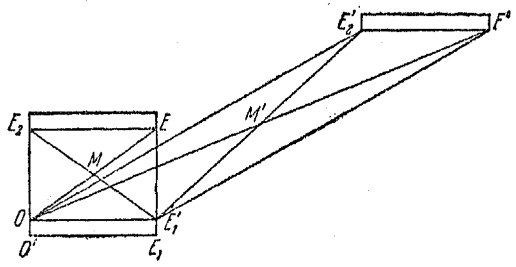
Решим ещё один вопрос: пусть точка M в декартовой прямоугольной системе координат имела координаты x и y; произведём сдвиг и сжатие или растяжение плоскости около оси Ox. При этом система координат xOy перейдёт в систему $x'O'y'$, а точка M—в точку M'. Какие координаты будет иметь преобразованная точка M' в преобразованной системе $x'O'y'$? Оказывается, те же самые, т. е. x и y. В самом деле: для построения координат точки M в системе xOy мы через точку M проводим прямые MP и MQ, коллинеарные осям Oy и Ox, и тогда

$$x=-(POE_1),\quad y=-(QOE_2).$$

Так как при сдвиге и сжатии и коллинеарность и простое отношение сохраняются, то при этих преобразованиях координаты точки меняться не будут, если, конечно, их рассматривать в преобразованной системе. Возьмите тот прибор, о котором мы уже неоднократно говорили, и проверьте на нём для какой-нибудь точки это положение; так, например, при выборе осей координат и единичной точки E, как указано на чертеже 52, точка M, являющаяся точкой пересечения диагоналей масштабного параллелограмма, будет иметь координаты $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$. При сдвиге и сжатии она останется точкой пересечения диагоналей масштабного параллелограмма (правда, уже нового) и, значит, её координаты (в новой системе!) будут те же (по отношению к старой системе координаты, конечно, другие) (черт. 52).

Упражнения

43. Рассмотрим преобразование множества всех точек плоскости, при котором координаты x' и y' образа M' точки M через координаты x и y прообраза выражаются линейными соотношениями с определителем, отличным от нуля, т. е.



Черт. 52.

$$x' = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2,$$

где

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Такое преобразование называется аффинным. Доказать, что аффинное преобразование обладает следующими свойствами:

1) Двум любым разным прообразам в аффинном преобразовании соответствуют два разных образа.

2) Каждая точка плоскости имеет прообраз.

3) Преобразование, обратное аффинному, также аффинное.

4) Если точки M_1, M и M_2 коллинеарны и точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то то же имеет место и по отношению к образам этих точек.

5) Параллельные прямые после аффинного преобразования остаются параллельными.

6) Если $M_1M_2M_3$ — произвольный треугольник, а $M_1'M_2'M_3'$ — его образ в аффинном преобразовании, то

$$\text{пл. } \triangle M_1'M_2'M_3' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \text{пл. } \triangle M_1M_2M_3.$$

§ 19. Площадь треугольника в косоугольной системе координат

Теорема. *Формула*

$$\sigma = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

определяющая ориентированную площадь треугольника в декартовой прямоугольной системе координат, верна и в любой косоугольной системе, если только за единицу измерения площадей принять масштабный параллелограмм.

Доказательство. Очевидно, что сдвигом и сжатием или растяжением можно превратить масштабный параллелограмм в квадрат (черт. 53); при этом точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$, координаты которых даны относительно косоугольной системы, перейдут в точки $M'_1(x_1, y_1)$, $M_2'(x_2, y_2)$ и $M_3'(x_3, y_3)$ с теми же координатами, но уже в системе с масштабным квадратом. Для этой системы ориентированная площадь треугольника $M_1'M_2'M_3'$ равна:

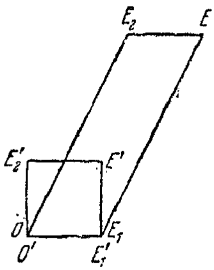
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Это число можно рассматривать как отношение площади треугольника $M_1'M_2'M_3'$ к площади масштабного квадрата, так как последнюю мы приняли равной 1. Производя обратное сжатие и обратный сдвиг, мы переведём треугольник $M_1'M_2'M_3'$ в треугольник $M_1M_2M_3$, а масштабный квадрат $OE_1'E'E_2'$ — в данный нам масштабный параллелограмм; по доказанному — отношение площади треугольника $M_1M_2M_3$ к площади масштабного параллелограмма не изменится, т. е. будет равно тому же числу

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Значит, *если принять за единицу измерения площадей площадь масштабного параллелограмма, то и в косоугольной системе*

$$\sigma = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$



Черт. 53.

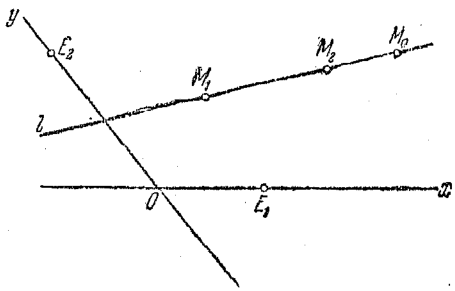
Замечание. Свойства сдвига и сжатия или растяжения плоскости могут быть выведены элементарно-геометрически, без применения метода координат. Применение этих преобразований и вообще применение преобразований для решения геометрических задач является одним из основных методов в школьном курсе геометрии: «метод симметрии», «метод вращения» и ряд других являются по существу методом преобразований, причём и симметрия, и вращения обладают как раз свойствами 1), 2), 3), 4), 5), 6), которыми обладают сжатие и сдвиг. Идея преобразований является одной из весьма плодотворных в геометрии.

ГЛАВА III

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

§ 20. Уравнение прямой

Пусть по отношению к декартовой системе координат xOy, не обязательно прямоугольной, задана совершенно произвольная прямая l (черт. 54). Докажем, что всегда можно построить, и притом только одно, уравнение первой степени, между x и y, т. е. уравнение вида $Ax+By+C=0$, где A и B не равны нулю одновременно, которое обращается в тождество, если вместо x и y подставить координаты любой точки нашей прямой. При этом мы не будем считать различными уравнениями такие, левые части которых отличаются числовым множителем, не равным нулю (как, например, уравнения $2x+2y+3=0$ и $4x+4y+6=0$).



Черт. 54.

Теорема 1. *Если по отношению к произвольной декартовой (вообще говоря, косоугольной) системе координат задана прямая l, то существует только одно уравнение первой степени между x и y*

$$Ax+By+C=0,$$

где A и B не равны нулю одновременно, которое обращается в тождество, если подставить вместо x и y координаты любой точки прямой l. Такое уравнение $Ax+By+C=0$ называется общим уравнением прямой l.

Доказательство. Возьмём на прямой l две произвольные различные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (черт. 54). Пусть $M_0(x_0, y_0)$ —

произвольная точка прямой l, отличная от точек M_1 и M_2, и пусть она делит отрезок M_1M_2 в отношении λ. Тогда

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};$$

отсюда

$$x_0-x_1=\frac{\lambda}{1+\lambda}(x_2-x_1),$$
$$y_0-y_1=\frac{\lambda}{1+\lambda}(y_2-y_1).$$

Умножая первое равенство на y_2-y_1, второе на x_2-x_1 и вычитая из первого равенства второе, получим:

$$(x_0-x_1)(y_2-y_1)-(y_0-y_1)(x_2-x_1)=0.$$

Рассмотрим уравнение

$$(x-x_1)(y_2-y_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)=0, \tag{1}$$

которое получается из предыдущего заменой x_0 и y_0 на x и y. Это уравнение и будет уравнением прямой l, так как оно обращается в тождество, если

1) *вместо x и y подставить x_1 и y_1, т. е. координаты точки M_1* (проверьте!);

2) *вместо x и y подставить x_2 и y_2, т. е. координаты точки M_2* (проверьте!);

3) *вместо x и y подставить x_0 и y_0 — координаты любой точки прямой l, отличной от точек M_1 и M_2*, так как при такой замене мы получим тождество

$$(x_0-x_1)(y_2-y_1)-(y_0-y_1)(x_2-x_1)=0.$$

Кроме того, уравнение (1) есть уравнение первой степени относительно x и y: коэффициенты при x и y в этом уравнении соответственно равны y_2-y_1 и $-(x_2-x_1)$ — они одновременно в нуль не обращаются, так как если бы было $y_2-y_1=0$, $-(x_2-x_1)=0$, то $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ и точки M_1 и M_2 совпадали бы. Перепишем уравнение (1) так:

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+(x_2y_1-x_1y_2)=0 \tag{2}$$

и введём обозначения

$$y_2-y_1=A, \ -(x_2-x_1)=B, \ x_2y_1-x_1y_2=C;$$

получим:

$$Ax+By+C=0, \tag{3}$$

где A и B не равны нулю одновременно.

Итак, мы доказали, что какова бы ни была прямая l, всегда можно составить такое уравнение $Ax+By+C=0$, где A и B не равны нулю одновременно, которое обращается в тождество, если x и y заменить координатами любой точки прямой l.

Остаётся ещё доказать, что другого такого уравнения не существует. Предположим, что такое уравнение существует:

$$A'x + B'y + C' = 0.$$

Так как оба уравнения

$$Ax + By + C = 0 \text{ и } A'x + B'y + C' = 0$$

являются уравнениями одной и той же прямой l, то координаты всех точек прямой l удовлетворяют как уравнению $Ax + By + C = 0$, так и уравнению $A'x + B'y + C' = 0$. Это значит, что система $Ax + By + C = 0$, $A'x + B'y + C' = 0$ имеет бесконечное множество решений, а тогда, как известно из курса элементарной алгебры, оба уравнения совпадают, т. е. их левые части отличаются числовым множителем. Наша теорема доказана полностью.

Следствие. *Уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку* (x_1, y_1), *имеет вид*

$$y_1x - x_1y = 0 \text{ или } Ax + By = 0.$$

Доказательство. Полагая $x_2 = y_2 = 0$ в уравнении $(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y + x_2y_1 - x_1y_2 = 0$, мы и получим уравнение

$$y_1x - x_1y = 0.$$

Замечание. Уравнения $(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y + x_2y_1 - x_1y_2 = 0$ и $y_1x - x_1y = 0$ можно записать и так:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Теорема 2 (*обратная*). *Если задана декартова (вообще говоря, косоугольная) система координат и дано произвольное уравнение первой степени между x и y, т. е. уравнение $Ax + By + C = 0$, где A и B не равны нулю одновременно, то это уравнение есть уравнение вполне определённой прямой.*

Доказательство. Как известно из курса элементарной алгебры, одно уравнение первой степени $Ax + By + C = 0$, где A и B не равны нулю одновременно, имеет бесконечное множество решений. Возьмём какие-нибудь два различных решения: $x = x_1$, $y = y_1$ и $x = x_2$, $y = y_2$; тогда

$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

Построим точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ и проведём через них прямую. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — любая точка этой прямой (отличная от точек M_1 и M_2) и пусть она делит отрезок M_1M_2 в отношении λ; тогда

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Подставляя координаты x_0 и y_0 в левую часть данного уравнения, получим:

$$Ax_0 + By_0 + C = A\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} + B\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} + C = \\ = \frac{Ax_1 + By_1 + C + \lambda(Ax_2 + By_2 + C)}{1+\lambda} = 0.$$

Мы видим, что координаты любой точки, построенной прямой M_1M_2, удовлетворяют данному уравнению $Ax + By + C = 0$, т. е. это уравнение и есть уравнение прямой M_1M_2. Остаётся доказать, что данное уравнение определяет только эту прямую M_1M_2. Для этого достаточно доказать, что если координаты x_0 и y_0 какой-нибудь точки M_0 удовлетворяют данному уравнению $Ax_0 + By_0 + C = 0$, то эта точка лежит на построенной прямой M_1M_2. В самом деле: пусть координаты x_0, y_0 какой-нибудь точки M_0 удовлетворяют данному уравнению, т. е. $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Отсюда и из равенств $Ax_1 + By_1 + C = 0$, $Ax_2 + By_2 + C = 0$ получаем:

$$A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = 0,\\ A(x_2 - x_0) + B(y_2 - y_0) = 0.$$

Предположим, что все числа A, B, $x_0 - x_1$, $y_0 - y_1$, $x_2 - x_0$, $y_2 - y_0$ не равны нулю. Тогда

$$\frac{x_0 - x_1}{y_0 - y_1} = -\frac{B}{A}, \quad \frac{x_2 - x_0}{y_2 - y_0} = -\frac{B}{A},$$

откуда

$$\frac{x_0 - x_1}{y_0 - y_1} = \frac{x_2 - x_0}{y_2 - y_0} \quad \text{или} \quad \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_0}.$$

Обозначая последние равные отношения через λ, найдём:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},$$

и, значит, точка M_0 лежит на прямой M_1M_2.

Предположим теперь, что одно из указанных выше 6 чисел равно нулю. Пусть, например, $A = 0$, тогда $B \neq 0$. Значит, $y_1 = y_2 = y_0 = -\frac{C}{B}$, откуда ясно, что точки M_1, M_2 и M_0 лежат на одной прямой, коллинеарной оси Ox, так как они имеют одинаковые ординаты. Аналогично исследуется случай $B = 0$.

Пусть $A \neq 0$, $B \neq 0$, но, например, $x_0 - x_1 = 0$; тогда $B(y_0 - y_1) = 0$, $y_0 - y_1 = 0$, и, значит, точка M_0 совпадает с M_1. Аналогично исследуются остальные случаи ($y_0 - y_1 = 0$ или $x_2 - x_0 = 0$ или, наконец, $y_2 - y_0 = 0$).

Пример 1. Уравнение прямой, проходящей через точки (3, 5) и (6, 1), имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

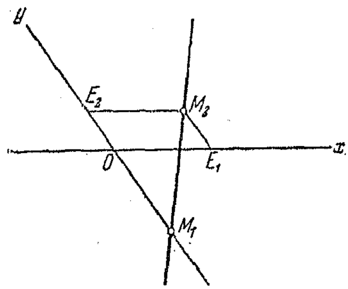
или

$$4x + 3y - 27 = 0.$$

Пример 2. Составим уравнения прямых OE и E_1E_2.

1) Прямая OE проходит через начало координат и точку (1,1); значит её уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } x - y = 0.$$



Черт. 55.

2) Прямая E_1E_2 проходит через точки E_1 (1, 0) и E_2 (0, 1), значит, её уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } x + y - 1 = 0.$$

Пример 3. Построить прямую, заданную уравнением

$$3x - y - 2 = 0.$$

Решение. Дадим ординате y два произвольных значения, например, $y = y_1 = -2$ и $y = y_2 = 1$; тогда из данного уравнения найдём: $x = x_1 = 0$, $x = x_2 = 1$. Строим точки M_1 (0, −2) и M_2 (1, 1) и через них проводим прямую (черт. 55).

Упражнения

44. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку:

1) (3, 5); 2) (−1, 6); 3) (−1, 1).

45. Составить уравнение прямой, проходящей через точки

1) $M_1(3, 5)$ и $M_2(6, 4)$,
2) $M_1(-2, 3)$ и $M_2(0, 1)$,
3) $M_1(3, 5)$ и $M_2(-6, 5)$,
4) $M_1(-4, 1)$ и $M_2(-4, 6)$.

46. Построить прямые, заданные уравнениями

1) $x - 2y + 1 = 0$,
2) $2x + y - 5 = 0$,
3) $x - 4y = 0$,
4) $x - 2 = 0$,
5) $y + 3 = 0$.

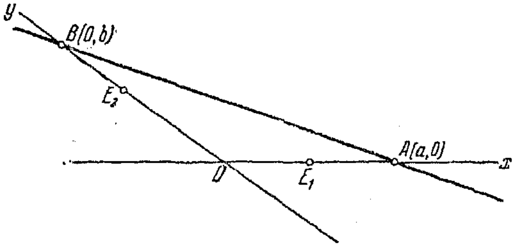
§ 21. Уравнение прямой в отрезках

Рассмотрим прямую l, не проходящую через начало координат и не параллельную ни одной из осей координат. Пусть A и B — точки, в которых эта прямая пересекает оси Ox и Oy, причём a — абсцисса точки A, а b — ордината точки B (черт. 56). Числа a и b часто называются «отрезками», которые данная прямая отсекает на осях координат. Составим уравнение прямой l. Так как координаты точки A таковы: a, 0, а координаты точки B: 0, b, то, применяя уравнение прямой, проходящей через две точки, получим:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$bx + ay - ab = 0.$$



Черт. 56.

Разделив левую часть на ab (и перенося -1 вправо), получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (1)$$

Это уравнение называется уравнением прямой в отрезках.

Пример. Составим уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки -2 и 6.

Имеем:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{6} = 1$$

или

$$3x - y + 6 = 0.$$

Подчёркиваем, что уравнением в отрезках можно задать не любую прямую на плоскости, а лишь прямую, не параллельную осям координат и не проходящую через начало координат.

Замечание. Числа a и b *мы назвали* «отрезками». Это название носит условный характер. В действительности a и b — числа; абсолютная величина числа a есть длина отрезка OA, если за единицу длины принять отрезок OE_1, а абсолютная величина числа b есть длина отрезка OB, если за единицу длины принять отрезок OE_2, но эти единицы, вообще говоря, различны. Например, уравнение прямой E_1E_2 есть $x + y = 1$, т. е. $a = b = 1$, хотя $OA = OE_1 \neq OB = OE_2$. Если масштабные отрезки OE_1 и OE_2 равны, то из равенства $a = b$ будет, конечно, следовать и равенство отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

Упражнение

47. Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки

1) 2 и 3,
2) -3 и 5,
3) 1 и -1.

Построить эти прямые.

§ 22. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Вернёмся к уравнению прямой, проходящей через начало координат и точку $M_1(x_1, y_1)$, отличную от начала координат:

$$y_1x - x_1y = 0.$$

Предположим, что эта прямая отлична от оси Oy, т. е. что точка M_1 не лежит на оси Oy. Тогда $x_1 \neq 0$, и уравнение можно переписать так:

$$y = \frac{y_1}{x_1}x.$$

Обозначим число $\frac{y_1}{x_1}$ буквой k; получим:

$$y = kx. \tag{1}$$

Отношение $\frac{y_1}{x_1} = k$ называется угловым коэффициентом нашей прямой.

Итак, *для того чтобы получить угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат и не совпадающей с осью Oy, надо взять на этой прямой любую точку M_1, не совпадающую с началом координат, и разделить ординату этой точки на её абсциссу.* Угловой коэффициент не зависит от того, какую точку M_1 мы взяли на прямой (лишь бы она не совпадала с началом координат). В самом деле: возьмём на нашей прямой другую точку M_2, также не совпадающую с началом координат. Тогда из уравнения

$$y = kx$$

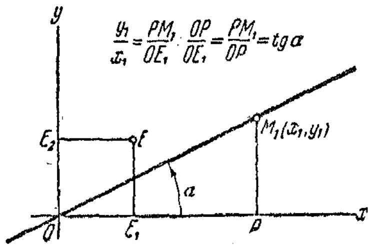
получим:

$$y_2 = kx_2, \quad k = \frac{y_2}{x_2}.$$

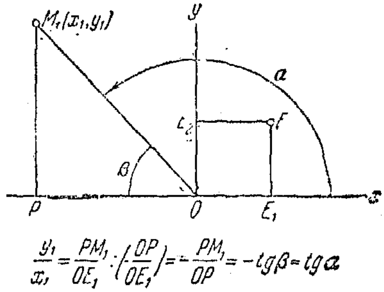
Попытки найти угловой коэффициент самой оси Oy ни к чему не приведут. Действительно, абсцисса x любой точки оси Oy равна нулю; $x_1 = 0$, а для получения k нужно делить y_1 на x_1, т. е. делить на нуль! Отсюда следует, что *угловой коэффициент оси Oy не существует; ось Oy не имеет углового коэффициента.*

Угловой коэффициент прямой в прямоугольной системе координат (как это ясно из черт. 57, 58) *есть тангенс ориентированного угла от оси Ox до данной прямой.*

В косоугольной системе угловой коэффициент k имеет следующий смысл: проведём через точку E_1 прямую LN, параллельную оси Oy, и будем рассматривать точку M пересечения этой прямой с любой прямой, проходящей через начало координат, но не совпадающей



Черт. 57.



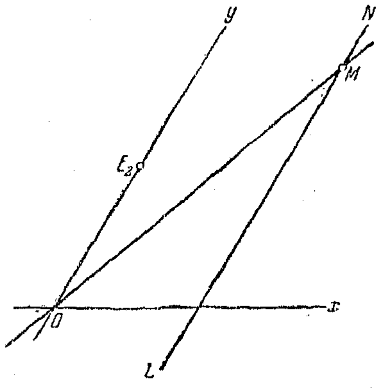
Черт. 58.

с осью Oy (черт. 59). Абсцисса точки пересечения будет равна 1, $x_1=1$, а ордината будет равна y_1. Тогда $k=\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_1}{1}=y_1$, т. е. *угловой коэффициент k прямой равен ординате точки пересечения этой прямой с прямой, проходящей через единичную точку E_1 параллельно оси Oy*. Отсюда ясно, что:

1) *различные прямые, проходящие через начало координат, имеют различные угловые коэффициенты,*

2) *угловой коэффициент прямой принимает все действительные значения.*

Угловой коэффициент иногда называют подъёмом прямой. Указанная интерпретация хорошо поясняет этот термин (k тем больше, чем выше точка M, а эта последняя тем выше, чем круче наклонена к оси Ox прямая, т. е. чем больше её «подъём»).



Черт. 59.

Угловым коэффициентом прямой, не проходящей через начало координат, называется угловой коэффициент прямой, параллельной рассматриваемой, но проходящей через начало координат.

И в этом случае угловой коэффициент в прямоугольной системе координат равен тангенсу ориентированного угла от оси Ox до рассматриваемой прямой (черт. 60).

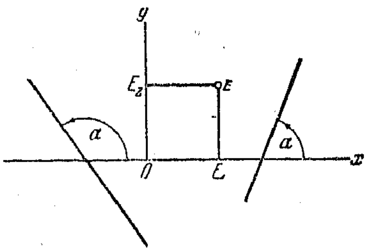
Из сказанного следует, что *все параллельные между собой прямые имеют один и тот же угловой коэффициент, так как все они параллельны одной и той же прямой, проходящей через начало координат.*

Также ясно, что *все прямые, параллельные оси Oy, не имеют углового коэффициента, ибо его не имеет ось Oy.*

Вернёмся к уравнению

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-x_1y_2+x_2y_1=0$$

прямой, проходящей через две точки: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, и предположим, что эта прямая не коллинеарна оси Oy. Рассмотрим уравнение



Черт. 60.

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y=0.$$

Докажем, что это есть уравнение прямой, коллинеарной прямой, определяемой уравнением

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+ \\ +x_1y_2-x_2y_1=0.$$

В самом деле, если $x_1y_2-x_2y_1=0$, то эти уравнения совпадают и потому определяют одну и ту же прямую. Если же $x_1y_2-x_2y_2\neq 0$, то прямые — параллельны.

Действительно, пусть (x_0, y_0) — любая точка прямой

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y=0,$$

т. е.

$$(y_2-y_1)x_0-(x_2-x_1)y_0=0;$$

подставляя координаты этой точки в левую часть уравнения второй прямой, получим:

$$(y_2-y_1)x_0-(x_2-x_1)y_0-x_1y_2+x_2y_1=-x_1y_2+x_2y_1\neq 0;$$

значит, эта точка не лежит на второй прямой. Мы видим, что любая точка M_0, лежащая на первой прямой, не лежит на второй прямой; значит, эти прямые параллельны, так как они не имеют ни одной общей точки.

Далее: прямая $(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y=0$ проходит через начало координат и на ней лежит точка (x_2-x_1, y_2-y_1) (проверьте!), а потому её угловой коэффициент, а вместе с тем и угловой коэффициент начальной прямой, равен

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

т. е. *угловой коэффициент произвольной прямой, не коллинеарной* *оси Oy, равен отношению разности ординат двух любых различных точек этой прямой к разности соответствующих абсцисс этих точек.*

Вернёмся к уравнению

$$(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$$

прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, и предположим, что эта прямая не коллинеарна оси Oy. Тогда $x_1 \neq x_2$, и это уравнение можно переписать так:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

или

$$y-y_1=k(x-x_1), \tag{2}$$

где k — угловой коэффициент. Полученное уравнение есть *уравнение прямой, проходящей через точку (x_1, y_1) и имеющей угловой коэффициент k.*

Пусть прямая не коллинеарна оси Oy и пересекает её в точке $B(0, b)$, иначе говоря, отсекает на оси Oy отрезок b. Пусть k — угловой коэффициент этой прямой; тогда её уравнение имеет вид:

$$y-b=k(x-0)$$

или

$$y=kx+b. \tag{3}$$

Число b, или отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy, часто называют начальной ординатой; уравнение же $y=kx+b$ иногда называют уравнением прямой с начальной ординатой.

Из изложенного следует, что *если прямые коллинеарны (и не коллинеарны оси Oy), то их угловые коэффициенты равны*

$$k_1=k_2,$$

и обратно, если угловые коэффициенты двух прямых равны: $k_1=k_2$, то эти прямые коллинеарны, т. е. равенство угловых коэффициентов двух прямых есть условие (необходимое и достаточное) их коллинеарности.

Упражнения

48. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и имеющей угловой коэффициент

$$1)\ k=3, \quad 2)\ k=-\frac{1}{2}.$$

49. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(2, 5)$ и имеющей угловой коэффициент $k=\frac{1}{3}$.

50. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки: $M_1(3, 7)$ и $M_2(2, -5)$.

§ 23. Некоторые частные случаи

Отметим уравнения некоторых прямых, специально расположенных относительно системы координат.

1. Уравнение оси Ox:

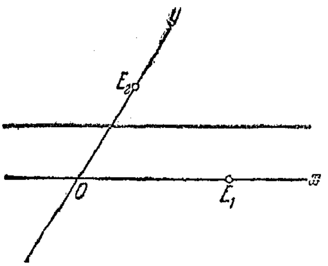
$$y=0,$$

так как ордината y равна нулю для всех точек оси Ox.

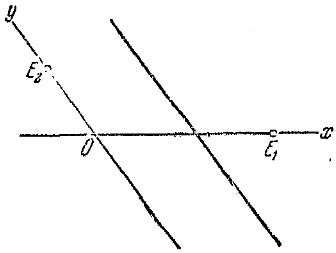
Уравнение прямой, параллельной оси Ox и пересекающей ось Oy в точке $B(0,\ b)$:

$$y=b,$$

так как ординаты всех точек этой прямой равны b (черт. 61).



Черт. 61.



Черт. 62.

Таким образом *в уравнения прямых, коллинеарных оси Ox, входит только y. Уравнение*

$$Ax+By+C=0$$

определяет прямую, коллинеарную оси Ox тогда и только тогда, когда в него не входит x, т. е. когда коэффициент при x равен нулю: $A=0$; тогда это уравнение имеет вид $By+C=0$ или $y=-\frac{C}{B}$, или $y=b$.

2. Уравнение оси Oy:

$$x=0,$$

так как абсцисса x всех точек оси Oy равна нулю.

Уравнение прямой, параллельной оси Oy и пересекающей ось Ox в точке с абсциссой a:

$$x=a,$$

так как абсциссы x всех точек этой прямой равны a (черт. 62).

Таким образом в уравнения прямых, коллинеарных оси Oy, входит только x. Уравнение

$$Ax+By+C=0$$

определяет прямую, коллинеарную оси Oy тогда и только тогда, когда в него не входит y, т. е. когда коэффициент при y равен нулю:

$$B=0.$$

В этом случае мы получим: $Ax+C=0$, $x=-\frac{C}{A}$, $x=a$.

Отметим, что если прямая $Ax+By+C=0$ не коллинеарна оси Oy, т. е. $B\neq 0$, то это уравнение можно разрешить относительно y:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Отсюда мы видим, что угловой коэффициент данной прямой равен

$$k=-\frac{A}{B},$$

а начальная ордината

$$b=-\frac{C}{B}.$$

Например:

$$3x-5y+4=0,$$
$$y=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5},$$
$$k=\frac{3}{5},\quad b=-\frac{4}{5}.$$

3. *Уравнение всякой прямой, проходящей через начало координат, может быть записано так:*

$$Ax+By=0,$$

и обратно: любое уравнение такого вида, где A и B не равны нулю одновременно, определяет прямую линию, проходящую через начало координат. Докажите оба эти положения самостоятельно.

4. Отметим, наконец, уравнения

$$x-y=0,$$
$$x+y=0$$

биссектрис углов декартовой *прямоугольной* системы координат. Эти уравнения мы получим как уравнения прямых, проходящих через начало координат и точки $E(1,1)$ и $E'(-1,1)$. В косоугольной системе эти уравнения не определяют биссектрисы координатных углов. Если же масштабный параллелограмм является ромбом ($OE_1=OE_2$), то в такой косоугольной системе уравнения $x-y=0$ и $x+y=0$ определяют биссектрисы координатных углов.

Упражнения

51. Построить прямые
$$x=2,\ x=-3,\ y=-4,\ y=5.$$

52. Построить прямые
$$3x-2=0,\ 4x+5y=0.$$

53. Найти угловой коэффициент и начальную ординату прямой:
$$1)\ 3x-2y+4=0, \qquad 2)\ 2x+y-3=0.$$

54. При каком условии прямая $Ax+By+C=0$ не проходит через начало координат и пересекает обе оси координат?

55. Найти отрезки, отсекаемые прямой
$$3x-2y+4=0$$
на осях координат.

56. При каком условии прямая $Ax+By+C=0$ не проходит через начало координат?

57. При каком условии прямая $Ax+By+C=0$

1) параллельна оси Ox?
2) параллельна оси Oy?

§ 24. Основные задачи на прямую

В этом параграфе мы рассмотрим три основные задачи на прямую:

1) нахождение точки пересечения двух прямых;
2) нахождение углов между прямыми;
3) нахождение расстояния от точки до прямой.

Задача 1. *Даны две прямые*
$$\left.\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$
в любой декартовой системе координат. При каком условии они пересекаются и каковы координаты точки их пересечения?

Решение. Если данные прямые пересекаются, то они имеют только одну общую точку, значит, система $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ имеет единственное решение $x=x_0$, $y=y_0$, где x_0 и y_0 — координаты точки пересечения. Обратно: если эта система имеет единственное решение $x=x_0$, $y=y_0$, то это геометрически означает, что данные прямые имеют только одну общую точку, т. е. пересекаются. Итак, *данные прямые пересекаются тогда и только тогда, когда система* $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ *имеет единственное решение*, а это будет (как известно из курса элементарной алгебры) при условии
$$A_1B_2-A_2B_1\neq 0$$
или
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0. \qquad (2)$$

Координаты точки пересечения найдём, разрешая систему

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0;$$

$$x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1},$$

$$y=\frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

Эти формулы называются формулами Крамера.

Пример 1. Прямые

$$2x-y+1=0,$$
$$3x+y-6=0$$

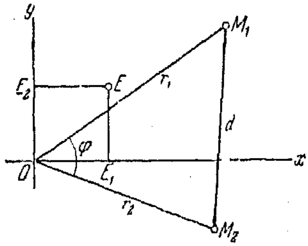
пересекаются, так как

$$A_1B_2-A_2B_1=2\cdot 1-3\cdot(-1)=5\neq 0.$$

Координаты точки их пересечения найдём или по формулам Крамера, или разрешая систему элементарными приёмами:

$$x=1,\quad y=3.$$

Задача 2. *В декартовой прямоугольной системе координат даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, не совпадающие с началом координат. Найти угол между отрезками OM_1 и OM_2, т. е.* $\angle M_1OM_2$ (черт. 63).



Черт. 63.

Решение. Предположим, что точки M_1 и M_2 вместе с точкой O образуют треугольник. Обозначая через d длину стороны M_1M_2, через r_1 и r_2 длины стороны OM_1 и OM_2, а через φ искомый угол, будем иметь:

$$d^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\varphi$$

или

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=$$
$$=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}\cos\varphi,$$

откуда

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}. \tag{3}$$

Отсюда следует, что косинусы углов между двумя прямыми OM_1 и OM_2 определяются по формуле

$$\cos\varphi_{1,2}=\pm\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}, \tag{4}$$

так как косинусы этих углов отличаются лишь знаком (и равны по абсолютной величине). Следствием из этой формулы является условие перпендикулярности прямых OM_1 и OM_2:

$$x_1x_2+y_1y_2=0. \tag{5}$$

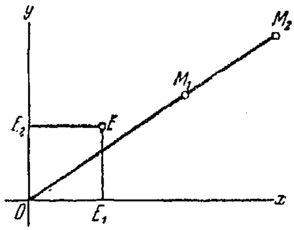
Замечание. Если точки M_1 и M_2 коллинеарны с началом координат O и отрезки OM_1 и OM_2 направлены в одну сторону, то легко показать, что (черт. 64)

$$\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=1,$$

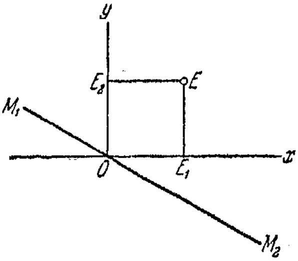
а если они направлены в разные стороны (черт. 65), то

$$\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=-1.$$

Поэтому, считая, что в первом случае угол $\varphi=0$, а во втором



Черт. 64.



Черт. 65.

$\varphi=\pi$, мы можем утверждать, что формула, определяющая косинус угла M_1OM_2, верна всегда.

Пример 2. $M_1(2, 3)$ $M_2(-3, 4)$;

$$\cos\angle M_1OM_2=\frac{2\cdot(-3)+3\cdot 4}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\frac{6}{5\sqrt{13}}.$$

Пример 3. Даны точки $M_1(-3, 5)$, $M_2(6, 4)$. Косинусы углов φ_1 и φ_2 между прямыми OM_1 и OM_2 определятся равенством

$$\cos_{1,2}=\pm\frac{-3\cdot 6+5\cdot 4}{\sqrt{(-3)^2+5^2}\sqrt{6^2+4^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}\sqrt{26}}.$$

Пример 4. Прямые OM_1 и OM_2, проходящие через начало координат, и точки $M_1(-3, 1)$ и $M_2(2, 6)$, взаимно перпендикулярны, так как

$$-3\cdot 2+1\cdot 6=0.$$

Задача 3. *Найти косинусы углов между прямыми, заданными своими уравнениями*

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат.

Решение. Прежде всего заметим, что отбрасывание свободного члена в уравнении прямой

$$Ax + By + C = 0$$

приводит к уравнению

$$Ax + By = 0,$$

которое определяет прямую, коллинеарную рассматриваемой. Определитель системы

$$Ax + By + C = 0, \quad Ax + By = 0$$

равен нулю:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A & B \end{vmatrix} = 0;$$

отсюда следует, что система или несовместна, т. е. данные прямые параллельны, или эта система неопределённа, т. е. указанные прямые совпадают.

Нам даны прямые, определяемые уравнениями

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0.$$

На основании только что высказанного соображения, уравнения

$$Ax + By = 0,$$
$$A'x + B'y = 0$$

определяют прямые, соответственно коллинеарные данным прямым, но проходящие через начало координат. Возьмём на прямой $Ax + By = 0$ произвольную точку (x_0, y_0), отличную от начала координат. Координаты этой точки удовлетворяют уравнению $Ax + By = 0$, т. е. $Ax_0 + By_0 = 0$.

Если соединить начало координат с точкой (x_0, y_0), лежащей на данной прямой, и с точкой (A, B), то в силу соотношения $Ax_0 + By_0 = 0$ полученные отрезки будут перпендикулярны (см. выше условие перпендикулярности). Итак, *отрезок, соединяющий начало координат с точкой* (A, B), *перпендикулярен к прямой* $Ax + By = 0$. Рассмотрим отрезки, соединяющие начало координат с точками $T(A, B)$ и $T'(A', B')$. Эти отрезки перпендикулярны к данным прямым, а потому косинусы углов между данными прямыми равны косинусам углов между прямыми OT и OT'. На основании формулы, определяющей косинус угла между двумя прямыми, находим:

$$\cos\varphi_{1,2}=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\,; \tag{6}$$

отсюда

$$\sin\varphi_{1,2}=\sqrt{1-\cos^2\varphi_{1,2}}=\sqrt{1-\frac{(A_1A_2+B_1B_2)^2}{(A_1^2+B_1^2)(A_2^2+B_2^2)}}=$$

$$=\frac{|A_1B_2-A_2B_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\,. \tag{7}$$

Из формулы (6) получаем условие перпендикулярности прямых

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \tag{8}$$

Если данные прямые не *коллинеарны оси* Oy, то последнее равенство можно переписать и так:

$$1+\frac{A_1}{B_1}\cdot\frac{A_2}{B_2}=0,$$

или:

$$1+\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\cdot\left(-\frac{A_2}{B_2}\right)=0,$$

где $-\frac{A_1}{B_1}$ и $-\frac{A_2}{B_2}$ — угловые коэффициенты данных прямых.

Значит,

$$1+k_1k_2=0 \quad\text{или}\quad k_2=-\frac{1}{k_1}\,. \tag{9}$$

Подчёркиваем, что это условие перпендикулярности прямых, имеющих угловые коэффициенты k_1 и k_2, верно лишь для прямых, не коллинеарных оси Oy.

Если прямые не перпендикулярны, т. е. если $A_1A_2+B_1B_2\neq 0$, то из формул для $\cos\varphi_{1,2}$ и $\sin\varphi_{1,2}$ можно найти ещё $\operatorname{tg}\varphi_{1,2}$:

$$\operatorname{tg}\varphi_{1,2}=\pm\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\,.$$

Предположим, что прямые н е к о л л и н е а р н ы оси Oy, т. е. $B_1\neq 0$ и $B_2\neq 0$, и что они не взаимно перпендикулярны. Тогда последнюю формулу можно переписать так:

$$\operatorname{tg}\varphi_{1,2}=\pm\frac{\frac{A_1}{B_1}-\frac{A_2}{B_2}}{1+\frac{A_1}{B_1}\cdot\frac{A_2}{B_2}}=\pm\frac{-\frac{A_2}{B_2}-\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)}{1+\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\cdot\left(-\frac{A^2}{B_2}\right)}\,,$$

где $-\frac{A_1}{B_1}$ и $-\frac{A_2}{B_2}$ — угловые коэффициенты данных прямых; значит, тангенсы углов φ_1 и φ_2 двух невзаимно перпендикулярных прямых, не коллинеарных оси Oy, определяются соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi_{1,2}=\pm\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (10)$$

Пример 5. Косинусы углов между прямыми

$$x+2y-4=0,$$
$$3x+5y+3=0$$

определятся равенством

$$\cos\varphi_{1,2}=\pm\frac{1\cdot 3+2\cdot 5}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{3^2+5^2}}=\pm\frac{13}{\sqrt{5}\sqrt{34}}.$$

Пример 6. Тангенсы углов прямых, угловые коэффициенты которых равны $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{3}$, определятся равенством

$$\operatorname{tg}\varphi_{1,2}=\pm\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\pm 1.$$

Сами углы:

$$\varphi_1=45^\circ,\quad \varphi_2=135^\circ.$$

Пример 7. Прямые

$$3x+4y-2=0,\quad 4x-3y+6=0$$

взаимно перпендикулярны, так как

$$3\cdot 4+4\cdot(-3)=0.$$

Задача 4. *Дана точка $M_0(x_0, y_0)$* и *прямая $Ax+By+C=0$ относительно декартовой прямоугольной системы координат. Найти расстояние d от данной точки до данной прямой.*

Решение. Рассмотрим уравнение

$$B(x-x_0)-A(y-y_0)=0;$$

прямая, определяемая этим уравнением, проходит через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ (почему?) и перпендикулярна к данной прямой, так как

$$A\cdot B+B\cdot(-A)=0$$

(черт. 66). Решая систему

$$Ax+By+C=0,$$
$$B(x-x_0)-A(y-y_0)=0,$$

мы найдём координаты точки P пересечения данной прямой с прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной прямой:

$$x=x_0-\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}B,\quad y=y_0+\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}A.$$

Искомое расстояние d будет равно расстоянию между точками M_0 и P:

$$d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=$$

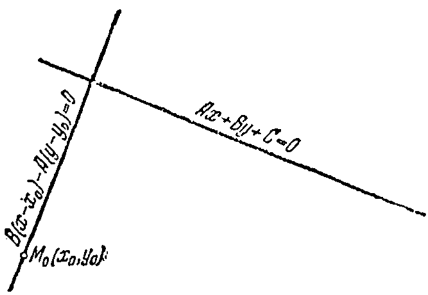
$$=\sqrt{\left(-\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}B\right)^2+\left(\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}A\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

отсюда *правило*: *расстояние* d *от точки* $M_0(x_0, y_0)$ *до прямой, определяемой уравнением*

$$Ax+By+C=0,$$

равно дроби, числитель которой равен абсолютной величине результата подстановки в левую часть уравнения прямой x_0 *и* y_0 *вместо* x *и* y, *а знаменатель равен квадратному корню из суммы квадратов коэффициентов при* x *и* y.



Черт. 66.

Пример. 8. Расстояние от точки $M(2, 5)$ до прямой $3x+2y-25=0$ равно:

$$d=\frac{|3\cdot 2+2\cdot 5-25|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{9}{\sqrt{13}}.$$

Упражнения

58. Найти расстояние от точек $M_1(-2, 3)$, $M_2(1, 0)$ до прямой

$$3x+y-2=0.$$

59. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(1, 3)$ параллельно прямой

$$4x-2y+5=0.$$

60. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат, перпендикулярно к данной прямой

$$2x+2y-1=0.$$

61. Составить уравнение прямых, проходящих через точку $(2, 3)$ и наклонённых к прямой $7x+y-2=0$ под углом 45°.

62. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $4x+y-2=0$ и отстоящих от неё на расстоянии $\sqrt{17}$.

63. На расстоянии $\sqrt{10}$ от точки $(3, 5)$ под углом 45° к прямой $2x-y=0$ проведены четыре прямые. Составить их уравнения.

64. Найти высоты треугольника, вершины которого

$$M_1(3, 5),\ M_2(-1, 0),\ M_3(4, 3).$$

§ 25. Ориентированное расстояние от точки до прямой

Выше было доказано, что уравнение

$$Ax + By + C = 0$$

прямой линии не обращается в равенство, если в него подставить координаты любой точки (x_0, y_0), не лежащей на этой прямой:

$$Ax_0 + By_0 + C \neq 0.$$

Докажем, что

$$Ax_0 + By_0 + C > 0$$

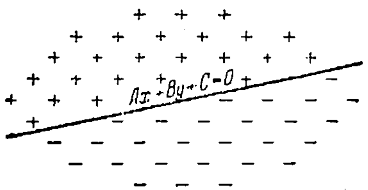
для всех точек $M_0(x_0, y_0)$, *лежащих по одну сторону от данной прямой, и*

$$Ax_0 + By_0 + C < 0$$

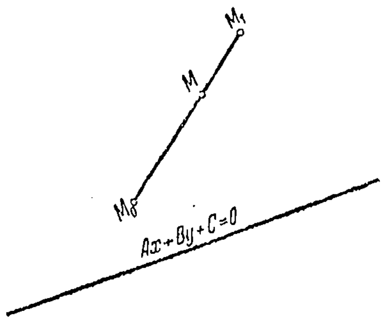
для всех точек $M_0(x_0, y_0)$, *лежащих по другую сторону от данной прямой* (черт. 67).

Для доказательства возьмём две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, лежащие по одну сторону от данной прямой (черт. 68), и докажем, что числа

$Ax_0 + By_0 + C$ и $Ax_1 + By_1 + C$ одного знака. Предположим противное, т. е. что эти числа разных



Черт. 67.



Черт. 68.

знаков. Рассмотрим какую-нибудь точку $M(x, y)$, делящую отрезок M_0M_1 в отношении λ; тогда

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}.$$

Докажем, что λ можно подобрать так, что эта точка окажется на данной прямой. Для этого надо, чтобы

$$A\frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda} + B\frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda} + C = 0,$$

откуда

$$\lambda = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{Ax_1 + By_1 + C}.$$

Так как числа Ax_0+By_0+C и Ax_1+By_1+C, по предположению, разных знаков, то $\lambda>0$ и, значит, точка M, лежащая на нашей прямой, лежит между точками M_0 и M_1. Это противоречиво, так как точки M_0 и M_1 лежат по одну сторону от данной прямой и между ними нет ни одной точки, лежащей на прямой.

Остаётся ещё доказать, что если точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ лежат по разные стороны от данной прямой, то числа Ax_0+By_0+C и Ax_1+By_1+C будут разных знаков.

Опять будем вести доказательства от противного: предположим, что эти числа одного знака; рассмотрим любую точку M, лежащую между точками M_0 и M_1, и пусть λ — отношение, в котором эта точка делит отрезок M_0M_1; тогда $\lambda>0$ и

$$x=\frac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_0+\lambda y_1}{1+\lambda}.$$

Подставим эти координаты в левую часть нашего уравнения; получим:

$$A\frac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda}+B\frac{y_0+\lambda y_1}{1+\lambda}+C=\frac{Ax_0+By_0+C+\lambda(Ax_1+By_1+C)}{1+\lambda};$$

это число не равно нулю, так как числа Ax_0+By_0+C и Ax_1+By_1+C одного знака, а λ — положительно. Геометрически это означает, что ни одна из точек, лежащих между точками M_0 и M_1, не лежит на нашей прямой, а это противоречиво, так как точки M_0 и M_1 лежат по разные стороны от данной прямой и, значит, между ними есть точка, лежащая на прямой.

Будем называть положительной полуплоскостью ту, для координат точек которой $Ax+By+C>0$, а отрицательной ту, для координат точек которой $Ax+By+C<0$. Эти понятия условны в том смысле, что при изменении знака в левой части уравнения $Ax+By+C=0$ положительная полуплоскость становится отрицательной, а отрицательная полуплоскость становится положительной. При этом, конечно, уравнения

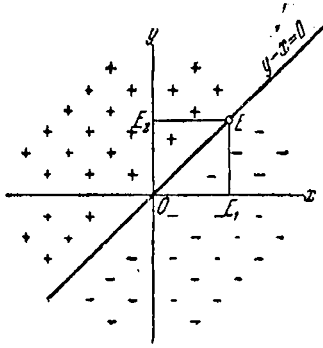
$$Ax+By+C=0 \quad \text{и} \quad -Ax-By-C=0$$

определяют одну и ту же прямую; это означает, что граница между положительной и отрицательной полуплоскостями сохраняется. Возьмём, например, для простоты декартову прямоугольную систему и уравнение биссектрисы углов 1-й и 3-й четвертей в виде $y-x=0$; тогда положительной будет верхняя полуплоскость от этой прямой, ибо для точек этой полуплоскости ордината y больше абсциссы и, значит, $y-x>0$ (черт. 69); отрицательной полуплоскостью будет нижняя. Если же уравнение той же биссектрисы мы возьмём в виде $x-y=0$, то положительной будет уже нижняя полуплоскость, а отрицательной — верхняя (черт. 70).

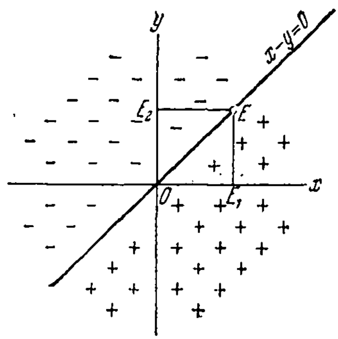
Таким образом *положительная и отрицательная полуплоскости определены только тогда, когда прямая определена уравнением*

$$Ax+By+C=0.$$

Будем расстоянию от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax+By+C=0$ приписывать знак, считая *расстояние положительным, если точка* (x_0, y_0) *лежит в положительной полуплоскости, и считая его отрицательным, если точка* (x_0, y_0) *лежит в отрицательной полуплоскости. Такое расстояние мы будем называть ориентированным.*



Черт. 69.



Черт. 70.

В § 24 мы получили формулу

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

определяющую расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$; на основании только что введённого определения ориентированное расстояние δ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ равно

$$\delta=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

так как знак δ, по определению, совпадает со знаком числа Ax_0+By_0+C.

Ориентированное расстояние меняет знак, если мы переменим знаки в левой части уравнения $Ax+By+C=0$.

З а м е ч а н и е. Мы видим, что одно неравенство между x и y первой степени, т. е. неравенство вида

$$Ax+By+C>0$$

(или $Ax+By+C<0$), где A и B не равны нулю одновременно, имеет бесконечное множество решений.

Если построить точки (x_0, y_0), соответствующие всем решениям неравенства

$$Ax + By + C > 0$$

(или $Ax + By + C < 0$), то эти точки заполнят полуплоскость, границей которой является прямая, определяемая уравнением

$$Ax + By + C = 0.$$

Такова геометрическая интерпретация решения одного неравенства первой степени с двумя «неизвестными» x и y.

Понятие о положительной и отрицательной полуплоскостях позволяет в аналитической геометрии определять взаимное расположение точек и прямых.

Пример 1. Ориентированное расстояние от точки (3, 5) до прямой $x - 3y + 1 = 0$ равно:

$$\delta = \frac{3 - 15 + 1}{\sqrt{10}} = -\frac{11}{\sqrt{10}}.$$

Пример 2. Точки (3, 1) и (2, 5) лежат по разные стороны от прямой $x - 2y = 0$, *так как*

$$3 - 2 \cdot 1 = 1 > 0, \text{ а } 2 - 2 \cdot 5 = -8 < 0.$$

Упражнения

65. Найти ориентированное расстояние от точки (3, 0) до прямой $x - 4y + 7 = 0$.

66. Найти ориентированное расстояние от точки (—1, 2) до прямой $4x + y = 0$.

67. Составить уравнения биссектрис углов между двумя прямыми

$$x + y - 2 = 0, \quad 7x - y + 4 = 0.$$

68. Составить уравнение прямой, отстоящей от прямой $3x + y - 4 = 0$ на расстоянии $\sqrt{10}$.

ГЛАВА IV

ОКРУЖНОСТЬ

§ 26. Нормальное уравнение окружности

Рассмотрим окружность радиуса a, центр которой совпадает с началом декартовой прямоугольной системы координат (черт. 71). Квадрат расстояния любой точки $M(x, y)$ окружности до её центра (или до начала координат) равен x^2+y^2 или a^2 (так как радиус окружности равен a). Значит,

$$x^2+y^2=a^2 \tag{1}$$

или

$$x^2+y^2-a^2=0. \tag{2}$$

Если мы возьмём точку $M(x, y)$ вне окружности (черт. 71), то квадрат её расстояния до центра окружности больше квадрата радиуса:

$$x^2+y^2>a^2 \tag{3}$$

или

$$x^2+y^2-a^2>0, \tag{4}$$

а если возьмём точку $M(x, y)$ внутри окружности, то квадрат её расстояния до центра окружности меньше квадрата радиуса:

$$x^2+y^2<a^2 \tag{5}$$

или

$$x^2+y^2-a^2<0. \tag{6}$$

Таким образом уравнение $x^2+y^2=a^2$ или $x^2+y^2-a^2=0$ удовлетворяется только координатами точек окружности радиуса a с центром в начале координат, и поэтому оно называется уравнением (нормальным) этой окружности.

Совершенно такими же рассуждениями, пользуясь формулой, определяющей расстояние между двумя точками, легко устанавливается, что уравнению

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2 \tag{7}$$

или

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-a^2=0 \tag{8}$$

удовлетворяют координаты x, y любой точки окружности радиуса a с центром в точке $C(\alpha, \beta)$ (черт. 72) и что для координат любой точки, лежащей вне этой окружности, будем иметь:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2>a^2 \tag{9}$$

или

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-a^2>0, \tag{10}$$

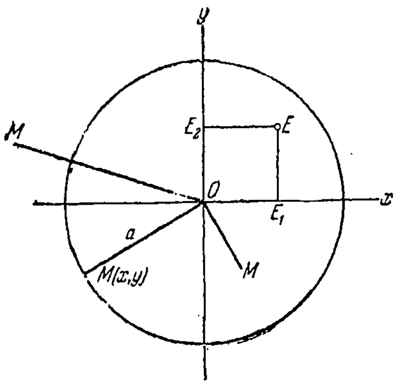
а для координат x, y любой точки, лежащей внутри этой окружности, будем иметь:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2<a^2 \tag{11}$$

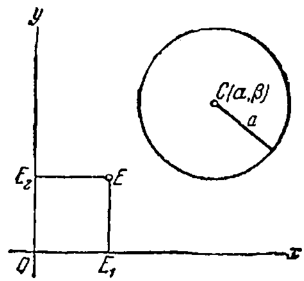
или

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-a^2<0. \tag{12}$$

Уравнение $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-a^2=0$ мы будем называть **нормальным** уравнением окружности.



Черт. 71.



Черт. 72.

Пример 1. Уравнение окружности радиуса $a=3$ с центром в начале координат:

$$x^2+y^2=9.$$

Пример 2. Уравнение окружности радиуса $a=4$ с центром в точке $C(-3, 1)$:

$$(x+3)^2+(y-1)^2=16$$

или

$$x^2+y^2+6x-2y-6=0.$$

Упражнения

69. Составить уравнение окружности радиуса $a=1$ с центром в начале координат.

70. Составить уравнение окружности радиуса $a=3$ с центром в точке $C(-5, -6)$.

71. Составить уравнение окружности, проходящей через начало координат, центр которой лежит в точке $C(-5, 1)$.

72. Составить уравнение окружности с центром в точке $C(-5, 6)$ и касающейся оси Oy.

73. Составить уравнение окружности, центр которой лежит на оси Ox и которая касается оси Oy.

74. Составить уравнение окружности, центр которой лежит на оси Oy и которая касается оси Ox.

75. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, вершины которого $A(3, 1)$, $B(-2, 1)$, $C(0, 3)$.

76. Доказать, что уравнение всякой окружности может быть записано в виде: $x^2+y^2+Ax+By+C=0$.

Верно ли обратное положение?

77. Доказать, что следующие уравнения:

$$1)\ x^2+y^2+2x+4y=0,$$
$$2)\ 2x^2+2y^2+3x+7y-8=0,$$

определяют окружности. Найти их центры и радиусы.

78. Составить уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=25$ в точке $(-3, 4)$, лежащей на ней.

79. Составить уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=a^2$ в точке (x_0, y_0), лежащей на ней.

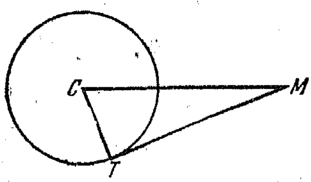
80. Составить уравнения касательных, проведённых из точки $(3, 5)$ к окружности $x^2+y^2=9$.

§ 27. Степень точки относительно окружности. Радикальная ось двух окружностей и радикальный центр трёх окружностей

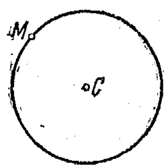
В ряде вопросов элементарной геометрии, связанных с окружностью, применяется понятие степени точки относительно окружности.

Определение. *Степенью точки M относительно окружности S называется число σ, которое определяется так:*

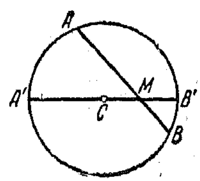
I. *Если точка M лежит вне окружности S, то её степень относительно окружности равна квадрату длины отрезка MT касательной,*



Черт. 73.



Черт. 74.



Черт. 75.

проведённой из точки M к окружности S, или произведению длины любой секущей к окружности, проходящей через точку M, на её внешнюю часть (черт. 73).

II. *Если точка M лежит на окружности, то степень её относительно этой окружности считается равной нулю* (черт. 74).

III. *Если точка M лежит внутри окружности, то степень её относительно окружности считается отрицательной и по абсолютной величине, равной произведению длин отрезков MA и MB любой хорды окружности, проходящей через точку M* (черт. 75).

В аналитической геометрии *степень точки относительно окружности, заданной нормальным уравнением*

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-a^2=0, \qquad (1)$$

определяется всегда одной и той же формулой

$$\sigma=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-a^2, \qquad (2)$$

независимо от того, где лежит точка M: вне окружности, на окружности или внутри окружности.

Доказательство.

I. Пусть точка $M(x, y)$ лежит вне окружности радиуса a с центром в точке $C(\alpha, \beta)$; тогда $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$ равно квадрату длины отрезка MC, а значит $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-a^2$, по теореме Пифагора, равно квадрату длины отрезка MT касательной, проведённой из точки M к окружности (черт. 73). Итак,

$$\sigma=MT^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-a^2.$$

II. Пусть точка M лежит на данной окружности; тогда $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-a^2=0$, но и степень σ точки M относительно данной окружности равна нулю (по определению); значит,

$$\sigma=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-a^2.$$

III. Пусть, наконец, точка M лежит внутри данной окружности. Тогда $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=MC^2$ и, значит,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-a^2=MC^2-a^2=(MC+a)(MC-a)=$$
$$=-(MC+a)(a-MC)=-MA'\cdot MB'=-MA\cdot MB;$$

но это и есть степень точки M относительно данной окружности.

Радикальная ось. *Радикальной осью двух окружностей, имеющих разные центры, называется множество точек, степени которых относительно данных окружностей равны.*

Если окружности заданы своими нормальными уравнениями

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-a^2=0,$$
$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2-a'^2=0,$$

то, на основании этого определения, уравнение их радикальной оси будет:

$$\sigma=\sigma'$$

или

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-a^2=(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2-a'^2,$$

или

$$2(\alpha'-\alpha)x+2(\beta'-\beta)y+\alpha^2+\beta^2-a^2-\alpha'^2-\beta'^2+a'^2=0;$$

это уравнение первой степени, значит, оно определяет прямую, т. е. *радикальная ось двух неконцентрических *) окружностей есть прямая линия.*

Уравнение прямой CC', соединяющей центры данных окружностей, есть:

$$(\beta'-\beta)x-(\alpha'-\alpha)y+\alpha'\beta-\alpha\beta'=0;$$

отсюда и из уравнения радикальной оси видно, что радикальная ось двух

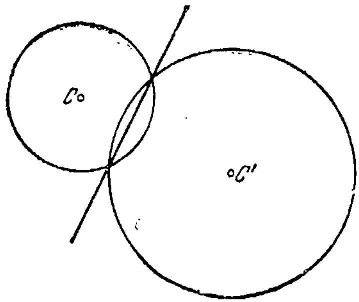
*) Если окружности концентричны, то $\alpha'-\alpha=0$, $\beta'-\beta=0$, и уравнение $2(\alpha'-\alpha)x+2(\beta'-\beta)y+\alpha^2+\beta^2-a^2-\alpha'^2-\beta'^2+a'^2=0$ либо не имеет решений, либо обращается в тождество. Геометрически это означает, что собственно концентрические окружности не имеют радикальной оси, а совпадающие окружности имеют в качестве радикальной оси всю плоскость. Вот почему обычно не вводят понятия радикальной оси для концентрических или совпадающих окружностей.

неконцентрических окружностей перпендикулярна к прямой, соединяющей их центры, так как выполняется условие перпендикулярности этих прямых.

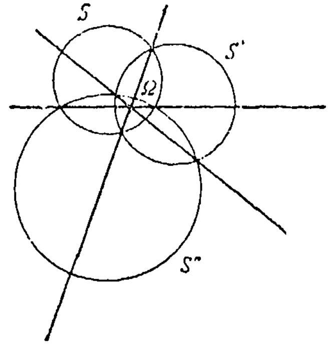
$$2(\alpha'-\alpha)(\beta'-\beta)+2(\beta'-\beta)[-(\alpha'-\alpha)]=0.$$

Если две окружности пересекаются, то радикальная ось проходит через точки их пересечения, так как степени этих точек относительно обеих окружностей равны нулю (черт. 76).

Радикальный центр. Рассмотрим три окружности, центры которых не коллинеарны. Тогда радикальные оси этих окружностей, взятых по-

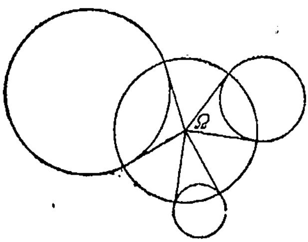


Черт. 76.

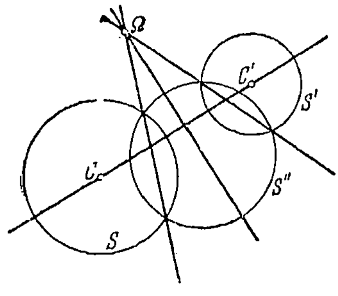


Черт. 77.

парно, будут пересекаться, так как они будут перпендикулярны к сторонам треугольника, вершинами которого служат центры данных окружностей. Докажем, что все эти три радикальные оси будут иметь одну и только одну



Черт. 78.



Черт. 79.

общую точку. Для этого рассмотрим: уравнение $\sigma=\sigma'$ радикальной оси окружностей S и S'; уравнение $\sigma'=\sigma''$ радикальной оси окружностей S' и S''.

Эти радикальные оси пересекаются. Пусть Ω — точка их пересечения. Координаты точки Ω удовлетворяют обоим уравнениям $\sigma=\sigma'$ и $\sigma'=\sigma''$ радикальных осей, значит эти координаты удовлетворяют и уравнению $\sigma=\sigma''$. Но это последнее уравнение есть уравнение радикальной оси окружностей S и S''. Значит точка Ω лежит и на этой последней радикальной оси (черт. 77). Точка Ω, через которую проходят все три радикальные оси окружностей, взятых попарно, называется их радикальным центром.

Ясно, что если радикальный центр лежит внутри одной из окружностей (т. е. степень его относительно этой окружности отрицательна), то он лежит и внутри двух других, а если он лежит вне какой-нибудь одной окружности, то он лежит и вне двух других; в последнем случае отрезки касательных, проведённых из радикального центра к окружностям, равны. Если таким отрезком описать окружность, центр которой совпадает с радикальным центром окружностей, то такая окружность пересечёт все три данные окружности под прямыми углами (черт. 78). Отметим в заключение построение радикальной оси двух непересекающихся окружностей S и S' (черт. 79): строим окружность S'', которая пересекает обе данные окружности, находим радикальный центр Ω окружностей S, S', S'' и из него опускаем перпендикуляр на прямую CC', соединяющую центры данных окружностей S и S'.

§ 28. Составление уравнений линий

В предыдущих параграфах мы познакомились с уравнением прямой линии и окружности. В аналитической геометрии любую линию принято определять уравнением между x и y:

$$F(x, y) = 0,$$

которое удовлетворяется координатами любой точки рассматриваемой линии и только такими координатами. Уравнение $F(x, y) = 0$ называется уравнением рассматриваемой линии.

Пример 1. Составить уравнение множества точек, каждая из которых равноудалена от двух данных точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Решение. По условию задачи имеем:

$$MM_1 = MM_2 \quad \text{или} \quad MM_1^2 = MM_2^2,$$

где $M(x, y)$ — любая точка заданного множества. На основании формулы, определяющей расстояние между двумя точками, имеем:

$$MM_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2,$$
$$MM_2^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2,$$

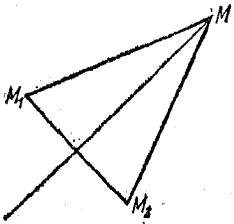
и равенство $MM_1^2 = MM_2^2$ принимает вид:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

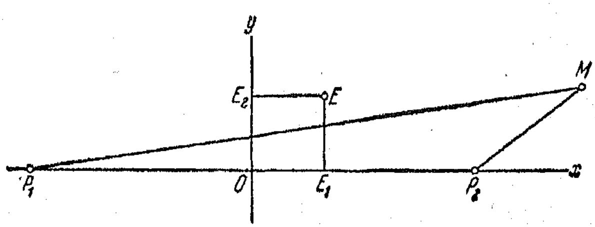
или

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0.$$

Мы получили уравнение первой степени между x и y. Это уравнение определяет прямую. Значит, заданное множество точек есть прямая линия, что, впрочем, ясно



Черт. 80.



Черт. 81.

и из элементарно-геометрических соображений: заданное множество точек есть перпендикуляр, восстановленный к отрезку M_1M_2 в его середине (черт. 80).

Пример 2. Составить уравнение линии, отношение расстояний каждой точки которой до двух данных точек равно одному и тому же числу m.

Решение. Примем прямую, на которой расположены две данные точки P_1 и P_2, за ось Ox, а начало прямоугольной системы координат расположим в середине отрезка P_1P_2 (черт. 81). Пусть $-a$ и a — соответственно абсциссы точек P_1 и P_2, а $M(x, y)$ — любая точка заданной линии.

По условию задачи

$$\frac{MP_1}{MP_2} = m \quad \text{или} \quad \frac{MP_1^2}{MP_2^2} = m^2$$

или

$$\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = m^2,$$

откуда

$$(1-m^2)x^2 + (1-m^2)y^2 + 2a(1+m^2)x + a^2(1-m^2) = 0.$$

Если $m = 1$, то уравнение принимает вид $x = 0$ и определяет ось Oy (см. предыдущий пример). Если $m \neq 1$, то последнее уравнение можно преобразовать так:

$$x^2 + y^2 + 2a\frac{1+m^2}{1-m^2}x + a^2 = 0$$

или

$$\left(x + a\frac{1+m^2}{1-m^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2am}{1-m^2}\right)^2.$$

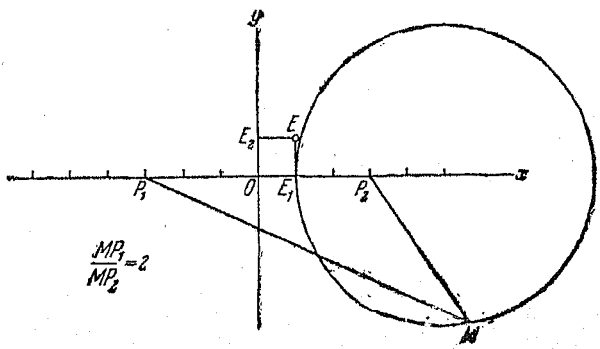
Это уравнение определяет окружность (аполлониева окружность) радиуса

$$R = \left|\frac{2am}{1-m^2}\right|$$

с центром в точке

$$C\left(-a\frac{1+m^2}{1-m^2},\ 0\right).$$

Если, например, $m = 2$, $a = 3$, то радиус R окружности равен 4, а центр находится в точке (5, 0) (черт. 82).



Черт. 82.

Пример 3. Составить уравнение линии, произведение расстояний любой точки которой до двух данных точек есть число λ^2 — одно и то же из всех точек линии.

Решение. Располагая оси координат так же, как и в предыдущем примере, найдём

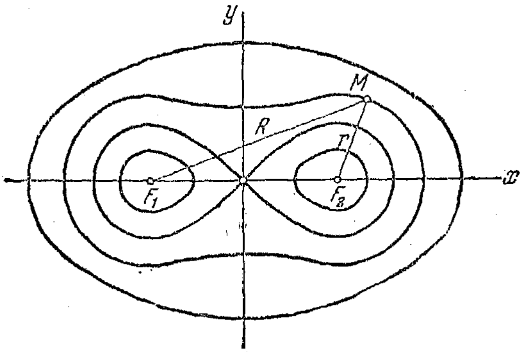
$$MP_1 \cdot MP_2 = \lambda^2 \quad \text{или} \quad MP_1^2 \cdot MP_2^2 = \lambda^4,$$

или

$$[(x+a)^2+y^2]\,[(x-a)^2+y^2]=\lambda^4,$$
$$(x^2+y^2+a^2+2ax)(x^2+y^2+a^2-2ax)=\lambda^4,$$
$$(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2=\lambda^4,$$
$$(x^2+y^2)^2+2a^2(x^2+y^2)+a^4-4a^2x^2=\lambda^4,$$
$$(x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)=\lambda^4-a^4.$$

Линии, определяемые этим уравнением, называются овалами Кассини. Их графики (для различных значений λ и a) изображены на черт. 83. Если $\lambda = a$, то овал Кассини называется лемнискатой Бернулли; эта последняя имеет вид «восьмёрки»; её уравнение:

$$(x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)=0.$$



Черт. 83.

Уравнения линий иногда удобно составлять в полярной системе координат. Рассмотрим следующий пример.

Пример 4. Трубка вращается около точки O с постоянной угловой скоростью Ω. Внутри трубки движется шарик M с постоянной скоростью v, который в начальный момент находился в точке O. Составить уравнение линии, которую описывает шарик.

Решение. В силу условий задачи полярные координаты r и φ шарика в момент t:

$$r = vt, \quad \varphi = \Omega t;$$

отсюда

$$r = \frac{v}{\Omega}\varphi$$

или

$$r = a\varphi,$$

где

$$a = \frac{v}{\Omega}.$$

Данная линия называется спиралью Архимеда (черт. 84).

В целом ряде случаев линию удобно определять, выражая координаты x и y любой точки, принадлежащей этой линии, через некоторый вспомогательный аргумент, называемый параметром, причём должно быть указано множество значений параметра t, т. е. те значения t, при которых выражения x и y через t будут равны координатам точек заданного геометрического места. Упомянутые уравнения называются параметрическими уравнениями заданной линии.

Пример 5. По прямой l без трения и скольжения катится окружность радиуса r. Определить уравнение линии, которую описывает произвольная точка катящейся окружности (циклоида).

Решение. Составим уравнение линии, которую описывает точка окружности, находящаяся в начальный момент в точке O.

Обозначим угол MCQ (черт. 85), на который повернулась окружность (считая от начального её положения), через t и заметим, что в силу условия задачи (окружность катится без трения и скольжения) мы будем иметь: $OS = \breve{SM}$. Теперь легко находим координаты точки M циклоиды:

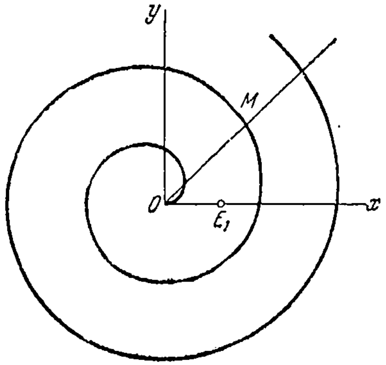
$$x = OP = OS - PS = \breve{MS} - MQ = rt - r\sin t = r(t - \sin t),$$
$$y = MP = SQ = CS - CQ = r - r\cos t = r(1 - \cos t).$$

В этих уравнениях параметр t принимает все действительные значения. Полученные уравнения

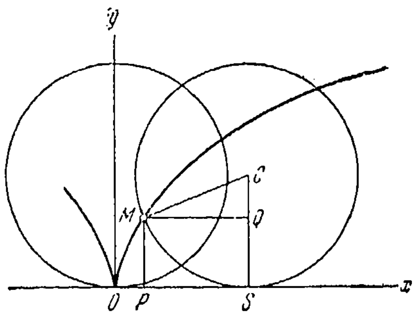
$$x = r\ (t - \sin t), \quad y = r\ (1 - \cos t)$$

называются параметрическими уравнениями циклоиды.

Пример 6. Составить параметрические уравнения прямой линии.



Черт. 84.



Черт. 85.

Возьмём на любой прямой l две произвольные, но различные точки

$$M_0(x_0, y_0), \quad M_1(x_1, y_1),$$

и введём на прямой l декартову систему координат, принимая M_0 за начало координат, а M_1 за единичную точку. Тогда координата t любой точки M прямой будет определяться равенством

$$t = -(MM_0M_1) \text{ или } (MM_0M_1) = -t;$$

таким образом точка M_0 делит отрезок MM_1 в отношении $\lambda = -t$ и, следовательно,

$$x_0 = \frac{x - tx_1}{1 - t}, \quad y_0 = \frac{y - ty_1}{1 - t},$$

откуда

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + t(y_1 - y_0);$$

здесь t принимает все действительные значения. Полученные уравнения и называются параметрическими уравнениями прямой линии (проходящей через точки M_0 и M_1). Параметрические уравнения линий во многих вопросах удобнее уравнения вида

$$F(x, y) = 0.$$

Параметрическими уравнениями часто пользуются, например, в механике (кинематике), где за параметр обычно принимают время, а также и в других разделах математики.

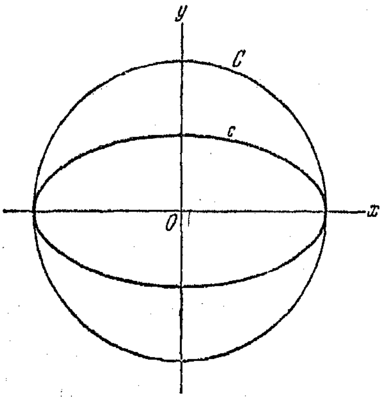
ГЛАВА V

ЭЛЛИПС

§ 29. Определение эллипса

Пусть C — произвольная окружность. Сожмём (или растянем) плоскость к какому-нибудь диаметру этой окружности. При этом сжатии окружность C перейдёт («сожмётся» или «растянется») в линию c, которая называется эллипсом.

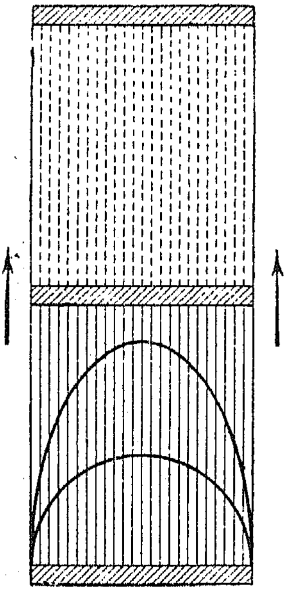
Определение. *Эллипсом называется линия, получаемая сжатием окружности к её диаметру.* На черт. 86 коэффициент сжатия равен $\frac{1}{2}$, т. е. все ординаты Y окружности заменены ординатами $y=\frac{1}{2}Y$ эллипса. Выполните построение эллипса, взяв коэффициент сжатия равным $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, 2, 3 и т. д. (в случае, когда коэффициент сжатия больше 1, например, равен 2 или 3, лучше говорить о растяжении). На приборе, который был описан в § 18, для наглядного изучения сдвига и сжатия легко фактически произвести растяжение окружности в эллипс (черт. 87).



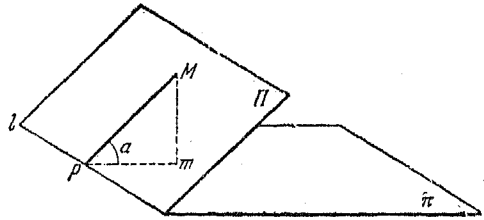
Черт. 86.

Если мы производим проектирование с одной плоскости (П) на другую (π), то любой отрезок PM, перпендикулярный к прямой l пересечения плоскостей П и π и лежащий в одной из них (например, в плоскости П), будет при проектировании его в другую плоскость сокращаться в одном и том же отношении (черт. 88): $Pm=PM\cdot\cos\alpha$, где α — угол между плоскостями П и π. При этом проекция Pm отрезка PM будет, конечно, перпендикулярна к прямой l (почему?), значит, если в плоскости П построить окружность, диаметр которой лежит на прямой l, то при проектировании этой окружности в плоскость π все её полухорды, перпендикулярные к прямой l, сократятся в одном и том же отношении; данная окружность «сожмётся» около прямой; *проекция окружности — эллипс* (черт. 89).

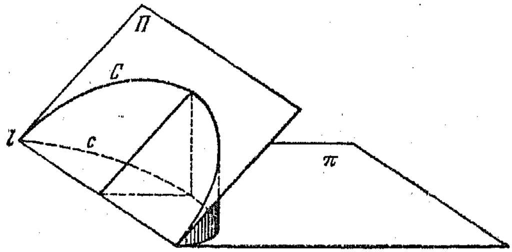
Конечно, вовсе не обязательно, чтобы диаметр окружности лежал на прямой; это допущение введено для ясности доказательства. Теперь, когда уже доказано, что проекция окружности (диаметр



Черт. 87.



Черт. 88.



Черт. 89.

которой лежит на прямой l) есть эллипс, мы можем нашу окружность сдвинуть в плоскости П; тогда сдвинется и её проекция (эллипс) в плоскости π (черт. 90).

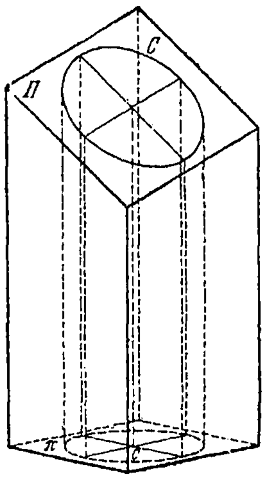
Мы предполагали, что проектирование производится прямыми, перпендикулярными к плоскости π. Верно и более общее положение: *если спроектировать окружность с одной плоскости на другую по произвольному направлению, то проекция её будет эллипсом.* Для доказательства этого положения мы будем опираться на следующие два элементарных свойства параллельной проекции, которые мы предлагаем читателю установить самостоятельно:

1) *параллельные прямые проектируются в параллельные же прямые;*

2) *отношение параллельных отрезков при параллельном проектировании не меняется.*

Докажем ещё одно, несколько более сложное свойство параллельной проекции.

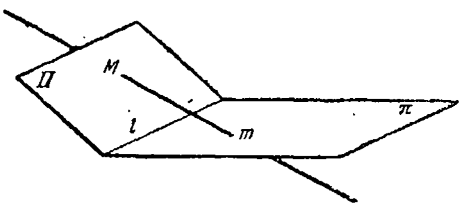
при любом направлении проектирования с плоскости Π *в плоскость* π *можно найти два взаимно перпендикулярных направления в плоскости* Π, *которые спроектируются во взаимно перпендикулярные направления в плоскости* π.



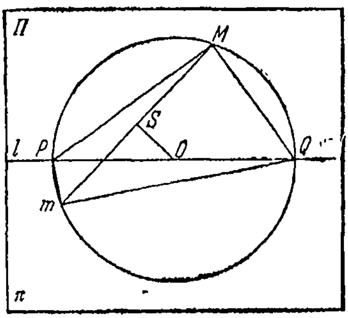
Черт. 90.

В самом деле: пусть M — любая точка плоскости Π, m — её проекция в плоскость π (черт. 91). Развернём двугранный угол, образованный плоскостями Π и π, в плоскость (черт. 92). Соединим точки M и m; разделим отрезок Mm пополам: $MS = Sm$, и проведём прямую SO, перпендикулярную к Mm до встречи её в точке O с прямой l. Наконец, построим окружность с центром в точке O, проходящую через точки M и m. Пусть P и Q — точки встречи этой окружности с прямой l. Тогда при проектировании с плоскости Π в плоскость π точки P и Q останутся на месте (так как они лежат на прямой, по которой пересекаются плоскости Π и π), а значит, прямые PM и QM спроектируются в прямые Pm и Qm. Очевидно, $PM \perp QM$ и $Pm \perp Qm$, так как PQ — диаметр окружности.

Замечание. Мы предполагали, что перпендикуляр, проведённый к отрезку Mm в его середине, встречает прямую l. Это не всегда так. Если прямая Mm перпендикулярна к l, то либо указанный перпендикуляр параллелен прямой l, либо с ней совпадает. Нетрудно было бы



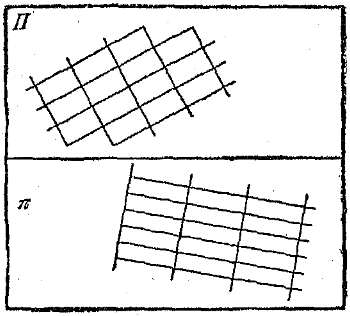
Черт. 91.



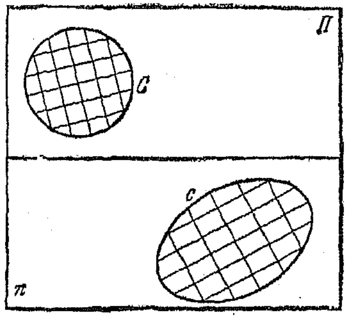
Черт. 92.

показать, что в этих случаях прямая, лежащая в плоскости Π и параллельная прямой l, и прямая, к ней перпендикулярная, после проектирования в плоскость π остаются перпендикулярными. На этом доказательстве мы останавливаться не будем, ограничившись рассмотрением общего случая.

Если мы возьмём с е т ь взаимно перпендикулярных прямых, параллельных прямым PM и QM, то эта сеть спроектируется в плоскость π также в сеть взаимно перпендикулярных прямых (так как при параллельном проектировании параллельные прямые проектируются в параллельные же прямые) (черт. 93). Теперь легко доказать, что произ-



Черт. 93.

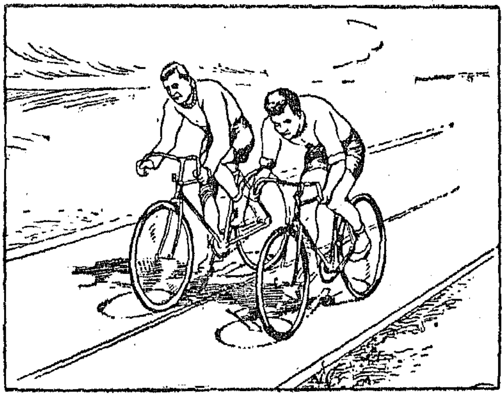


Черт. 94.

вольная проекция окружности является эллипсом. Пусть C — произвольная окружность, лежащая в плоскости П (черт. 94). Возьмём два взаимно перпендикулярных её диаметра, которые проектируются в плоскость π также во взаимно перпендикулярные прямые. Тогда все хорды окружности, параллельные любому из этих диаметров, при параллельном проектировании сожмутся или растянутся в одном и том же отношении. Таким образом при параллельном проектировании произойдёт сжатие окружности в *двух* взаимно перпендикулярных направлениях. Пусть k и k' — коэффициенты сжатия в этих направлениях. Для того чтобы сжать плоскость по двум взаимно перпендикулярным направлениям с указанными коэффициентами сжатия, мы можем сначала произвести сжатие в «k раз» по обоим перпендикулярным направлениям в плоскости π — при этом окружность, конечно, останется окружностью (все её радиусы «сожмутся» в «k раз»), а затем произвести сжатие в одном из направлений в $\frac{k'}{k}$ раз; при этом последняя окружность перейдёт в эллипс.

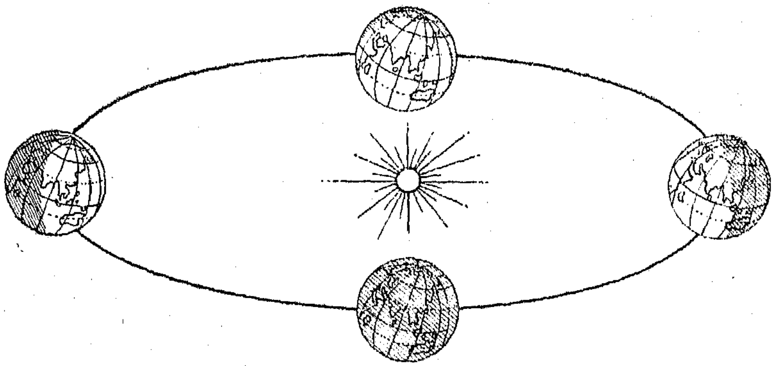
Черт. 95.

Доказанная общая теорема, утверждающая, что *проекция окружности есть эллипс*, позволяет дать множество самых разнообразных «построений» эллипса. Так, например, косой «срез» круглого цилиндра есть эллипс, так как такое сечение можно рассматривать как проекцию окружности (перпендикулярного сечения) в плоскость среза (черт. 95). Тень окружности в любую плоскость от источника параллельных лучей есть эллипс. Возьмите кусок бумаги, вырежьте круглую дырку и посмотрите, какую форму будет иметь светлое пятно, отбрасываемое на стол или стену солнечными лучами, проходящими в отверстие. Это пятно будет иметь форму эллипса. Поворачивая бумагу под разными углами к лучам, будем получать разнообразные эллипсы. Тени круглых тарелок, тень мяча на полу и т. д. — всё это эллипсы.



Черт. 96.

Отметим ещё, что если мы рассматриваем какой-нибудь круг под углом к его плоскости, то на сетчатку глаза он проектируется в эллипс (можно приближённо считать, что проектирование происходит при помощи параллельных лучей). Вот почему окружность чаще всего нам кажется эллипсом, овалом; колёса проезжающего велосипеда, автомашины и т. д. кажутся эллипсами (черт. 96), и только наш жизненный опыт и привычка видеть круги



Черт. 97.

эллипсами гарантируют нас от ошибок в определении формы того предмета, который мы рассматриваем. И не только в глазу происходит такое «превращение» круга в эллипс. При фотографировании опять происходит сжатие, искажение окружности в эллипс.

Отметим, что по эллипсу движется наша земля вокруг солнца, луна вокруг земли, планеты вокруг солнца и многие другие спутники различных небесных тел (черт. 97).

§ 30. Каноническое уравнение эллипса

Сожмём окружность к её диаметру в эллипс (черт. 98). Если «верхняя» точка $P(0, a)$ окружности при этом перейдёт в некоторую точку $p(0, b)$ эллипса, то коэффициент сжатия равен $k = \frac{b}{a}$. Рассмотрим уравнение окружности

$$X^2 + Y^2 = a^2.$$

После сжатия плоскости к оси Ox точка $M(X, Y)$ окружности перейдёт в точку $m(x, y)$ эллипса, причём

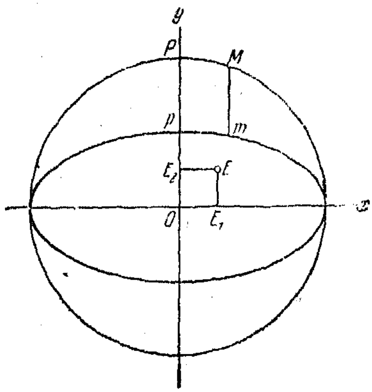
$$X = x, \quad Y = \frac{a}{b} y,$$

так как коэффициент сжатия равен $\frac{b}{a}$. Значит, координаты любой точки эллипса удовлетворяют уравнению

$$x^2 + \left(\frac{a}{b} y\right)^2 = a^2$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Черт. 98.

Координаты точек, не лежащих на эллипсе, этому уравнению не удовлетворяют. В самом деле: если, например, точка $M(X, Y)$ лежит вне окружности, то

$$X^2 + Y^2 - a^2 > 0,$$

значит, и

$$x^2 + \left(\frac{a}{b} y\right)^2 - a^2 > 0$$

или

$$a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) > 0,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 > 0.$$

Отметим, что точка $m(x, y)$ лежит вне эллипса, так как точка $M(X, Y)$ лежит вне окружности.

Аналогично доказывается, что точкам $M(X, Y)$, лежащим внутри окружности, соответствуют точки $m(x, y)$, лежащие внутри эллипса, и их координаты удовлетворяют неравенству

$$\frac{x^2}{a_2}+\frac{y^2}{b^2}<1.$$

Итак, уравнение

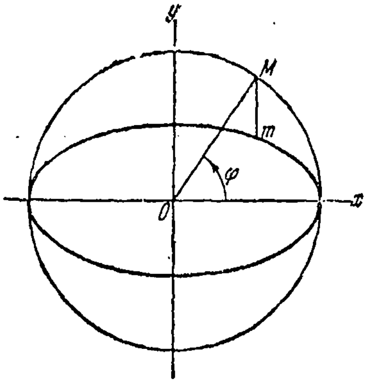
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

удовлетворяется только координатами точек, лежащих на эллипсе; это уравнение называется **каноническим** уравнением эллипса.

§ 31. Параметрические уравнения эллипса

Пусть a, φ — полярные координаты точки M, лежащей на окружности $X^2+Y^2=a^2$ (черт. 99). Тогда

$$X=a\cos\varphi,\qquad Y=a\sin\varphi.$$



Черт. 99.

После сжатия окружности $X^2+Y^2=a^2$ около оси Ox с коэффициентом сжатия, равным $\frac{b}{a}$, точка $M(X, Y)$ перейдёт в точку $m(x, y)$ с координатами

$$x=X=a\cos\varphi,$$

$$y=\frac{b}{a}Y=\frac{b}{a}a\sin\varphi=b\sin\varphi;$$

итак,

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos\varphi,\\ y&=b\sin\varphi. \end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

Множеству значений φ из полуинтервала $[0, 2\pi)$, т. е. $0\leqslant\varphi<2\pi$, соответствует множество всех точек окружности $X^2+Y^2=a^2$; значит, тому же множеству $[0, 2\pi)$ соответствует (притом взаимно однозначно!) множество всех точек эллипса

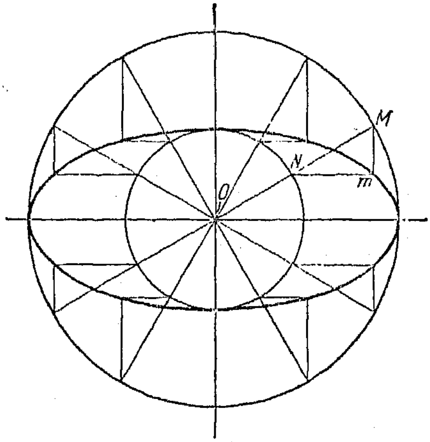
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

уравнения

$$x=a\cos\varphi,\qquad y=b\sin\varphi$$

называются параметрическими уравнениями эллипса. Угол φ называется эксцентрическим углом точки m; для того чтобы определить этот угол, надо точку m эллипса «поднять» на окружность, описанную около эллипса, и точку M соединить с центром окружности. Тогда $\varphi=\angle xOM$.

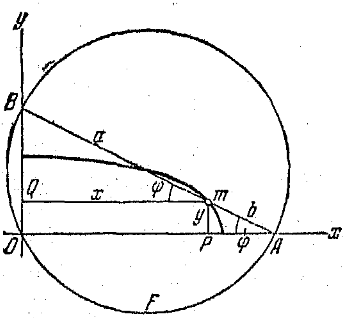
Рассмотрим наряду с окружностью $X^2 + Y^2 = a^2$, ещё одну окружность $X^2 + Y^2 = b^2$. Возьмём луч ONM (черт. 100). Тогда координаты точки M: $a\cos\varphi$, $a\sin\varphi$; координаты точки N: $b\cos\varphi$, $b\sin\varphi$; координаты точки m эллипса: $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$. Мы видим, что координаты точки m эллипса получаются, если взять абсциссу точки M и ординату точки N. Значит для построения точки m надо через точку N провести прямую, коллинеарную оси Ox, а через точку M прямую, коллинеарную оси Oy. Точка встречи этих прямых и будет точкой m. Таким способом можно построить сколько угодно точек эллипса (черт. 100).



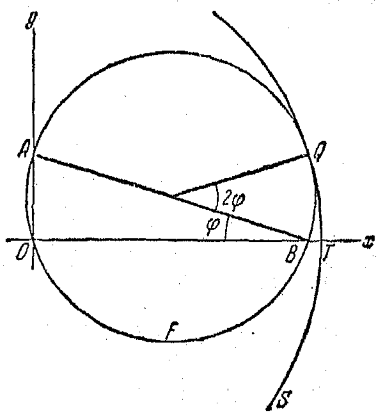
Черт. 100.

§ 32. Эллипсограф

Эллипсографом называется прибор, при помощи которого можно начертить эллипс непрерывным движением (эллипсограф есть, так сказать, «эллиптический циркуль»). Имеется множество самых разнообразных конструкций приборов, при помощи которых можно начертить эллипс. Мы приведём всего две такие конструкции, принципиально не отличающиеся одна от другой.



Черт. 101.

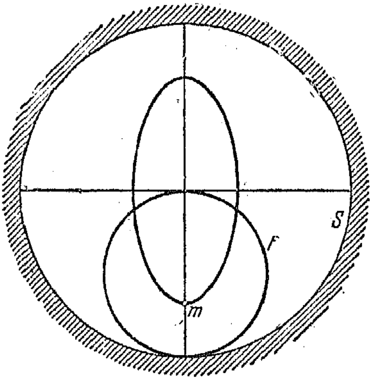


Черт. 102.

Циркуль Леонардо-да-Винчи. Точка m разбивает стержень, скользящий своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым, на части a и b (черт. 101); эта точка при указанном движении стержня описывает эллипс, так как её координаты

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi.$$

Круги Картано. На стержне AB, как на диаметре, построим окружность (черт. 102). Она пройдёт через начало координат (почему?). При скольжении стержня эта окружность F будет всё время проходить через начало координат. Если мы построим окружность S в два раза большего диаметра с центром в начале координат, то она будет касаться всё время окружности F (черт. 102). Докажем, что $\smile QB = \smile QT$, где Q — точка касания окружностей F и S, а B и T — точки встречи этих окружностей с осью Ox. В самом деле: дуга QB опирается на угол 2φ, а диаметр окружности F равен $a+b$. Дуга QT опирается на угол φ, но диаметр окружности S в два раза больше диаметра окружности F, т. е. он равен $2(a+b)$. Отсюда следует, что $\smile QB = \smile QT$. Значит, окружность F катится без скольжения и трения по окружности S, и так как точка m — любая точка круга F, то мы приходим к интересной теореме: если катить изнутри круг F по кругу S вдвое большего радиуса, то любая точка, лежащая внутри окружности F, будет описывать эллипс. Обыкновенно круги F и S делаются в виде «зубчаток» (черт. 103). Круги F и S называются кругами Картано.



Черт. 103.

§ 33. Диаметры эллипса

Рассмотрим окружность

$$X^2 + Y^2 = a^2,$$

сжатием которой мы получаем эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

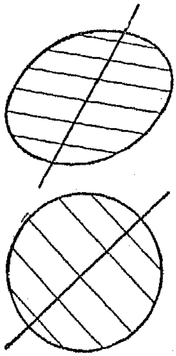
Докажем следующую важную теорему:

Теорема. *Середины всех параллельных хорд эллипса любого направления лежат на одной прямой* (черт. 104). В самом деле: растянем эллипс в окружность; тогда выбранные нами параллельные хорды эллипса перейдут в параллельные хорды окружности; середины последних лежат на одной прямой, значит, и середины рассматриваемых хорд эллипса (получаемых при сжатии окружности) также лежат на одной прямой (на черт. 104 для ясности окружность, в которую мы растягиваем эллипс, изображена отдельно от эллипса).

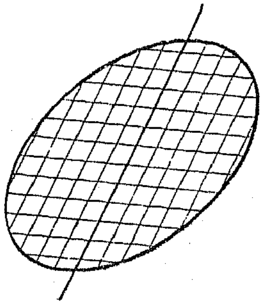
Определение. *Прямая, на которой лежат середины всех параллельных между собой хорд эллипса, называется диаметром эллипса, сопряжённым этим хордам.*

Направление хорд эллипса и направление диаметра, который их делит пополам, будем называть взаимно сопряжёнными.

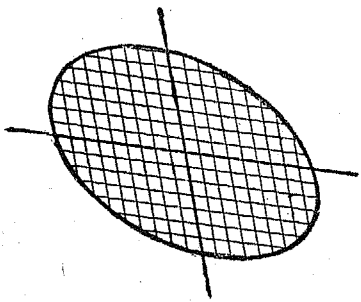
Возьмём теперь все параллельные между собой хорды эллипса и диаметр, им сопряжённый. Рассмотрим все хорды эллипса, параллельные этому диаметру (черт. 105). Какой диаметр будет им сопряжён? Для ответа на этот вопрос растянем эллипс в окружность: для окружности диаметр, сопряжённый всем параллельным хордам, будет просто диаметром, им перпендикулярным, и значит, если мы возьмём хорды, параллельные этому диаметру, то диаметр, сопряжённый этим хордам, будет иметь направление первоначально взятых хорд. Та же картина будет иметь место и для эллипса, получаемого сжатием окружности, а именно: и для эллипса (как и для окружности) можно указать два диаметра, каждый из которых делит пополам хорды, параллельные другому. Направление одного из этих диаметров может быть при этом выбрано совершенно произвольно. Два таких диаметра эллипса называются взаимно сопряжёнными (черт. 106). Взаимно сопряжённые



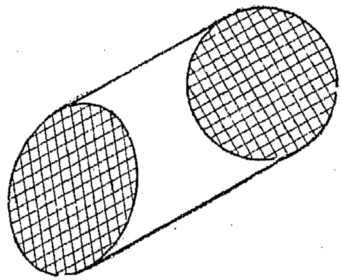
Черт. 104.



Черт. 105.



Черт. 106.



Черт. 107.

диаметры окружности — это два её взаимно перпендикулярных диаметра.

Наглядную картину взаимно сопряжённых диаметров эллипса и хорд, которые они делят пополам, можно получить, рассматривая под углом обыкновенное круглое решето или рассматривая его тень (черт. 107).

Рассмотрим теперь две прямые $Y = pX$ и $Y = p'X$. Эти прямые будут взаимно сопряжёнными диаметрами окружности $X^2 + Y^2 = a^2$, если они взаимно перпендикулярны, т. е. если

$$pp' = -1.$$

Сожмём окружность в эллипс. Тогда

$$X = x, \quad Y = \frac{a}{b} y,$$

и наши прямые перейдут в сопряжённые диаметры эллипса:

$$\frac{a}{b} y = px, \quad \frac{a}{b} y = p'x$$

или

$$y = \frac{bp}{a} x, \quad y = \frac{bp'}{a} x.$$

Пусть k и k' — их угловые коэффициенты:

$$k = \frac{bp}{a}, \quad k' = \frac{bp'}{a}.$$

Отсюда

$$kk' = \frac{b^2}{a^2} pp' = -\frac{b^2}{a^2} \text{ (так как } pp' = -1).$$

Итак,

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2},$$

т. е. *произведение угловых коэффициентов двух взаимно сопряжённых диаметров эллипса равно* $-\frac{b^2}{a^2}$. Соотношение $kk' = -\frac{b^2}{a^2}$ называется условием сопряжённости двух диаметров эллипса.

Упражнения

81. Составить уравнение диаметра эллипса

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1,$$

проходящего через точку (3, 1), и диаметра, ему сопряжённого.

82. Дан эллипс

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1;$$

составить уравнение хорды этого эллипса, делящейся точкой (3, 1) пополам.

§ 34. Центр и оси симметрии эллипса

Центр окружности является её центром симметрии, т. е. точка, симметричная любой точке окружности относительно её центра, также лежит на данной окружности. При сжатии окружности $X^2 + Y^2 = a^2$ около её диаметра в эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ центр симметрии окружности останется на месте и в силу свойств сжатия эта точка будет центром симметрии и для эллипса, в который сожмётся окружность. Иначе говоря:

начало координат для эллипса, заданного каноническим уравнением, является его центром симметрии.

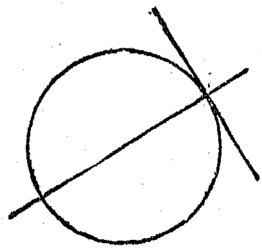
Другого центра симметрии у эллипса нет, так как, предполагая противное и растягивая эллипс в окружность, мы получили бы, что и окружность имеет второй центр симметрии.

Все диаметры эллипса проходят через его центр симметрии (это положение верно для окружности, в которую можно растянуть эллипс).

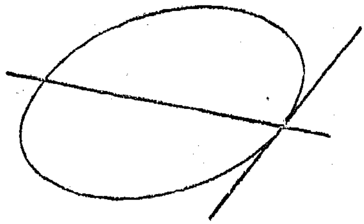
Оси координат, при задании эллипса каноническим уравнением, являются его осями симметрии. В самом деле, это верно для окружности $X^2+Y^2=a^2$, а при сжатии около оси Ox симметрия относительно осей координат не нарушается. Вместе с тем у эллипса (если он не является окружностью, т. е. если $a \neq b$) больше нет взаимно перпендикулярных осей симметрии, так как произведение угловых коэффициентов его сопряжённых диаметров *) равно $-\frac{b^2}{a^2} \neq -1$ (если $a \neq b$). Итак, *собственно эллипс* ($a \neq b$) *имеет только две взаимно перпендикулярные оси симметрии.*

§ 35. Касательная к эллипсу

Вспомним, как мы определяем в элементарной геометрии касательную к окружности: *касательной к окружности в данной на ней точке называется прямая, проходящая через эту точку и не*



Черт. 108



Черт. 109.

имеющая с окружностью ни одной другой общей точки, или: *касательной к окружности в данной на ней точке называется прямая, проходящая через эту точку, перпендикулярная к диаметру, проходящему через ту же точку* (черт. 108).

Это последнее определение касательной к окружности мы и положим в основу его обобщения по отношению к эллипсу. Именно, *касательной к эллипсу в данной на нём точке мы будем называть прямую, проходящую через эту точку, имеющую направление, сопряжённое с диаметром эллипса, проходящим через ту же точку* (черт. 109, ср. черт. 108).

*) Вспомним, что каждый из двух взаимно сопряжённых диаметров эллипса делит пополам хорды этого эллипса, параллельные другому диаметру.

Докажем, что касательная к эллипсу имеет с эллипсом только одну общую точку.

Рассмотрим сжатие, при котором некоторая окружность переходит в данный эллипс. Прообраз касательной к эллипсу при этом сжатии есть касательная к окружности, так как прообразы сопряжённых диаметров эллипса являются перпендикулярными диаметрами окружности. Но окружность и касательная к ней имеют только одну общую точку, значит, то же будет иметь место и после сжатия, т. е. эллипс и касательная к нему будут иметь только одну общую точку (сжатие есть преобразование взаимно однозначное!).

Если эллипс задан каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

то уравнение касательной к нему в точке $M_0(x_0, y_0)$ получим так: угловой коэффициент диаметра OM_0 равен:

$$k=\frac{y_0}{x_0};$$

угловой коэффициент касательной к эллипсу в точке M_0 найдём из условия

$$kk'=-\frac{b^2}{a^2}$$

сопряжённости:

$$k'=-\frac{b^2}{a^2k}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0};$$

уравнение касательной можно теперь записать сразу как уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) и имеющей угловой коэффициент k':

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$$

или, умножая обе части этого уравнения на $\frac{y_0}{b^2}$, получим:

$$\frac{y_0y}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=-\frac{x_0x}{a^2}+\frac{x_0^2}{a^2}$$

или

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2},$$

а так как точка (x_0, y_0) лежит на данном эллипсе, то

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,$$

и окончательно уравнение касательной к эллипсу в данной на нём точке принимает вид:

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1.$$

Упражнение

83. Составить уравнение касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$$

в точке (3, 4).

§ 36. Фокусы эллипса

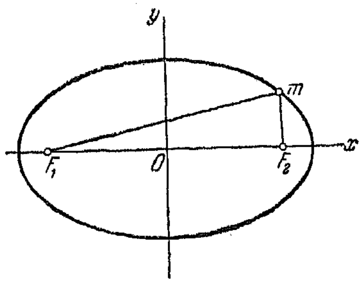
Рассмотрим две точки, расположенные на бóльшей оси симметрии эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

на расстояниях

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

от его центра (черт. 110). Эти точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ называются **фокусами** эллипса.



Черт. 110.

Теорема. *Сумма расстояний r_1 и r_2 от любой точки M эллипса до его фокусов равна большей оси эллипса,* то есть $2a$.

Доказательство. Имеем:

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{x^2+2xc+c^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2+2xc+c^2+b^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2+2xc+a^2}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2}=\left|\frac{c}{a}x+a\right|.$$

Из уравнения эллипса следует, что если точка $m(x, y)$ лежит на эллипсе, то $|x|\leqslant a$ $\left(\text{ибо } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$. Кроме того, $c<a$ $\left(\text{ибо } c=\sqrt{a^2-b^2}\right)$. Значит, $\frac{c}{a}x+a$ — положительное число и, значит, $\left|\frac{c}{a}x+a\right|=\frac{c}{a}x+a$, т. е.

$$r_1=\frac{c}{a}x+a.$$

Аналогично найдём:

$$r_2 = a - \frac{c}{a}x.$$

Из двух последних формул находим:

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Нетрудно доказать и обратное положение: *если сумма расстояний от некоторой точки $m_0(x_0, y_0)$ плоскости до двух фокусов $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ эллипса равна большей его оси, то эта точка лежит на эллипсе.* В самом деле, пусть

$$\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2} + \sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2} = 2a.$$

Тогда, возводя в квадрат, получим:

$$(x_0+c)^2+y_0^2+2\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}\cdot\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}+ \\ +(x_0-c)^2+y_0^2=4a^2,$$

$$\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}\cdot\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=2a^2-x_0^2-y_0^2-c^2;$$

возводя в квадрат ещё раз, получим:

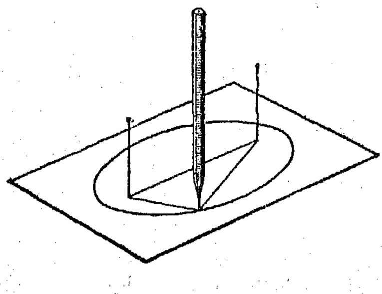
$$(x_0^2+y_0^2+c^2)^2-4x_0^2c^2=4a^4-4a^2(x_0^2+y_0^2+c^2)+(x_0^2+y_0^2+c^2)^2,$$

$$a^2(x_0^2+y_0^2+c^2)-x_0^2c^2-a^4=0,$$

$$b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2=0,$$

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0,$$

т. е. точка $m(x_0, y_0)$ лежит на эллипсе. Отсюда имеем ещё один способ для вычерчивания эллипса: воткните в бумагу две булавки и накиньте на них связанную концами нить. Натяните нить, как указано на чертеже 111, и опишите замкнутую линию, которая и будет эллипсом, так как сумма $MF_1 + MF_2$ будет всё время равна длине нити, уменьшённой на длину F_1F_2, т. е. во всё время движения будет неизменной.



Черт. 111.

Фокусы эллипса обладают ещё одним замечательным свойством: *если поместить в один из фокусов эллипса источник света, то лучи после отражения от эллипса соберутся в другом фокусе* (черт. 112). Для доказательства этого свойства фокуса надо показать, что касательная к эллипсу одинаково наклонена к отрезкам M_0F_1 и M_0F_2, так как световой луч от каждой точки эллипса отражается как от касательной к эллипсу в этой точке, причём угол падения равен углу отражения (черт. 113).

Итак, пусть $M_0(x_0, y_0)$ — любая точка эллипса. Найдём расстояния d_1 и d_2 от фокусов эллипса до касательной $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$:

$$d_1=\frac{\left|-\frac{cx_0}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}},\qquad d_2=\frac{\left|\frac{cx_0}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}};$$

отсюда

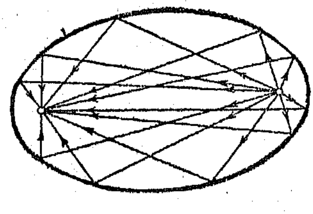
$$d_1:d_2=\left|-\frac{cx_0}{a^2}-1\right|:\left|\frac{cx_0}{a^2}-1\right|=$$

$$=\left|\frac{cx_0}{a}+a\right|:\left|\frac{cx_0}{a}-a\right|=\left|a+\frac{cx_0}{a}\right|:\left|a-\frac{cx_0}{a}\right|=|r_1|:|r_2|=r_1:r_2.$$

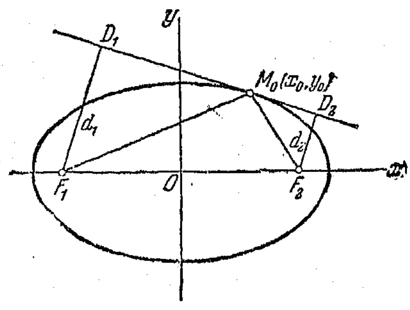
Отсюда следует, что треугольник $F_1D_1M_0$ подобен треугольнику $F_2D_2M_0$ и, значит, угол $F_1M_0D_1$ равен углу $F_2M_0D_2$.

Слово «фокус» по-латыни означает очаг.

Только что изложенное свойство фокусов эллипса хорошо поясняет происхождение этого названия: если поместить в один из фокусов



Черт. 112.



Черт. 113.

эллипса сильный источник тепла, то тепловые лучи, отражаясь от эллипса, соберутся в другом его фокусе и создадут там также высокую температуру.

В заключение отметим, что отношение половины расстояния между фокусами эллипса и его большей полуоси называется **эксцентриситетом** эллипса и обозначается буквой e:

$$e=\frac{c}{a}.$$

Эксцентриситет любого эллипса есть положительное число, меньшее 1 (ибо $c=\sqrt{a^2-b^2}<a$). Для окружности эксцентриситет равен нулю, так как для окружности $c=\sqrt{a^2-b^2}=0$. Эллипс мы рассматриваем как результат сжатия окружности; нетрудно видеть, что чем сильнее это сжатие, тем меньше b, тем больше $c=\sqrt{a^2-b^2}$ и, значит, тем больше e. Значит, эксцентриситет характеризует, насколько сильно «сплющена» окружность в эллипсе, т. е. насколько сильно эллипс «по форме» отличается от окружности.

Упражнения

84. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние $2c$ между его фокусами равно 7, а меньшая полуось b равна 4.

85. Найти расстояния от точки $(4,3)$ эллипса

$$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$$

до его фокусов.

86. Найти точку на эллипсе

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,$$

зная, что она удалена от правого фокуса в два раза далее, чем от левого.

87. Определить эксцентриситет эллипса, зная, что его меньшая ось видна из фокуса под прямым углом.

ГЛАВА VI

ГИПЕРБОЛА

§ 37. Определение гиперболы, её уравнение, график и асимптоты

Определение. *Гиперболой называется линия, уравнение которой в надлежаще выбранной (вообще говоря, косоугольной) системе координат может быть записано так:*

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{или} \quad xy = 1.$$

Таким образом гипербола определяется нами как график обратной пропорциональности.

Из уравнения $y = \frac{1}{x}$ гиперболы следует, что если $x > 0$, то $y > 0$, а если $x < 0$, то $y < 0$.

Геометрически это означает, что точки гиперболы $xy = 1$ расположены в 1-й и 3-й четвертях.

Если на гиперболе $xy = 1$ лежит точка (x_0, y_0), т. е. если $x_0 y_0 \equiv 1$, то на той же гиперболе лежит точка $(-x_0, -y_0)$, симметричная точке (x_0, y_0) относительно начала координат. В самом деле: из тождества $x_0 y_0 \equiv 1$ следует тождество $(-x_0)(-y_0) \equiv 1$, а это и означает, что точка $(-x_0, -y_0)$ лежит на гиперболе $xy = 1$.

Таким образом *гипербола $xy = 1$ симметрична относительно начала координат.* Отсюда следует, что для построения гиперболы достаточно построить её часть в 1-й четверти и затем дополнить эту линию ей симметричной относительно начала координат.

Итак, будем исследовать уравнение

$$xy = 1$$

только для положительных значений x.

Ясно, что бóльшей положительной абсциссе точки гиперболы соответствует меньшая ордината, т. е. если x_1 и x_2 — положительные абсциссы двух точек гиперболы и

$$x_1 < x_2,$$

то ординаты y_1 и y_2 этих точек также положительны, причём

$$y_1 > y_2,$$

так как

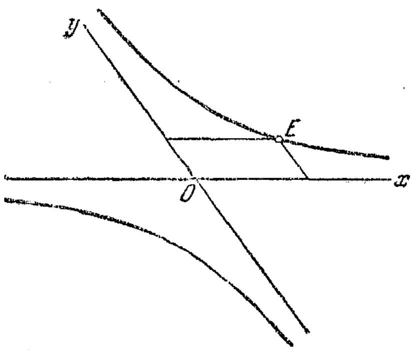
$$y_1 = \frac{1}{x_1}, \quad y_2 = \frac{1}{x_2}.$$

Возьмём какое угодно положительное сколь угодно малое число ε. Докажем, что *мы всегда найдём такое положительное число N, что ордината y точки $M(x, y)$ гиперболы $xy = 1$ будет меньше* ε:

$$y < \varepsilon,$$

если только абсцисса x этой точки больше N.

В самом деле: если $\varepsilon > 0$ и мы хотим, чтобы было выполнено неравенство $y < \varepsilon$ или $\frac{1}{x} < \varepsilon$, то надо взять $x > \frac{1}{\varepsilon}$ (напоминаем, что речь сейчас идёт только о положительных значениях x и y).



Черт. 114.

Итак, если взять число N равным $\frac{1}{\varepsilon}$, то при $x > N$ будем иметь $y < \varepsilon$.

Наконец, *каково бы ни было положительное сколь угодно большое число N, найдётся такое положительное число ε, что ордината y точки $M(x, y)$ гиперболы будет больше N, если только абсцисса этой точки будет положительна и меньше* ε.

В самом деле: пусть $N > 0$ — любое наперёд заданное число; тогда неравенство $y > N$ или $\frac{1}{x} > N$ будет выполнено, если

$$x < \frac{1}{N}.$$

Итак, если взять число ε равным $\frac{1}{N}$, то при $x < \varepsilon$ ордината y будет больше N.

Все эти исследования дают достаточно ясное представление о форме гиперболы (черт. 114). Для выполнения более точного её графика можно построить ещё ряд точек, придавая x, например, такие значения:

$$x = \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \ldots,$$

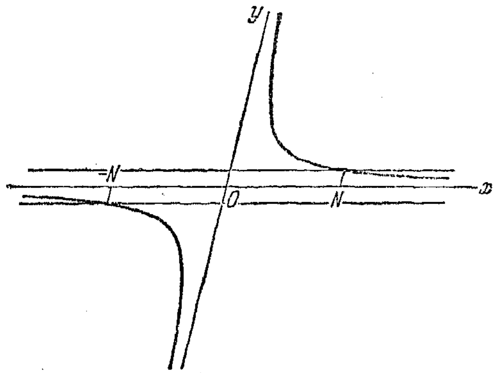
и определяя из уравнения $xy = 1$ соответствующие значения ординаты:

$$y = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \ldots, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Таким образом построим точки

$$\left(2, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-2, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(3, \frac{1}{3}\right), \quad \left(-3, -\frac{1}{3}\right), \ldots,$$

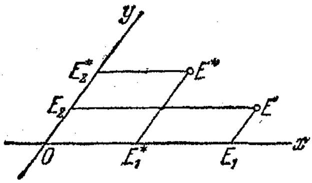
лежащие на гиперболе $xy = 1$. Оси координат Ox и Oy для гиперболы, заданной уравнением $xy = 1$, называются асимтотами этой гиперболы.



Черт. 115.

На основании доказанного *асимптота Ox обладает следующим свойством:*

если провести прямые $y = \varepsilon$ и $y = -\varepsilon$, параллельные оси Ox, где ε — сколь угодно малое положительное число, то найдётся такое положительное число N, что точки $M(x, y)$ гиперболы $xy = 1$ будут расположены между этими прямыми при всех абсциссах x, бо́льших N по абсолютной величине: $|x| > N$ (черт. 115). Грубо говоря, *гипербола неограниченно приближается к оси Ox.*



Черт. 116.

Аналогичным свойством обладает и вторая асимптота.

Систему координат для гиперболы, заданной уравнением $xy = 1$, будем называть асимптотической.

Пусть гипербола задана уравнением $xy = 1$ относительно декартовой косоугольной системы координат с масштабным параллелограммом OE_1EE_2. Построим ромб $OE_1^*E^*E_2^*$, площадь которого равна площади параллелограмма OE_1EE_2 (черт. 116). Тогда

$$\frac{OE_1}{OE_1^*} = \frac{OE_2^*}{OE_2},$$

т. е. масштабные отрезки будут обратно пропорциональны. Если точка M в системе xOy с масштабным параллелограммом OE_1EE_2 имела координаты x и y, то в системе с масштабным ромбом её координаты будут:

$$x^* = \lambda x, \quad y^* = \frac{1}{\lambda} y,$$

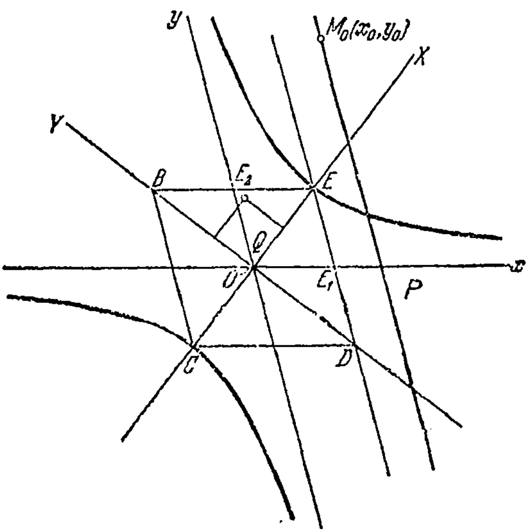
так как один из масштабных отрезков мы увеличили в λ раз, а другой во столько же раз уменьшили. Из последних соотношений следует:

$$xy = x^*y^*,$$

и, значит, уравнение $xy=1$ гиперболы в новой системе будет иметь тот же вид:

$$x^*y^* = 1.$$

Будем предполагать в дальнейшем, что масштабный параллелограмм является ромбом, а уравнение гиперболы будем писать попрежнему в виде $xy=1$ (а не $x^*y^*=1$).



Черт. 117.

Рассмотрим гиперболу, уравнение которой $xy=1$ задано относительно косоугольной системы координат с масштабным ромбом OE_1EE_2. Выполним построение, указанное на чертеже 117, т. е. примем диагонали OE и OB ромба $EBCD$ за оси декартовой прямоугольной системы координат (с масштабным квадратом Q). Пусть $a, 0$ — координаты точки E в этой прямоугольной системе, а $0, b$ — координаты точки B в этой системе.

Уравнения прямых BE и DE в отрезках будут:

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1, \quad \frac{X}{a} + \frac{Y}{-b} = 1,$$

а, значит, уравнения старых осей координат Ox и Oy, как прямых параллельных этим и проходящих через начало координат, имеют вид:

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 0 \text{ (ось } Ox),$$

$$\frac{X}{a} - \frac{Y}{b} = 0 \text{ (ось } Oy);$$

таковы уравнения асимптот гиперболы в построенной прямоугольной системе координат.

Возьмём теперь какую-нибудь точку M плоскости; пусть x_0 и y_0 — её координаты в системе xOy, а X_0 и Y_0 — её координаты в системе XOY.

Найдём связь между этими координатами. Рассмотрим прямые Oy, E_1E и MP ($\parallel Oy$), уравнения которых в системе XOY соответственно таковы:

$$\frac{X}{a}-\frac{Y}{b}=0, \quad \frac{X}{a}-\frac{Y}{b}=1 \quad \text{и} \quad \frac{X-X_0}{a}-\frac{Y-Y_0}{b}=0.$$

Решая каждое из этих уравнений совместно с уравнением

$$\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}=0$$

оси Ox, найдём новые координаты точек O, E_1, P:

$$O\,(0,\,0),\; E_1\left(\frac{a}{2},\,-\frac{b}{2}\right), \quad P\left[\frac{a}{2}\left(\frac{X_0}{a}-\frac{Y_0}{b}\right),\,-\frac{b}{2}\left(\frac{X_0}{a}-\frac{Y_0}{b}\right)\right].$$

Отсюда и находим x_0:

$$x_0=-(POE_1)=-\frac{0-\frac{a}{2}\left(\frac{X_0}{a}-\frac{Y_0}{b}\right)}{\frac{a}{2}-0}=\frac{X_0}{a}-\frac{Y_0}{b}.$$

Аналогично получается формула

$$y_0=\frac{X_0}{a}+\frac{Y_0}{b}.$$

Итак, мы нашли связь между старыми и новыми координатами:

$$x=\frac{X}{a}-\frac{Y}{b}, \quad y=\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}.$$

Из этих формул и из уравнения $xy=1$ гиперболы в системе xOy получаем уравнение

$$\left(\frac{X}{a}-\frac{Y}{b}\right)\left(\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}\right)=1$$

или

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$$

гиперболы в системе XOY. Это последнее уравнение называют **каноническим** уравнением гиперболы. Ясно, что оси OX и OY для канонического уравнения гиперболы являются её осями симметрии, а начало координат является её центром симметрии. Ось симметрии OX пересекает гиперболу; она называется поэтому **действительной** осью симметрии. Ось OY гиперболу не пересекает. Эта ось называется поэтому **мнимой** осью симметрии. Число a в каноническом уравнении гиперболы называется её **действительной полуосью**, а число b — **мнимой полуосью**.

§ 38. Гиперболический поворот и диаметры гиперболы

Рассмотрим на плоскости произвольную точку $M(x, y)$, заданную относительную декартовой косоугольной системы координат с масштабным ромбом OE_1EE_2. Перейдём от этой точки M к точке M' с координатами

$$x' = \xi x, \quad y' = \frac{1}{\xi} y, \quad \text{где} \quad \xi > 0; \tag{1}$$

иначе говоря, мы абсциссу точки M умножаем на число ξ, а ординату делим на ξ.

Можно сказать и так (если $\xi > 1$): мы растягиваем плоскость по направлению оси Ox от оси Oy в ξ раз и одновременно сжимаем её по направлению оси Oy к оси Ox во столько же раз. Такое преобразование плоскости называется лоренцовым преобразованием или гиперболическим поворотом.

При этом преобразовании только одна точка — именно начало координат — остаётся на месте; она является неподвижной точкой этого преобразования. Замечательно, что произведение координат преобразованной точки равно произведению координат начальной точки

$$x'y' = \xi \cdot x \cdot \frac{1}{\xi} \cdot y = xy;$$

отсюда следует, что если точка (x, y) лежала на гиперболе $xy = 1$, то после гиперболического поворота она останется лежать на этой же гиперболе, так как $xy = x'y'$. Гипербола как бы «скользнёт» сама по себе; отсюда и название «гиперболический поворот» (по аналогии с обычным поворотом, когда скользит сама по себе некоторая окружность). На чертеже 118 изображён рисунок и его образ после гиперболического поворота (для простоты гиперболический поворот произведён в прямоугольной системе). Все предметы, находящиеся в первой четверти, станут правее, ниже и во столько же раз шире. Гиперболический поворот как бы «сплющивает» предметы, «придавливает» их к оси Ox и отодвигает направо (при $\xi > 1$). (Что произойдёт с предметами, находящимися в других четвертях? При $0 < \xi < 1$?) Осуществить гиперболический поворот так, как это было сделано нами при изучении сдвига и сжатия, уже значительно труднее, и трудность заключается в том, что надо растягивать плоскость в одном направлении и одновременно заставлять её сжиматься (и в том же отношении!) в другом направлении.

Гиперболический поворот есть то преобразование, которое поможет нам изучать гиперболу. Гиперболический поворот обладает следующими свойствами, которыми обладают сжатие и сдвиг; свойства эти доказываются так же, как для сдвига и сжатия:

1) *Двум любым разным прообразам при гиперболическом повороте соответствуют два различных образа.*

2) *Каждая точка плоскости имеет прообраз.*

3) *Преобразование, обратное лоренцову — снова лоренцово.*

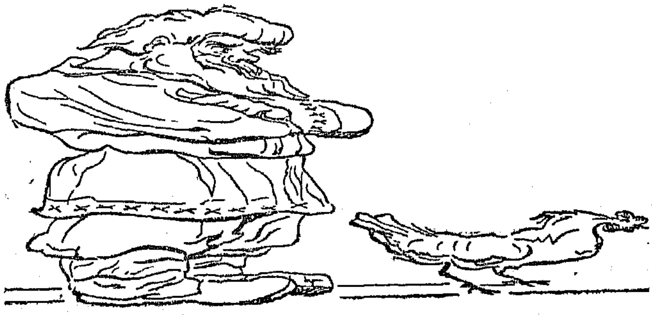
4) *Если точки M_1, M, M_2 коллинеарны и точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то то же имеет место и по отношению к образам этих точек при гиперболическом повороте.*

5) *Параллельные прямые после гиперболического поворота остаются параллельными.*

6) *Ориентированная площадь треугольника при гиперболическом повороте не меняется.*

Доказательство всех этих свойств приводится совершенно так же, как и доказательство этих свойств для сдвига (§ 18), и мы предоставляем провести эти доказательства читателю (см. также упражнение 43).

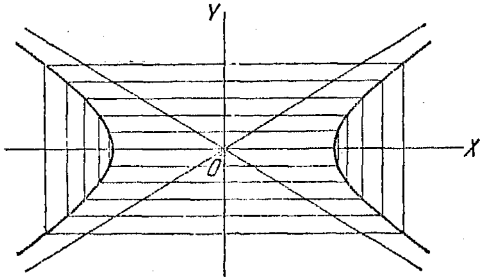
Гиперболический поворот плоскости может быть произведён относительно любой пары пересекающихся прямых. В дальнейшем при изучении гиперболы мы будем производить гиперболический поворот всегда относительно её асимптот.



Черт. 118.

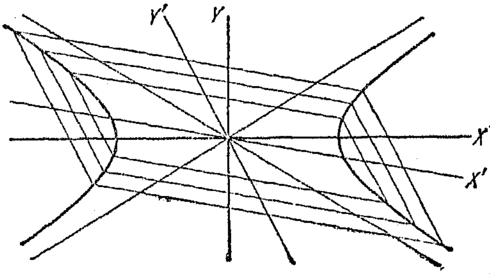
Итак, возьмём гиперболу $xy=1$. Мы уже доказали, что биссектрисы углов между её асимптотами служат её осями, т. е. прямыми, каждая из которых делит пополам хорды гиперболы, параллельные другой оси (черт. 119). После гиперболического поворота в силу его свойств картина сохранится: параллельные хорды гиперболы перейдут в параллельные хорды гиперболы, а прямые, которые их делили пополам, перейдут в прямые, делящие пополам новые хорды.

На чертеже 120 построен гиперболический поворот для $\xi=2$ и показаны семейства параллельных хорд, в которые перейдут хорды, параллельные осям симметрии, а также прямые, в которые перейдут



Черт. 119.

сами оси симметрии. Произойдёт, так сказать, «перекос» хорд, которые ранее были взаимно перпендикулярны; прямоугольная симметрия заменится «косой» симметрией.



Черт. 120.

Определение. *Диаметром гиперболы, сопряжённым параллельным хордам гиперболы, называется прямая, на которой расположены середины этих хорд.*

Взаимно сопряжёнными диаметрами гиперболы называются два таких её диаметра, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому. Мы только что показали, что оси симметрии гиперболы после гиперболического поворота переходят в её взаимно-сопряжённые диаметры. Сами оси симметрии также, конечно, являются взаимно сопряжёнными диаметрами гиперболы. Остаётся ещё один вопрос: можно ли получить гиперболическим поворотом из хорд гиперболы, параллельных её оси симметрии, хорды гиперболы любого направления? Оказывается, что можно. В самом деле: точка E (черт. 117) имеет в системе xOy координаты 1,1; угловой коэффициент $\varkappa_1$ прямой OE равен $\varkappa_1=\frac{1}{1}=1$; точка B имеет координаты $-1,1$; угловой коэффициент $\varkappa_2$ прямой OB равен $\varkappa_2=\frac{1}{-1}=-1$. Значит, угловые коэффициенты хорд гиперболы, параллельных её осям симметрии, будут $\varkappa_1=1$ и $\varkappa_2=-1$. Произведём гиперболический поворот. Точка $E\ (1, 1)$ перейдёт в точку $E'\left(\xi, \frac{1}{\xi}\right)$, а точка $B(-1, 1)$ перейдёт в точку $B'\left(-\xi, \frac{1}{\xi}\right)$; значит, угловые коэффициенты прямых OE' и OB', в которые перейдут прямые OE и OB (точка O остаётся на месте!), будут:

$$\varkappa_1'=\frac{1}{\xi}:\xi=\frac{1}{\xi^2},\quad \varkappa_2'=\frac{1}{\xi}:(-\xi)=-\frac{1}{\xi^2}. \tag{2}$$

Из этих формул следует, что множеству всех положительных значений ξ соответствует множество всех действительных значений $\varkappa_1'$ и $\varkappa_2'$, кроме нуля: положительных для $\varkappa_1'$ и отрицательных для $\varkappa_2'$. Значит, хордам гиперболы, параллельным её осям симметрии, а также самим осям симметрии при помощи гиперболического поворота можно придать любое направление, кроме направления осей Ox и Oy. Но хорд, параллельных осям Ox и Oy, вообще не существует, так как, полагая $x=a$ в уравнении $xy=1$, найдём (при $a\neq 0$) только одно значение y, т. е. прямая $x=a$, параллельная оси Oy, встречает гиперболу $xy=1$ только в одной точке $\left(a, \frac{1}{a}\right)$. Точно так же доказывается, что у гиперболы $xy=1$ нет хорд, параллельных другой её асимптоте Ox. Итак, действительно, *при помощи гиперболического поворота из хорд, параллельных осям симметрии, можно получить параллельные хорды гиперболы любого возможного направления.*

Так как при гиперболическом повороте центр симметрии гиперболы (начало координат) остаётся на месте, то при гиперболическом повороте оси симметрии будут вращаться около этого центра, т. е. *все диаметры гиперболы проходят через её центр симметрии.* Отметим ещё, что эти вращения будут совершаться в противоположных направлениях: *если один из двух взаимно сопряжённых диаметров гиперболы поворачивать по часовой стрелке, приближая его к одной из асимптот, то другой диаметр (ему сопряжённый) будет поворачиваться против часовой стрелки, приближаясь к той же асимптоте, но с другой стороны (см. формулы* (2)). Всё это легко проследить и по чертежу 117.

Нетрудно получить условие взаимной сопряжённости двух диаметров гиперболы. Для таких диаметров, как мы только что видели, угловые коэффициенты $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ равны:

$$\varkappa_1 = \frac{1}{\xi^2}, \quad \varkappa_2 = -\frac{1}{\xi^2},$$

откуда

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = 0,$$

т. е. *если за оси координат принять асимптоты гиперболы, то сумма угловых коэффициентов её взаимно сопряжённых диаметров равна нулю.*

Вернёмся к формулам

$$x = \frac{X}{a} - \frac{Y}{b}, \quad y = \frac{X}{a} + \frac{Y}{b},$$

связывающим координаты x и y точки в асимптотической системе xOy с координатами X и Y в канонической системе XOY. Возьмём какую-нибудь точку M, не совпадающую с началом координат, и обозначим через $\varkappa$ угловой коэффициент прямой OM относительно асимптотической системы xOy:

$$\varkappa = \frac{y}{x},$$

а через k — угловой коэффициент той же прямой относительно канонической системы:

$$k = \frac{Y}{X}.$$

Из предыдущих формул имеем:

$$\varkappa = \frac{y}{x} = \frac{\frac{X}{a} + \frac{Y}{b}}{\frac{X}{a} - \frac{Y}{b}} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\frac{Y}{X}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\frac{Y}{X}} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{k}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{k}{b}} = \frac{b + ak}{b - ak}. \tag{3}$$

Отсюда легко получить условие сопряжённости в канонической системе. Обозначим угловые коэффициенты взаимно сопряжённых диаметров OE' и OB' относительно канонической системы через k и k'; тогда

$$\varkappa_1' = \frac{b + ak}{b - ak}, \quad \varkappa_2' = \frac{b + ak'}{b - ak'},$$

откуда

$$(\varkappa_1' + \varkappa_2' = 0)$$

$$\frac{b + ak}{b - ak} + \frac{b + ak'}{b - ak'} = 0;$$

упрощая, получим:

$$kk' = \frac{b^2}{a^2}; \tag{4}$$

таково условие сопряжённости двух взаимно сопряжённых диаметров гиперболы относительно канонической системы координат.

Упражнения

88. Составить уравнение диаметра гиперболы $xy=1$, проходящего через точку (3,2), и уравнение диаметра, ему сопряжённого.

89. Составить уравнение диаметра гиперболы

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1,$$

проходящего через точку (1, 1), и уравнение диаметра, ему сопряжённого.

90. Составить уравнение хорды гиперболы $xy=1$, делящейся точкой (2, 1) пополам.

91. Составить уравнение хорды гиперболы

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1,$$

делящейся в точке (5,1) пополам.

§ 39. Равносторонняя гипербола

Гипербола называется равносторонней, если её асимптоты взаимно перпендикулярны. Так как уравнения асимптот любой гиперболы можно переписать так:

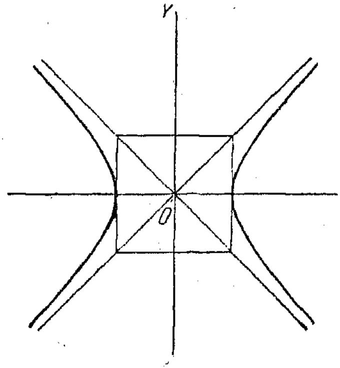
$$Y=\frac{b}{a}X, \quad Y=-\frac{b}{a}X, \qquad (1)$$

то угловые коэффициенты асимптот любой гиперболы будут:

$$k=\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad k'=-\frac{b}{a}, \qquad (2)$$

отсюда

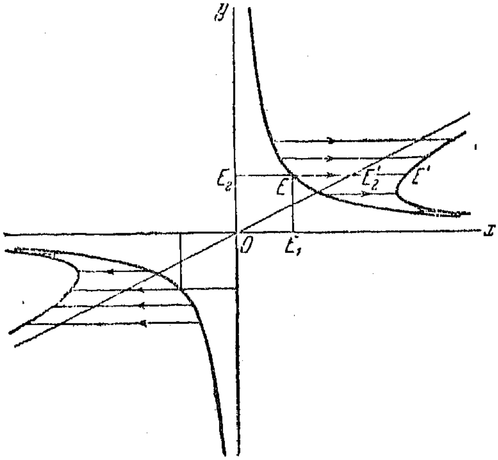
$$kk'=-\frac{b^2}{a^2}.$$



Черт. 121.

Если асимптоты взаимно перпендикулярны, то $kk'=-1$, а тогда из только что написанного соотношения получаем: $a=b$, т. е. полуоси равносторонней гиперболы равны. Обратно, если $a=b$, то $kk'=-1$, т. е. если равны полуоси гиперболы, то асимптоты взаимно перпендикулярны, значит, гипербола равносторонняя. Отсюда следует, что равносторонней гиперболе можно дать и такое определение: *гипербола называется равносторонней, если её полуоси равны*: $a=b$ (черт. 121).

Нетрудно видеть, что любая гипербола из равносторонней может быть получена сдвигом около её асимптоты, так как, производя сдвиг равносторонней гиперболы $xy=1$, например, относительно оси Ox, мы получим, что масштабный квадрат OE_1EE_2 перейдёт в масштабный параллелограмм $OE_1E'E_2'$ и т. д. (черт. 122). Обратно, сдвигом любой гиперболы около её асимптоты можно превратить гиперболу в равностороннюю. Установите самостоятельно, что *любую гиперболу из равносторонней можно также получить сжатием равносторонней около её оси симметрии и обратно: произвольную гиперболу сжатием около её оси симметрии можно превратить в гиперболу равностороннюю.* Каноническое уравнение равносторонней гиперболы



Черт. 122.

$$X^2 - Y^2 = a^2. \quad (3)$$

Уравнения асимптот равносторонней гиперболы:

$$\left.\begin{array}{l} X - Y = 0, \\ X + Y = 0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

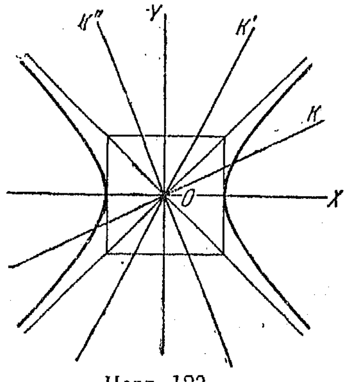
Равносторонняя гипербола по отношению к произвольной гиперболе является таким же частным случаем, как окружность по отношению к эллипсу. Можно было бы изучать ряд свойств гиперболы, исходя из равносторонней гиперболы, а затем при помощи сдвига (относительно асимптоты) или сжатия (около оси симметрии) перенести результаты на случай произвольной гиперболы.

Отметим ещё, что условие взаимной сопряжённости двух диаметров равносторонней гиперболы $X^2 - Y^2 = a^2$ запишется так:

$$kk' = 1$$

(так как $kk' = \frac{b^2}{a^2}$, а для равносторонней гиперболы $a = b$).

Докажем, что *если дан один из двух взаимно сопряжённых диаметров равносторонней гиперболы, то другой получается отражением первого в асимптоте гиперболы* (черт. 123). В самом деле, рассмотрим прямую, проходящую через начало координат, перпендикулярную к прямой с угловым коэффициентом k. Пусть эта новая прямая имеет угловой коэффициент k''. Тогда



Черт. 123.

$$kk'' = -1; \text{ но } kk' = 1;$$

значит,

$$k'' = -k',$$

Нетрудно видеть, что если угловые коэффициенты двух прямых отличаются знаком, то прямые симметричны относительно оси Oy. Итак, прямую с угловым коэффициентом k' можно получить так: построить прямую, перпендикулярную к прямой с угловым коэффициентом k, и взять её зеркальное отражение в оси Oy. Ясно, что в результате мы получим прямую, симметричную начальной прямой относительно биссектрисы координатного угла первой четверти.

§ 40. Касательная к гиперболе

Касательная к гиперболе может быть определена так же, как и касательная к эллипсу: *касательной к гиперболе в данной на ней точке называется прямая, проходящая через эту точку и имеющая направление, сопряжённое с диаметром, проходящим через ту же точку.*

Если гипербола задана уравнением $xy = 1$ (в косоугольной системе) и $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка, лежащая на этой гиперболе, то диаметр OM_0 гиперболы имеет угловой коэффициент $\frac{y_0}{x_0}$, а диаметр, ему сопряжённый, имеет угловой коэффициент, равный $-\frac{y_0}{x_0}$, и, значит, уравнение касательной к гиперболе $xy = 1$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, на ней лежащей, будет:

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$

или

$$x_0y - x_0y_0 = -y_0x + x_0y_0.$$

Но $x_0y_0 = 1$, значит, окончательно: уравнение касательной к гиперболе $xy = 1$ в точке M_0 (x_0, y_0), лежащей на этой гиперболе, будет:

$$y_0x + x_0y = 2. \tag{1}$$

Если гипербола задана каноническим уравнением, то уравнение касательной в данной на ней точке M_0 (X_0, Y_0) мы получим, используя условие сопряжённости в виде $kk' = \frac{b^2}{a^2}$; угловой коэффициент k диаметра OM_0 равен $\frac{Y_0}{X_0}$, а угловой коэффициент диаметра, ему сопряжённого, равен $k' = \frac{b^2X_0}{a^2Y_0}$; значит, уравнение касательной имеет вид:

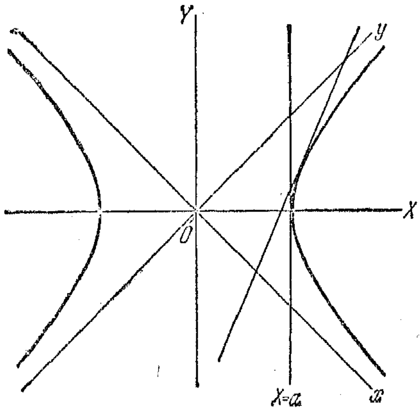
$$Y - Y_0 = \frac{b^2X_0}{a^2Y_0}(X - X_0)$$

или, упрощая, получим:

$$\frac{X_0X}{a^2} - \frac{Y_0Y}{b^2} = 1 \tag{2}$$

(при упрощении следует иметь в виду, что $\frac{X_0^2}{a^2} - \frac{Y_0^2}{b^2} = 1$).

Уравнение касательной к гиперболе в её вершине $(a, 0)$, если гипербола задана каноническим уравнением на основании данного определения, имеет вид $X=a$ (впрочем, это получается и из уравнения касательной, где надо положить $X_0=a$, $Y_0=0$). Будем производить гиперболический поворот: вершина A начнёт перемещаться по гиперболе, а прямая $X=a$ будет как-то двигаться по плоскости и будет всё время касательной к гиперболе, так как при гиперболическом повороте сопряжённые прямые: ось симметрии OX и прямая $X=a$ будут продолжать оставаться сопряжёнными. Отсюда в силу свойств гиперболического поворота можно сделать ряд выводов:



Черт. 124.

1) *касательная имеет с гиперболой только одну общую точку* (ибо прямая $X=a$ имеет с гиперболой только одну общую точку);

2) *отрезок касательной к гиперболе между асимптотами точкой прикосновения делится пополам* (так как это верно для касательной $X=a$);

3) *площадь треугольника, отсекаемого касательной к гиперболе от её асимптот, постоянна и равна* ab (так как это имеет место для касательной $X=a$) (черт. 124).

Упражнения

92. Составить уравнение касательной к гиперболе

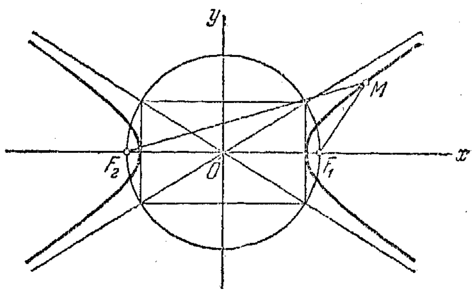
$$x^2-15y^2=1$$

в точке $(4, 1)$.

93. Составить уравнение касательной к гиперболе $xy=1$ в точке $(3, \frac{1}{3})$.

§ 41. Фокусы гиперболы

Гипербола, как и эллипс, имеет два фокуса; *фокусами гиперболы называются две точки, расположенные на действительной оси симметрии гиперболы и отстоящие от её центра симметрии на расстоянии* $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Фокусы гиперболы, заданной каноническим уравнением, находятся в точках пересечения с осью OX окружности, описанной около прямоугольника, уравнения сторон которого $X=\pm a$, $Y=\pm b$ (черт. 125), так как радиус такой окружности равен $\sqrt{a^2+b^2}$, а центр этой окружности совпадает с центром симметрии гиперболы. Фокусы гиперболы обладают свойствами, аналогичными свойствам фокусов эллипса.



Черт. 125.

Теорема. 1. *Абсолютная величина разности расстояний от любой точки гиперболы до её фокусов равна длине действительной оси гиперболы.*

Доказательство. Пусть $M(X, Y)$ — любая точка гиперболы, лежащая, например, на её правой ветви ($X > 0$). Тогда, обозначая расстояния от этой точки до фокусов $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ гиперболы через r_1 и r_2, будем иметь:

$$r_1 = \sqrt{(X-c)^2+Y^2} = \sqrt{(X-c)^2+\left(\frac{X^2}{a^2}-1\right)b^2} =$$

$$= \sqrt{X^2-2cX+c^2+\frac{b^2}{a^2}X^2-b^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}X^2-2Xc+c^2-b^2};$$

но $a^2+b^2=c^2$, $c^2-b^2=a^2$, значит,

$$r_1 = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}X^2-2Xc+a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}X-a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}X-a\right|;$$

так как $c > a$, $X > 0$, то $\frac{c}{a}X > a$, т. е. $\frac{c}{a}X - a > 0$, и значит,

$$r_1 = \frac{c}{a}X - a; \tag{1}$$

аналогично находим r_2:

$$r_2 = \frac{c}{a}X + a. \tag{2}$$

Отсюда находим $r_2 - r_1 = 2a$.

Если бы мы выбрали точку M на левой ветви, т. е. считали бы, что $X < 0$, то, повторяя предыдущие выкладки, мы получили бы:

$$r_1 = \left|\frac{c}{a}X - a\right| = -\left(\frac{c}{a}X - a\right) = a - \frac{c}{a}X. \tag{3}$$

и

$$r_2 = \left|\frac{c}{a}X + a\right| = -\left(\frac{c}{a}X + a\right) = -a - \frac{c}{a}X, \tag{4}$$

так как $X < 0$, $\frac{c}{a} > 1$, $-\frac{c}{a}X > a$, т. е. $-\frac{c}{a}X - a > 0$. Из последних соотношений находим $r_1 - r_2 = 2a$. Равенства $r_2 - r_1 = 2a$ и $r_1 - r_2 = 2a$ можно объединить:

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Положение доказано.

Обратно: *если абсолютная величина разности расстояний от точки $M(X, Y)$ плоскости до фокусов гиперболы равна $2a$, то точка M лежит на гиперболе.*

Доказательство. Пусть

$$|r_1 - r_2| = 2a,$$

т. е.

$$\left|\sqrt{(X+c)^2+Y^2} - \sqrt{(X-c)^2+Y^2}\right| = 2a.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим:

$$2X^2+2Y^2+2c^2-2\sqrt{(X^2+Y^2+c^2+2cX)(X^2+Y^2+c^2-2cX)} = 4a^2$$

или

$$\sqrt{(X^2+Y^2+c^2)^2-4c^2X^2} = X^2+Y^2+c^2-2a^2,$$

откуда

$$(X^2+Y^2+c^2)^2-4c^2X^2 = (X^2+Y^2+c^2)^2-4a^2(X^2+Y^2+c^2)+4a^4;$$

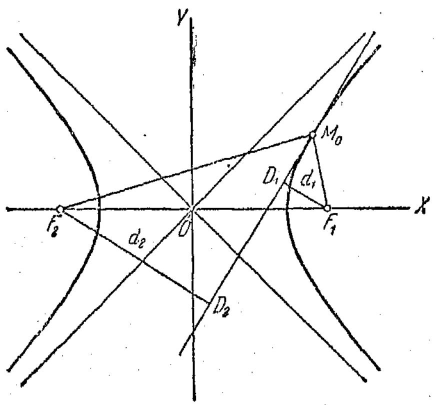
$$X^2(c^2-a^2)-a^2Y^2-a^2(c^2-a^2)=0,$$

$$b^2X^2-a^2Y^2=a^2b^2,$$

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1,$$

а это равенство как раз и означает, что точка $M(X, Y)$ лежит на гиперболе.

Итак, мы можем дать такое определение: *гиперболой называется множество точек, для каждой точки которого абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 равна числу $2a$, меньшему расстоянию $2c$ между точками F_1 и F_2.* Точки F_1 и F_2 — фокусы гиперболы.



Черт. 126.

Теорема 2. *Касательная к гиперболе в точке M_0 делит пополам угол $F_1M_0F_2$, где F_1 и F_2 — фокусы гиперболы, а M_0 — произвольная её точка* (черт. 126).

Доказательство такое же, как и для эллипса: возьмём уравнение касательной к гиперболе в точке M_0:

$$\frac{X_0X}{a^2}-\frac{Y_0Y}{b^2}=1,$$

и найдём расстояния d_1 и d_2 от фокусов до этой касательной (предположим, что точка M_0 лежит на правой ветви гиперболы):

$$d_1 = \frac{\left|\frac{X_0 c}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{X_0^2}{a^4} + \frac{Y_0^2}{b^4}}} = \frac{\frac{1}{a}\left|\frac{X_0 c}{a} - a\right|}{\sqrt{\frac{X_0^2}{a^4} + \frac{Y_0^2}{b^4}}} = \frac{|r_1|}{a\sqrt{\frac{X_0^2}{a^4} + \frac{Y_0^2}{b^4}}} = \frac{r_1}{a\sqrt{\frac{X_0^2}{a^4} + \frac{Y_0^2}{b^4}}},$$

$$d_2 = \frac{\left|-\frac{X_0 c}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{X_0^2}{a^4} + \frac{Y_0^2}{b^4}}} = \frac{\frac{1}{a}\left|\frac{X_0 c}{a} + a\right|}{\sqrt{\frac{X_0^2}{a^4} + \frac{Y_0^2}{b^4}}} = \frac{|r_2|}{a\sqrt{\frac{X_0^2}{a^4} + \frac{Y_0^2}{b^4}}} = \frac{r_2}{a\sqrt{\frac{X_0^2}{a^4} + \frac{Y_0^2}{b^4}}},$$

отсюда

$$d_1 : d_2 = r_1 : r_2,$$

и значит,

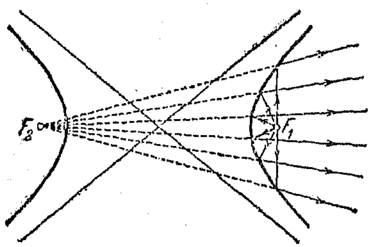
$$\triangle M_0F_1D_1 \sim \triangle M_0F_2D_2,$$

откуда

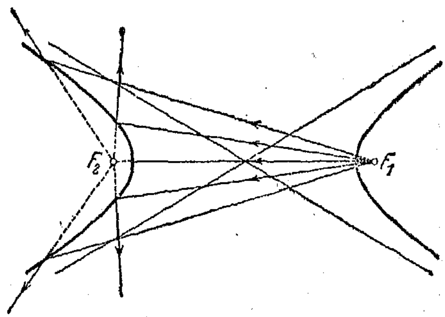
$$\angle F_2M_0D_1 = \angle D_1M_0F_1;$$

положение доказано.

Отсюда следует, что если в одном из фокусов гиперболы помещён источник света, то продолжение отражённых лучей от любой ветви гиперболы пройдёт через другой фокус (черт. 127 и 128),



Черт. 127.



Черт. 128.

так как, на основании доказанного, касательная образует равные углы с отрезком M_0F_1 и продолжением отрезка F_2M_0 за точку M_0, а световой луч от каждой точки гиперболы отражается, как от касательной к гиперболе в этой точке (причём угол падения равен углу отражения).

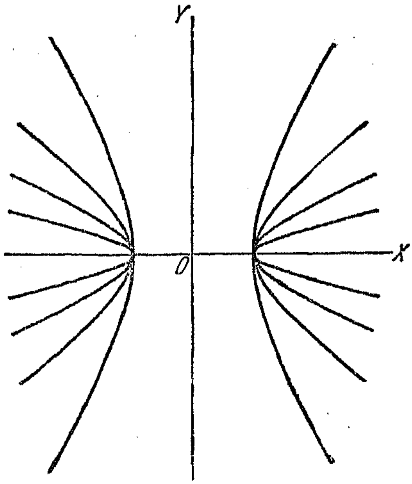
В заключение отметим, что отношение половины расстояния между фокусами гиперболы к длине её действительной полуоси называется э к с ц е н т р и с и т е т о м гиперболы и обозначается буквой e:

$$e = \frac{c}{a}.$$

Эксцентриситет гиперболы >1, так как $c=\sqrt{a^2+b^2}>a$. Далее: обозначая через ω половину того угла между асимптотами гиперболы, где лежит сама гипербола, будем иметь:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega}=\sec\omega,$$

т. е. эксцентриситет гиперболы равен секансу половины того угла между асимптотами, в котором лежит гипербола.



Черт. 129.

Для равносторонней гиперболы $\omega=45°$ и значит $\sec\omega=$ $=\sec 45°=\sqrt{2}$: эксцентриситет равносторонней гиперболы равен $\sqrt{2}$. Обратно: если эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{2}$, то гипербола равносторонняя, так как из соотношения $\sec\omega=\sqrt{2}$ следует, что $\omega=45°$ (ω — всегда острый угол!).

Если мы будем сжимать гиперболу около её действительной оси, то эксцентриситет её будет уменьшаться и приближаться к 1 (черт. 129).

А если мы будем растягивать гиперболу около её действительной оси, то эксцентриситет её будет неограниченно расти. Таким образом эксцентриситет характеризует степень сжатия, например, равносторонней гиперболы, из которой сжатием получается рассматриваемая гипербола.

Упражнения

94. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная что бóльшая её ось равна 8, а расстояние между фокусами равно 10.

95. Дана гипербола: $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{9}=1$; начертить эту гиперболу.

Написать уравнения её асимптот. Найти её фокусы.

ГЛАВА VII

ПАРАБОЛА

§ 42. Определение параболы и её график

Определение. *Параболой называется кривая, уравнение которой в надлежаще выбранной декартовой прямоугольной системе координат может быть записано в виде*

$$y = ax^2 + bx + c, \quad \text{где } a \neq 0. \qquad (1)$$

Таким образом параболу мы определяем как график квадратного трёхчлена.

Построим график параболы.

Начнём с рассмотрения частных случаев.

$$\text{I. } y = ax^2, \quad \text{где } a > 0.$$

Из уравнения $y = ax^2$, где $a > 0$, ясно, что парабола проходит через начало координат (ибо $y = 0$ при $x = 0$) и что ординаты всех других точек этой параболы положительны. Итак, *парабола $y = ax^2$, где $a > 0$, проходит через начало координат и расположена в положительной полуплоскости от оси Ox.* Если точка (x_0, y_0) лежит на параболе $y = ax^2$, т. е. если $y_0 = ax_0^2$, то точка $(-x_0, y_0)$, симметричная точке (x_0, y_0) относительно оси Oy, также лежит на параболе, так как если $y_0 \equiv ax_0^2$, то и $y_0 \equiv a(-x_0)^2$. Значит *парабола $y = ax^2$ симметрична относительно оси Oy.*

Таким образом для построения параболы $y = ax^2$ достаточно построить её часть, лежащую в первой четверти и дополнить эту линию ей симметричной относительно оси Oy. Итак, будем рассматривать только точки параболы $y = ax^2$ с положительными абсциссами.

Ясно, что если $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — две точки параболы $y = ax^2$, где $a > 0$, с положительными абсциссами ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$), то *точка с бо́льшей абсциссой будет иметь и бо́льшую ординату*: если $x_1 < x_2$, то $y_1 < y_2$ (так как $y_1 = ax_1^2$, $y_2 = ax_2^2$, $a > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$).

Проведённое исследование даёт представление о форме параболы. Для более точного построения следует построить на параболе ещё ряд точек, придавая абсциссе x произвольные числовые значения и вычисляя из уравнения $y = ax^2$ соответствующие значения ординаты y. Например, для $a = 1$ строим таблицу

x	0	1	2	3	...
y	0	1	4	9	...

График параболы $y = x^2$ дан на чертеже 130.

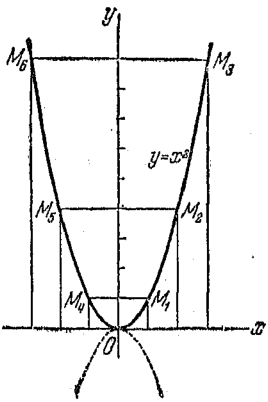
Точка пересечения параболы с её осью симметрии называется вершиной параболы.

Так как ось Oy является осью симметрии параболы $y = ax^2$, а ось Oy встречает эту параболу в начале координат, то мы приходим к выводу: *начало координат является вершиной параболы* $y = ax^2$. Ниже мы докажем, что парабола имеет только одну ось симметрии и, следовательно, только одну вершину.

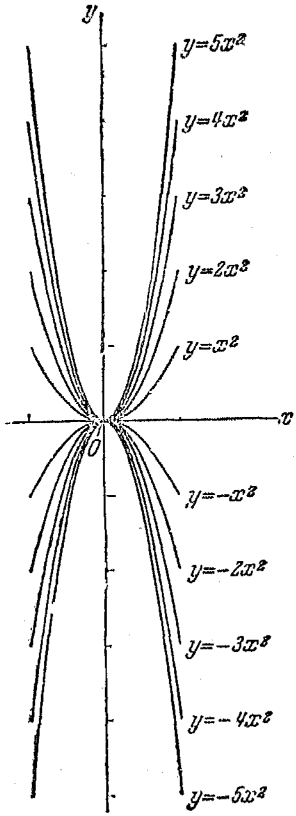
Перейдём к рассмотрению других частных случаев.

II. $y = ax^2$, где $a < 0$.

Это парабола получается зеркаль-



Черт. 130.



Черт. 131.

ным отражением параболы $y = |a| x^2$ в оси Ox, так как при одинаковых абсциссах ординаты парабол

$$y = ax^2 \quad \text{и} \quad y = |a| x^2$$

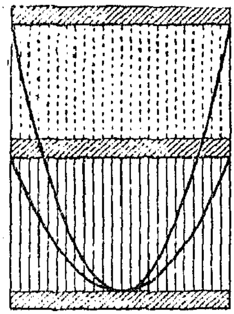
при $a < 0$ отличаются знаком.

На чертеже 130 построена также парабола $y = -x^2$.

Полезно проследить, что происходит с параболой $y=ax^2$, если числу a придавать различные значения от отрицательных, — больших по абсолютной величине, — до больших положительных. На чертеже 131 начерчены параболы

$$y=-5x^2,\quad y=-4x^2,\quad y=-3x^2,\quad y=-2x^2,$$
$$y=-x^2,\quad y=x^2,\quad y=2x^2,\quad y=3x^2,\quad y=4x^2,\quad y=5x^2.$$

Читатель легко уяснит себе, что происходит при изменении числа a: если $a<0$ и велико по абсолютной величине, то парабола вогнута вниз и сплющена около оси Oy; если модуль числа a начинает убывать (но $a<0$), то парабола вогнута вниз, и ветви её разгибаются, приближаясь вблизи начала координат к оси Ox; при дальнейшем росте a, оно становится положительным, парабола «перегибается» через ось Ox, оказывается вогнутой вверх и при дальнейшем возрастании a эти ветви сжимаются около оси Oy. И эту картину легко наблюдать на модели, описанной в § 18: все параболы $y=ax^2$ при $a>0$ могут быть получены из какой-нибудь одной, например, из параболы $y=x^2$ сжатием или растяжением последней около оси Ox, так как при таком сжатии:

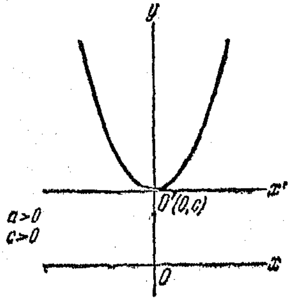


Черт. 132.

$$x'=x,\quad y'=ay,$$

уравнение $y=x^2$ переходит в уравнение $\frac{y'}{a}=x'^2$ или

$$y'=ax'^2.$$



Черт. 133.

Поэтому если нарисовать на тесёмках параболу так, как это изображено на чертеже 132, нижнюю планку закрепить и растягивать параболу, отодвигая верхнюю планку от нижней, то парабола $y=x^2$ будет преобразовываться, растягиваться в параболу $y=ax^2$, причём a будет расти при растяжении и убывать при сжатии. Предыдущие рассуждения показывают, что a есть коэффициент сжатия, при котором парабола $y=x^2$ переходит в параболу $y=ax^2$.

Переходим к рассмотрению других частных случаев.

III. $y=ax^2+c$.

Если переписать уравнение $y=ax^2+c$ в виде $y-c=ax^2$ и перенести оси координат так, чтобы старая и новая оси Oy совпадали, новая ось $O'x'$ была бы коллинеарна старой, а новым началом координат была бы точка $O'(0, c)$ (черт. 133), то новые координаты x',

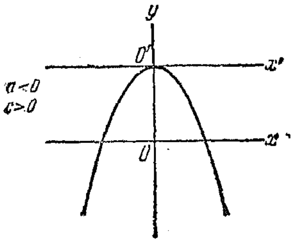
y' точки M со старыми её координатами x и y будут связаны соотношениями

$$y' = y - c, \quad x' = x$$

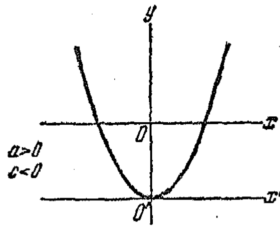
и, значит, уравнение $y - c = ax^2$ в новой системе будет иметь вид:

$$y' = ax'^2,$$

т. е. оно определяет параболу, положение которой относительно

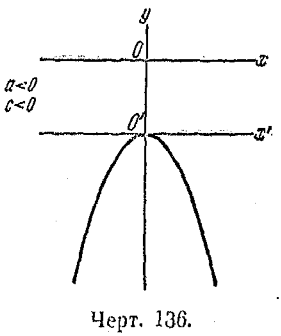


Черт. 134.



Черт. 135.

системы координат $x'O'y'$ нами уже изучено. Вершиной параболы $y = ax^2 + c$ является теперь точка $(0, c)$. На чертеже 133 изображена парабола $y = ax^2 + c$ при $a > 0$ и $c > 0$. На чертежах 134, 135, 136 изображены параболы $y = ax^2 + c$ при других различных комбинациях знаков a и c. Таким образом парабола $y = ax^2 + c$ получается из параболы $y = ax^2$ переносом её «вверх» (т. е. в направлении масштабного отрезка OE_2), если $c > 0$, и вниз, если $c < 0$.



Черт. 136.

Наконец, рассмотрим самый общий случай.

IV. $y = ax^2 + bx + c$.

Перепишем уравнение $y = ax^2 + bx + c$ так:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

или

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

и перенесём оси координат так, чтобы новым началом координат стала точка

$$O'\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right);$$

тогда новые координаты x', y' любой точки M' с её старыми координатами x, y будут связаны соотношением

$$y' = y - \frac{4ac - b^2}{4a}, \quad x' = x + \frac{b}{2a}$$

и в новой системе координат уравнение нашей параболы примет вид:

$$y' = ax'^2.$$

Таким образом парабола $y = ax^2 + bx + c$ из параболы $y = ax^2$ получается переносом. Вершиной параболы $y = ax^2 + bx + c$ является точка

$$O'\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Пример. $y = 2x^2 + 4x + 8$.
Имеем:

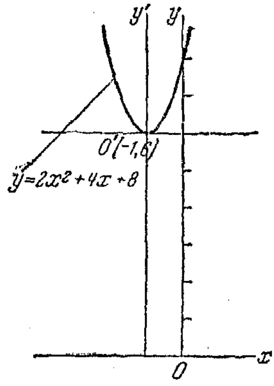
$$y = 2(x^2 + 2x + 4) = 2(x^2 + 2x + 1 + 3) = \\ = 2(x+1)^2 + 6$$

или

$$y - 6 = 2(x+1)^2;$$

перенося оси координат так, чтобы новым началом координат стала точка $(-1, 6)$, будем иметь

$$y' = 2x'^2 \text{ (черт. 137).}$$



Черт. 137.

Числа b и c в уравнении $y = ax^2 + bx + c$ параболы не влияют на её форму; их изменение приводит к поступательному перемещению параболы по плоскости. Например, параболы $y = 3x^2 + 2x + 1$, $y = 3x^2 - 7x + 5$, $y = 3x^2 - 101x + 257$ и т. д. все одинаковы и отличаются лишь положением на плоскости, так как для всех этих парабол $a = 3$, а только это число и определяет форму параболы.

Упражнение

96. Начертить графики следующих парабол:

1) $y = x^2 - 2x + 1$,
2) $y = -x^2 - 4x - 4$,
3) $y = x^2 + x + 1$,
4) $y = x^2 - 6x + 5$,
5) $y = -x^2 + 2x - 4$,
6) $y = -x^2 + 6x - 5$.

§ 43. Геометрическая интерпретация знака квадратного трёхчлена

В предыдущем параграфе мы установили, что вершина параболы

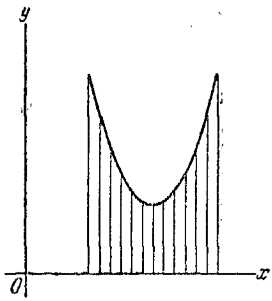
$$y = ax^2 + bx + c$$

находится в точке

$$O'\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

I. Если $\frac{4ac-b^2}{4a}>0$ или $a(4ac-b^2)>0$, то вершина параболы лежит над осью Ox, а если ещё при этом $a>0$, то парабола вогнута вверх и, значит, все её ординаты положительны (черт. 138).

При $a>0$ условие $a(4ac-b^2)>0$ равносильно следующему: $4ac-b^2>0$, а потому окончательно имеем: *если* $a>0$, $4ac-b^2>0$, *то* $ax^2+bx+c>0$ *при всех* x.

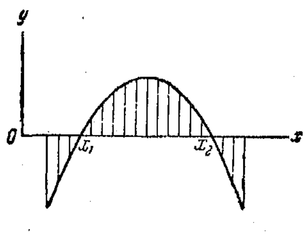


Черт. 138.

II. Если $\frac{4ac-b^2}{4a}>0$ и $a<0$, то вершина параболы лежит выше оси Ox, но парабола вогнута вниз и, значит, её ординаты между корнями функции ax^2+bx+c положительны, а вне корней — отрицательны (черт. 139). Если $a<0$, то условие $\frac{4ac-b^2}{4a}>0$ равносильно следующему: $4ac-b^2<0$. Итак, окончательно: *если* $a<0$, $4ac-b^2<0$, *то* $ax^2+bx+c>0$ *при всех* x, *входящих в интервал* (x_1, x_2), *где* x_1 *и* x_2 — *корни трёхчлена* ax^2+bx+c, *а при всех* $x<x_1$ *и при всех* $x>x_2$ *получим* $ax^2+bx+c<0$. *При* $x=x_1$ *и при* $x=x_2$ *трёхчлен* ax^2+bx+c *обращается в нуль — парабола пересекает ось* Ox. Подобными же рассуждениями приходим к выводам:

III. *Если* $a<0$, $4ac-b^2>0$, *то* $ax^2+bx+c<0$ *при всех* x (черт. 140).

IV. *Если* $a>0$, $4ac-b^2<0$, *то* $ax^2+bx+c<0$ *при всех* x, *входящих в интервал* (x_1, x_2), *где* x_1 *и* x_2 — *корни трёхчлена* ax^2+bx+c, *а при всех* $x<x_1$ *и при всех* $x>x_2$ *будем иметь* $ax^2+bx+c>0$. *При* $x=x_1$ *и при* $x=x_2$ *трёхчлен* ax^2+bx+c *обращается в нуль* (черт. 141).



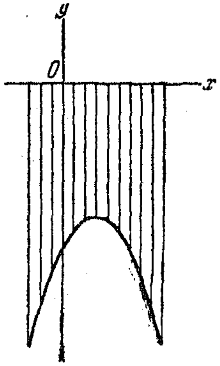
Черт. 139.

V. Если $a>0$, $4ac-b^2=0$, то вершина параболы лежит на оси Ox в точке $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$, а парабола вогнута вверх, и значит, все её ординаты положительны, за исключением ординаты, соответствующей точке $x=-\frac{b}{2a}$, в которой ордината равна нулю, т. е. *если* $a>0$, $4ac-b^2=0$, *то* $ax^2+bx+c>0$ *при всех* $x\neq-\frac{b}{2a}$, *а при* $x=-\frac{b}{2a}$ *трёхчлен* ax^2+bx+c *обращается в* 0 (черт. 142).

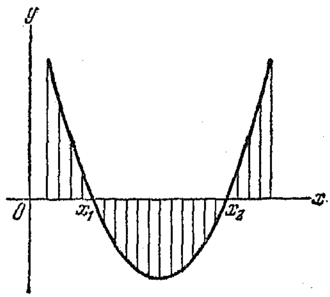
Наконец:

VI. *Если* $a < 0$, $4ac - b^2 = 0$, *то* $ax^2 + bx + c < 0$ *при всех* $x \neq -\frac{b}{2a}$, *а при* $x = -\frac{b}{2a}$ *трёхчлен* $ax^2 + bx + c$ *обращается в нуль* (черт. 143).

Указанная геометрическая интерпретация знака квадратного трёхчлена приводит к исследованию знака ординат параболы. С этой же точки зрения решение квадратного уравнения сводится к нахождению точек

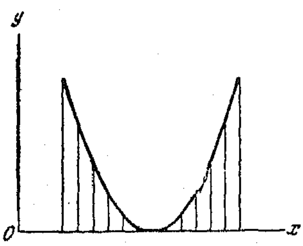


Черт. 140.

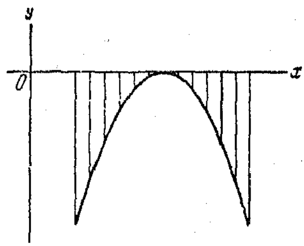


Черт. 141.

пересечения параболы с осью Ox; если парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось Ox в двух различных точках, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных действительных корня



Черт. 142.



Черт. 143.

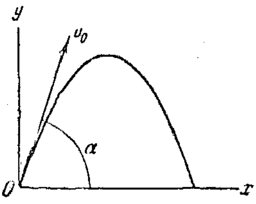
(абсциссы этих точек). Если парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается оси Ox (встречает её в одной точке), то квадратное уравнение имеет двукратный корень (абсцисса точки прикосновения) и, наконец, если парабола $y = ax^2 + bx + c$ не пересекает оси Ox, то корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ — мнимые.

Вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ соответствует (черт. 138) наименьшей ординате, т. е. наименьшему значению квадратного трёхчлена; так как абсцисса вершины равна $-\frac{b}{2a}$, то *при* $a>0$ *трёхчлен* ax^2+bx+c *имеет наименьшее значение при* $x=-\frac{b}{2a}$.

Точно так же *при* $a<0$ *трёхчлен* ax^2+bx+c *имеет наибольшее значение при* $x=-\frac{b}{2a}$ (черт. 140).

§ 44. Парабола как траектория точки, движущейся под действием силы тяжести. Параболический поворот и его свойства

Предположим, что из некоторой точки O под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 брошена материальная точка (черт. 144). Найдём уравнение траектории, которую будет описывать движущаяся точка.



Черт. 144.

Располагая оси координат так, как указано на чертеже 144, разложим скорость v_0 на две составляющие: горизонтальную $v_0\cos\alpha$ и вертикальную $v_0\sin\alpha$. По прошествии времени t точка M, находившаяся в начальный момент ($t=0$) в начале координат, пройдёт в горизонтальном направлении путь

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t,$$

а её высоту (т. е. ординату y) найдём из следующих соображений: под действием силы тяжести движущаяся точка опустится на расстояние $\frac{gt^2}{2}$ и поднимется на расстояние $v_0\sin\alpha\cdot t$, так как $v_0\sin\alpha$ есть вертикальная составляющая начальной скорости.

Итак,

$$y=v_0\cdot\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}.$$

Уравнения

$$x=v_0t\cos\alpha,\qquad y=v_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}$$

являются параметрическими уравнениями траектории. Из первого уравнения находим:

$$t=\frac{x}{v_0\cos\alpha};$$

второе уравнение принимает вид:

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

или

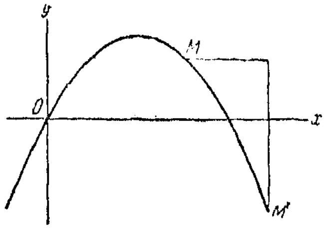
$$y=ax^2+bx,$$

где

$$a=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha},\quad b=\operatorname{tg}\alpha;$$

мы получили уравнение параболы, значит траектория точки M есть парабола.

Струя, «бьющая» под углом к горизонту, имеет (конечно, приблизительно) форму параболы. Возьмём на струе какую-нибудь точку $M(x, y)$ и найдём координаты x' и y' той точки $M'(x', y')$, в которую перейдёт точка $M(x, y)$ за некоторый отрезок времени (черт. 145). Будем рассуждать так: за рассматриваемый промежуток времени точка M в горизонтальном направлении пройдёт расстояние h, и значит абсцисса x' точки M' равна:



Черт. 145.

$$x' = x + h.$$

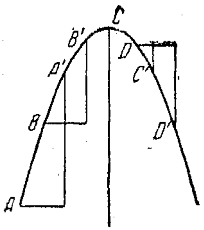
С другой стороны, точка M' лежит на параболе $y = ax^2 + bx$, значит, ординату её, т. е. y', мы найдём из уравнения параболы, подставляя $x + h$ вместо x:

$$y' = a(x+h)^2 + b(x+h) = ax^2 + bx + 2ahx + ah^2 + bh;$$

но $ax^2 + bx$ есть ордината y точки M, значит $ax^2 + bx = y$ и окончательно: $y' = y + 2ahx + ah^2 + bh$. Итак, координаты точки M':

$$x' = x + h, \quad y' = y + 2ahx + ah^2 + bh. \tag{1}$$

Замечательно, что если мы возьмём другую точку N параболы $y = ax^2 + bx$, то за тот же промежуток времени она пройдёт в горизонтальном направлении то же самое расстояние h, и значит, координаты точки N', в которую перейдёт точка N за рассматриваемый промежуток времени, будут вычисляться по тем формулам, с тем же значением h.



Черт. 146.

Итак, формулами (1) определяются координаты точки, в которую перейдёт любая точка струи за некоторый промежуток времени. На чертеже 146 построены новые положения нескольких точек струи: каждая из точек A, B, C, $D, \ldots$ параболы пройдёт направо одно и то же расстояние и останется на той же параболе. Это соображение и даёт возможность построить точки A', B', C', $D', \ldots$, в которые перейдут точки $A, B, C, D, \ldots$ Полезно обратить внимание ещё на то, что с течением времени расстояния между точками $A', B', C', D', \ldots$ будут расти, падающая струя будет растягиваться (фактически, в конце концов, струя разорвётся на ряд отдельных капель).

Все эти соображения механического характера имеют и чисто геометрическую сущность, которая заключается в следующем.

Рассмотрим семейство парабол

$$y = ax^2 + c,$$

где число a будем считать фиксированным, а числу c будем придавать всевозможные действительные значения (черт. 147).

Возьмём на плоскости произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ и рассмотрим параболу

$$y = ax^2 + c,$$

проходящую через эту точку. Тогда $y_0 = ax_0^2 + c$, значит, $c = y_0 - ax_0^2$, и уравнение параболы примет вид:

$$y = ax^2 + (y_0 - ax_0^2).$$

Перейдём от точки $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на указанной параболе, к точке $M_0'(x_0', y_0')$, лежащей на той же параболе, причём будем считать, что абсцисса точки M_0 получила некоторое вполне определённое приращение h для всех точек плоскости:

$$x_0' = x_0 + h.$$

Найдём y_0':

$$y_0' = ax_0'^2 + (y_0 - ax_0^2) = a(x_0 + h)^2 + (y_0 - ax_0^2) = \\ = 2ax_0h + y_0 + ah^2.$$

Итак,

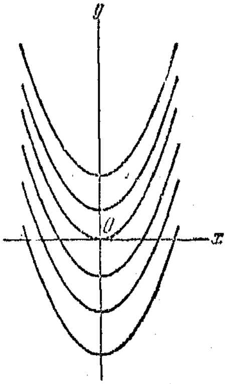
$$x_0' = x_0 + h,$$
$$y_0' = 2ax_0h + y_0 + ah^2$$

или, опуская индексы:

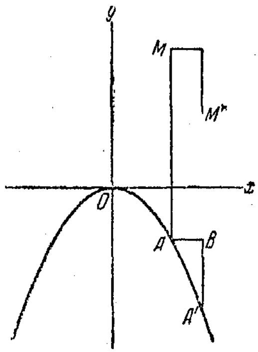
$$\left.\begin{aligned} x' &= x + h, \\ y' &= 2axh + y + ah^2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Этими формулами определяется преобразование плоскости, называемое параболическим поворотом. Найдём приращения координат точки при параболическом повороте:

$$x' - x = h,$$
$$y' - y = 2ahx + ah^2.$$



Черт. 147.



Черт. 148.

Отсюда видно, что приращение ординаты точки зависит лишь от абсциссы этой точки (x) и от приращения абсцисс (h) (a, фиксировано!). Значит для построения образа M' точки M плоскости нет надобности «покрывать» плоскость семейством парабол

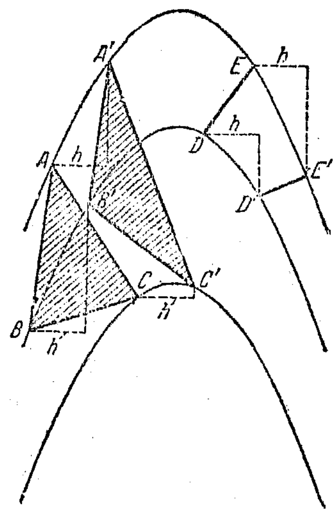
$$y = ax^2 + c$$

и выбирать параболу, проходящую через точку M. Проще поступить так: через точку M провести прямую, параллельную оси параболы $y=ax^2$ до встречи с этой параболой в точке A (черт. 148). Затем произвести параболический поворот точки A ($A \rightarrow A'$), а затем для точки M произвести те же приращения координат, что и для точки A. На чертеже 149 построен таким образом ряд геометрических фигур и их образов в параболическом повороте.

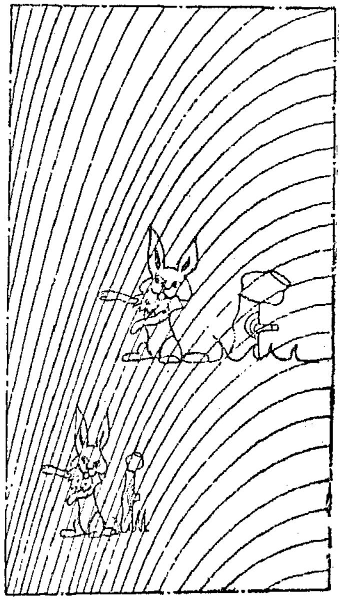
На чертеже 150 показан параболический поворот рисунка.

Параболический поворот обладает теми же свойствами, какие мы указывали для сдвига, сжатия и гиперболического поворота.

Доказательство всех этих свойств проводится в точности по той же схеме рассуждений,



Черт. 149.



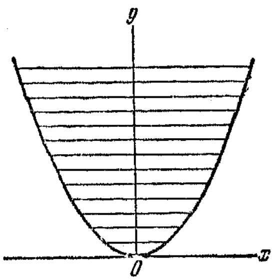
Черт. 150.

по которой проводилось доказательство этих свойств для сдвига, сжатия и гиперболического поворота, и потому мы предоставляем эти рассуждения провести читателю самостоятельно (см. также упражнение 43).

§ 45. Диаметры параболы

Докажем, что *середины параллельных хорд данного направления параболы лежат на одной прямой. Эта прямая называется диаметром параболы, сопряжённым хордам данного направления.*

В самом деле: рассмотрим параболу $y=ax^2$ (черт. 151). Мы уже выше говорили, что ось Oy для параболы $y=ax^2$ является осью симметрии, значит, середины хорд, перпендикулярных к этой оси, лежат на этой прямой (на оси параболы). Произведём параболический поворот. Тогда хорды параболы $y = ax^2$ перейдут в хорды той же параболы, так как при параболическом повороте точки параболы с неё «не сходят»; параллельность хорд сохранится (почему?), середины хорд параболы $y = ax^2$, перпендикулярных к её оси симметрии, перейдут в середины соответствующих хорд параболы нового направления и, наконец, так как середины хорд параболы, перпендикулярных к её оси симметрии, лежат на одной прямой, то после параболического поворота середины повёрнутых хорд будут лежать на одной прямой (точки, лежащие на одной прямой, после параболического поворота остаются на одной прямой, а кроме того, середина отрезка после параболического поворота переходит в середину образа отрезка). Итак, середины хорд нового направления будут лежать на одной прямой — диаметре параболы, который получается переносом оси симметрии параболы, так как середины хорд параболы, перпендикулярных к её оси симметрии, лежат на этой оси (черт. 152).



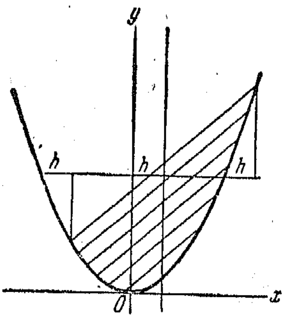
Черт. 151.

Необходимо ещё решить вопрос: можно ли параболическим поворотом получить из хорд параболы, перпендикулярных к её оси симметрии, все хорды параболы. Оказывается, что можно. Докажем это.

Рассмотрим точки $O(0, 0)$ и $E_1(1, 0)$. Отрезок OE_1 даёт направление хорд, перпендикулярных к её оси симметрии. После параболического поворота точки O и E_1 в силу формул (2) § 44 перейдут в точки $O'(h, ah^2)$ и $E_1'(1+h, 2ah+ah^2)$. Угловой коэффициент прямой $O'E_1'$, в которую переходит прямая OE_1, равен:

$$k = \frac{2ah + ah^2 - ah^2}{1 + h - h} = 2ah. \qquad (1)$$

Отсюда ясно, что h можно всегда выбрать таким, что k будет любым наперёд заданным действительным числом, т. е. из хорд параболы, перпендикулярных к её оси симметрии, параболическим поворотом можно получить хорды любого направления (k), кроме, конечно, направления самой оси симметрии (не имеющей углового коэффициента). Но хорд, параллельных оси симметрии, у параболы и не существует, ибо любая прямая $x = h$, коллинеарная оси симметрии параболы $y = ax^2$, встречает последнюю только в одной точке (h, ah^2). Значит параболическим поворотом можно получить



Черт. 152.

все хорды параболы из хорд параболы, параллельных её оси симметрии. Мы видим, что *все диаметры параболы коллинеарны её оси симметрии и любая такая прямая является диаметром* (т. е. делит пополам хорды некоторого направления).

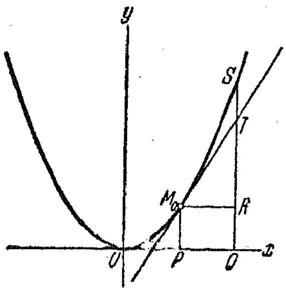
Упражнения

97. Найти угловой коэффициент хорд, сопряжённых диаметру $x=3$ параболы $y=6x^2$.

98. Дана парабола $y=3x^2$. Составить уравнение её хорды, делящейся в точке (1,5) пополам.

§ 46. Касательная к параболе

Определение касательной к параболе таково же, как для эллипса и гиперболы: *касательной к параболе в данной на ней точке называется прямая, проходящая через эту точку и имеющая направление хорд, сопряжённых с диаметром, проходящим через ту же точку.* Например, на основании этого определения касательной к параболе $y=ax^2$ в её вершине будет ось Ox, так как диаметр, проходящий через вершину параболы, является осью симметрии параболы, а хорды, ему сопряжённые, к нему перпендикулярны (так же, как и ось Ox).

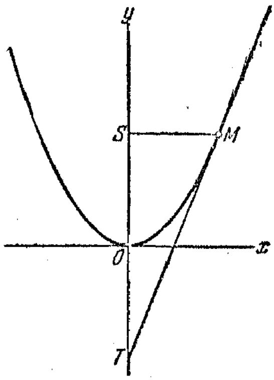


Черт. 153.

Из данного определения касательной к параболе и свойств параболического поворота следует, что при параболическом повороте касательная к параболе будет оставаться касательной к параболе, так как точка прикосновения будет скользить по параболе (поворот — параболический!), диаметр, проходящий через точку прикосновения, будет переходить в диаметр, проходящий через новую точку прикосновения (так как диаметр, при параболическом повороте смещается параллельно самому себе и значит остаётся параллельным оси симметрии, т. е. остаётся диаметром). Затем вместе с диаметром повернутся и хорды, которые он попрежнему будет делить пополам, и, наконец, касательная как прямая, параллельная хордам и проходящая через точку прикосновения, будет переходить в прямую, параллельную хордам нового направления, проходящую через новую точку прикосновения.

На чертеже 153 построена касательная к параболе $y=ax^2$ в произвольной точке при помощи параболического поворота касательной в её вершине.

Легко составить и уравнение касательной к параболе в точке $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на параболе: рассмотрим диаметр $x=x_0$ параболы, проходящей через точку M_0. Угловой коэффициент хорд, которые он делит пополам, будет $k = 2ax_0$ (см. формулу (1) § 45); отсюда находим уравнение самой касательной



Черт. 154.

$$y - y_0 = 2ax_0(x - x_0)$$

или, упрощая:

$$y - ax_0^2 = 2ax_0x - 2ax_0^2,$$

$$y + ax_0^2 = 2ax_0x \text{ (так как } y_0 = ax_0^2),$$

и, наконец,

$$y + y_0 = 2ax_0x. \qquad (1)$$

Из этого уравнения следует, что касательная пересекает ось симметрии параболы $y = ax^2$ в точке $(0, -y_0)$, т. е. в точке, симметричной относительно оси Ox середине хорды, проходящей через точку прикосновения перпендикулярно к оси симметрии. Это даёт геометрический способ для построения касательной к параболе в данной на ней точке (черт. 154). Из точки M опускаем перпендикуляр MS на ось симметрии, затем строим на оси симметрии параболы точку T такую, что $OS = OT$; тогда MT — касательная к параболе в точке M.

Упражнения

99. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке (1,1).

100. Составить уравнение касательной к параболе $y = 3x^2$, параллельной прямой $y = 2x + 3$.

§ 47. Фокус параболы

Если парабола задана уравнением $y = ax^2$, то точка $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ называется фокусом параболы. Фокус параболы обладает следующим замечательным свойством: *пучок лучей, проходящих через фокус, после отражения от параболы становится пучком лучей, параллельных её оси симметрии* (черт. 155). Для доказательства изложенного свойства фокуса $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ возьмём на параболе $y = ax^2$ любую точку $M_0(x_0, y_0)$ и докажем, что угол, образованный отрезком FM_0 и касательной, проведённой к параболе в точке M_0, равен углу α между диаметром и той же касательной (черт. 156). Найдём сначала длину d отрезка FM_0:

$$d = \sqrt{(0 - x_0)^2 + \left(\frac{1}{4a} - y_0\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{16a^2} - \frac{1}{2a}y_0 + y_0^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{a}y_0 + \frac{1}{16a^2} - \frac{1}{2a}y_0 + y_0^2} = \sqrt{\frac{1}{16a^2} + \frac{1}{2a}y_0 + y_0^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{4a} + y_0\right)^2} = y_0 + \frac{1}{4a}.$$

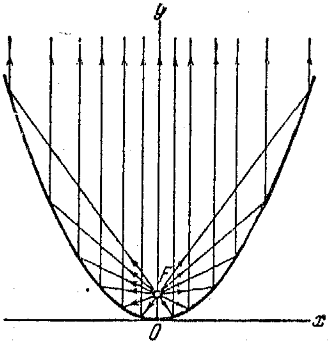
С другой стороны, касательная к параболе в точке M_0 пересекает ось симметрии в точке с координатами $0, -y_0$; отсюда

$$FD = \frac{1}{4a} + OD = \frac{1}{4a} + y_0;$$

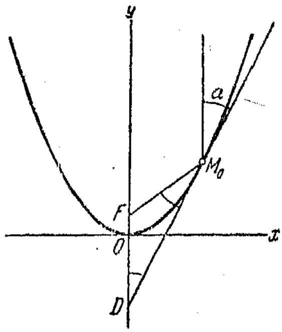
значит треугольник M_0FD равнобедренный, следовательно,

$$\angle FM_0D = \angle FDM_0.$$

Но световой луч, падающий на параболу, отражается от неё как от касательной, проведённой к параболе в точке падения луча.

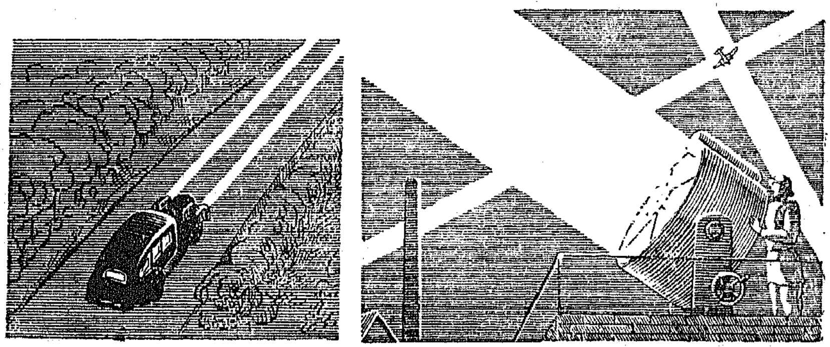


Черт. 155.



Черт. 156.

Следовательно, наше положение доказано. Этим свойством параболы широко пользуются на практике. Ослабление силы освещённости



Черт. 157.

«точечных» источников света (электрическая лампочка, вольтова дуга и т. д.) происходит очень быстро по мере удаления освещаемого предмета от источника света. Но если этот источник поместить в фокусе параболического зеркала, то отражённые лучи будут образовывать пучок параллельных лучей и можно освещать предметы, находящиеся на больших расстояниях. Именно так и устраиваются автомобильные фары, прожекторы и т. д. (черт. 157).

Упражнения

101. На параболе $y = \frac{1}{8}x^2$ найти точку, отстоящую от её фокуса на расстоянии 20.

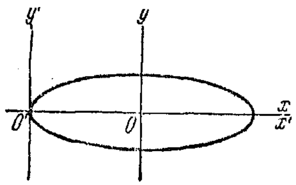
102. Через фокус параболы $y = ax^2$ перпендикулярно к её оси симметрии проведена хорда. Найти длину этой хорды.

ГЛАВА VIII

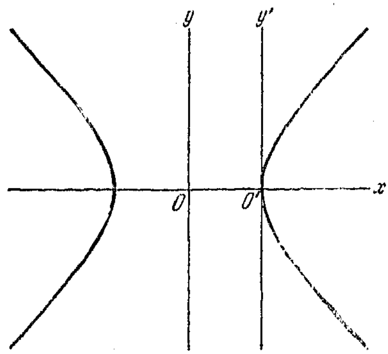
КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

§ 48. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы, отнесённых к вершине

Рассмотрим эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Перенесём оси координат так, чтобы новым началом координат была бы левая вершина этого эллипса (черт. 158). Тогда формулы для преобразования координат при переносе осей примут вид: $x=x'-a, y=y'$, а уравнение эллипса в новой системе будет иметь вид:



Черт. 158.



Черт. 159.

$$\frac{(x'-a)^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

или

$$y'^2=2\frac{b^2}{a}x'-\frac{b^2}{a^2}x'^2,$$

или

$$y'^2=2px'+qx'^2, \tag{I}$$

где $p=\frac{b^2}{a}$ называется **параметром** эллипса, а $q=-\frac{b^2}{a^2}$.

Рассмотрим гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Перенесём оси координат так, чтобы новым началом координат была бы правая вершина гиперболы (черт. 159).

Тогда

$$x = x' + a,\ y = y',$$

и уравнение нашей гиперболы в новой системе примет вид:

$$\frac{(x'+a)^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

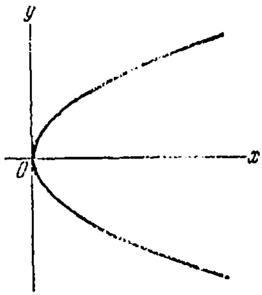
или

$$y'^2 = 2\frac{b^2}{a}x' + \frac{b^2}{a^2}x'^2,$$

или

$$y'^2 = 2px' + qx'^2, \tag{2}$$

где $p = \frac{b^2}{a}$ называется **параметром** гиперболы, а $q = \frac{b^2}{a^2}$.



Черт. 160.

Заметим, наконец, что уравнение

$$y'^2 = 2px' \tag{3}$$

определяет параболу, осью симметрии которой служит ось Ox (черт. 160).

Итак, мы приходим к выводу: эллипс, гипербола, парабола могут быть определены уравнением одного и того же вида:

$$y'^2 = 2px' + qx'^2, \tag{4}$$

причём для эллипса $q < 0$, для гиперболы $q > 0$, а для параболы $q = 0$. Число p — некоторое положительное число. Нетрудно видеть, что и обратно: при любом $p > 0$ и q уравнение $y'^2 = 2px' + qx'^2$ определяет эллипс, гиперболу, если $q > 0$, и параболу, если $q = 0$. В самом деле, пусть $q < 0$, тогда, полагая

$$p = \frac{b^2}{a} \quad \text{и} \quad q = -\frac{b^2}{a^2},$$

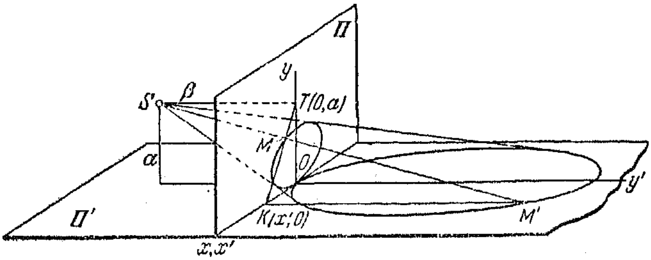
найдём полуоси a и b эллипса, для которого уравнение $y'^2 = 2px' + qx'^2$ будет уравнением, отнесённым к вершине. Аналогично проводится рассуждение и для случая $q > 0$. Если же $q = 0$, то мы сразу получаем уравнение параболы $y'^2 = 2px'$.

§ 49. Эллипс, гипербола и парабола как проекции круга

Исходя из уравнения $y'^2 = 2px' + qx'^2$, можно доказать, что всякий эллипс, гиперболу и параболу можно получить центральной проекцией окружности.

В самом деле: рассмотрим две взаимно перпендикулярные плоскости Π и Π' и пусть в плоскости Π лежит окружность, касающаяся в точке O линии Ox пересечения плоскостей Π и Π' (черт. 161). Поместим центр S проекции в точке, лежащей в плоскости, проходящей через точку O перпендикулярно к прямой Ox. Пусть α и β — расстояния от центра S проекции до плоскостей Π и Π'. Через точку O проведём прямые Oy и Oy', перпендикулярные к прямой Ox и лежащие соответственно в плоскостях Π и Π'; примем их за оси ординат, а за оси абсцисс примем прямую Ox (или Ox') пересечения плоскостей П и П'; таким образом мы ввели декартовы прямоугольные системы координат в плоскостях П и П'.

Пусть $M(x, y)$ — любая точка плоскости П, а $M'(x', y')$ — её проекция в



Черт. 161.

плоскость П' из центра S. Тогда из условия коллинеарности точек $T(0, \alpha)$, $M(x, y)$ и $K(x', 0)$ будем иметь:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Далее: треугольник STM подобен треугольнику MKM', поэтому

$$\frac{KM'}{ST} = \frac{KM}{MT}$$

или

$$\frac{y'}{\beta} = \frac{x - x'}{0 - x},$$

или

$$\frac{y'}{\beta} = -1 + \frac{x'}{x}$$

и значит

$$x = \frac{\beta x'}{y' + \beta}.$$

Теперь из соотношения $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0$ находим:

$$x'\alpha - x\alpha - x'y = 0,$$

$$x'\alpha - \frac{\alpha\beta x'}{y' + \beta} - x'y = 0,$$

$$y = \frac{\alpha y'}{y' + \beta};$$

соотношения

$$x = \frac{\beta x'}{y' + \beta}, \quad y = \frac{\alpha y'}{y' + \beta} \tag{1}$$

устанавливают соответствие между точками плоскостей П и П'. Соответствие это называется **проективным** (так как оно достигается с помощью проектирования).

Посмотрим теперь, во что перейдёт при указанном отображении окружность

$$x^2+y^2-2y=0$$

радиуса 1, лежащая в плоскости Π и касающаяся оси Ox в точке O. Имеем:

$$\frac{\beta^2 x'^2}{(y'+\beta)^2}+\frac{\alpha^2 y'^2}{(y'+\beta)^2}-2\frac{\alpha y'}{y'+\beta}=0$$

или

$$x'^2=\frac{2\alpha}{\beta}y'+\frac{2\alpha-\alpha^2}{\beta^2}y'^2,$$

или, полагая

$$\frac{\alpha}{\beta}=p, \qquad \frac{2\alpha-\alpha^2}{\beta^2}=q,$$

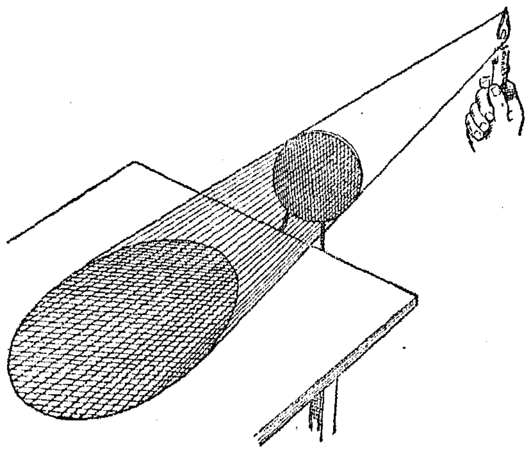
мы получим:

$$x'^2=2py'+qy'^2,$$

т. е. рассматриваемая окружность переходит либо в эллипс, либо в гиперболу, либо в параболу. Так как

$$q=\frac{2\alpha-\alpha^2}{\beta^2},$$

то знак q определяется знаком числа $2\alpha-\alpha^2=\alpha(2-\alpha)$. Ясно, что при $\alpha>2$ это число $q<0$ и значит, если центр проекции «выше» данной окружности (2 есть диаметр окружности), то проекция окружности будет эллипс. Если $\alpha=2$, т. е. центр проекции лежит на высоте, равной диаметру окружности, то проекция окружности — парабола. Наконец, если $0<\alpha<2$, центр проекции лежит на высоте, меньшей диаметра окружности, то $q>0$ и проекция окружности — гипербола. Полезно проследить, что будет происходить, если, сохраняя β, постепенно уменьшать α. Считая S центральным источником света, можно рассматривать проекцию окружности в плоскость Π как тень этой окружности; если мы будем опускать источник света S, то тень окружности будет удлиняться, «вытягиваться», эллипс будет вытягиваться вправо, затем в момент, когда источник света будет на высоте от плоскости тени, равной диаметру окружности, эллипс «разорвётся» в параболу, а ещё небольшое понижение источника света превратит тень окружности из параболы в ветвь гиперболы. Мы рекомендуем произвести этот опыт: вырежьте из бумаги окружность, прикрепите её к плоскости стола так, чтобы плоскость её была бы перпендикулярна к плоскости стола, и наблюдайте за тенью этой окружности, например, от свечи (черт. 162).



Черт. 162.

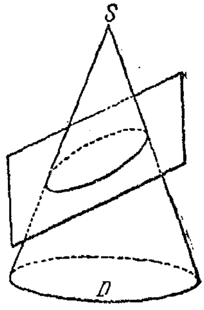
Возникает ещё ряд вопросов: 1) можно ли, изменяя расстояние центра проекции от плоскости П и от плоскости П', получить в проекции любой эллипс, или любую гиперболу, или любую параболу? Так как размеры параболы, эллипса и гиперболы вполне определяются числами p и q в уравнении, отнесённом к вершине, то аналитически вопрос этот сводится к следующему: даны p и q; можно ли подобрать α и β такими, чтобы

$$\frac{\alpha}{\beta}=p, \quad \frac{2\alpha-\alpha^2}{\beta^2}=q.$$

Эти уравнения можно разрешить относительно α и β:

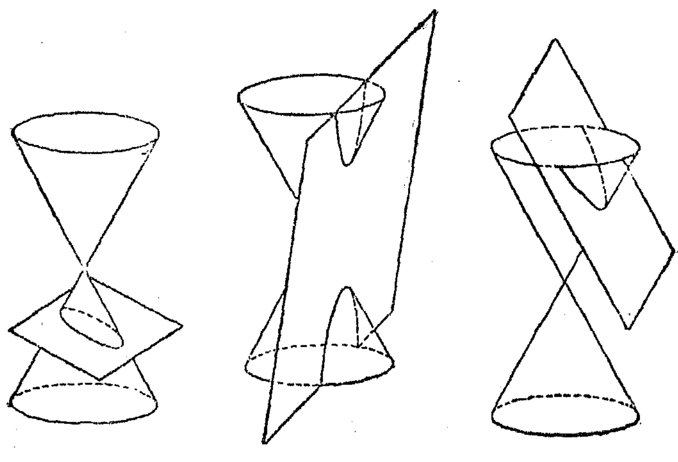
$$\alpha=\frac{2p^2}{p^2+q}, \quad \beta=\frac{2p}{p^2+q},$$

и значит в случае $p^2+q\neq 0$ можно получить линию проекцией окружности радиуса 1. Если же $p^2+q=0$, то можно взять радиус окружности равным, например, 2 и получить проектированием те кривые, которые не получались проектированием окружности радиуса 1.



Черт. 163.

Можно поставить и такой вопрос: 2) а что получится, если проектировать окружность из любого центра проекции на любую плоскость? Ответ на этот вопрос таков: если в проекции получится кривая, то это будет опять либо эллипс, либо гипербола, либо парабола. Подробного исследования мы здесь приводить не будем. Отметим только, что из сказанного следует, что если пересекать обыкновенный круглый конус так, чтобы в сечении получилась кривая (т. е. чтобы плоскость сечения не проходила бы через вершину конуса), то в сечении получится либо эллипс, либо гипербола, либо парабола, так как сечение круглого конуса можно рассматривать как проекцию из вершины S конуса — окружности D сечения плоскостью, перпендикулярной к оси конуса, в плоскость наклонного сечения (черт. 163).


Черт. 164.

Сечения круглого конуса могут быть исследованы и совершенно самостоятельно вне связи с общей задачей о проекции окружности. Именно так исторически и возникло учение об эллипсе, гиперболе и параболе. Эти линии называются поэтому ещё **коническими сечениями**.

Отметим, без доказательства, что если взять любой круглый конус, то его сечением могут быть получены любой эллипс и любая парабола, но любая гипербола сечением заданного круглого конуса не может быть получена. На чертеже 164 изображены сечения круглого конуса: если плоскость не проходит через вершину конуса, а пересекает все его образующие, то в сечении получается эллипс; если плоскость не проходит через вершину конуса и пересекает все его образующие кроме одной, то в сечении получается парабола и, наконец, если плоскость не проходит через вершину конуса и пересекает все его образующие, кроме двух, то в сечении образуется гипербола.

ГЛАВА IX

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 50. Линия второго порядка

В предыдущих главах мы изучали три линии: эллипс, гиперболу и параболу. Эти линии, как, вероятно, заметил читатель, родственны и с чисто геометрической точки зрения и с точки зрения аналитической. Именно: все они получаются при центральном проектировании окружности или все они получаются как сечения кругового конуса. Аналитически все эти линии могут быть записаны уравнением одного и того же вида:

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Обращаем внимание читателя ещё на следующее важное обстоятельство: только что указанное уравнение и канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \ y = ax^2$$

в декартовой системе координат являются уравнениями второй степени относительно координат x и y. По этой причине эти линии называются также *линиями второго порядка*.

Поставим следующий вопрос: какие линии определяются вообще уравнением второй степени между x и y в косоугольной или прямоугольной декартовой системе координат? Оказывается, что, не считая ряда случаев, представляющих небольшой геометрический интерес *), общее уравнение второй степени между x и y определяет одну из уже изученных линий: эллипс, гиперболу или параболу. Выяснению этого вопроса посвящена настоящая глава.

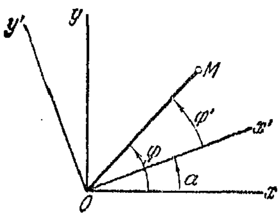
В дальнейших исследованиях мы ограничимся декартовой прямоугольной системой координат.

---

*) А именно, случаев, когда общее уравнение второй степени определяет пару прямых или не определяет вообще никакой линии (см. ниже, § 54, теорема 2).

§ 51. Поворот декартовых прямоугольных осей координат

Для дальнейших исследований нам понадобится решить такую задачу: оси Ox и Oy декартовой прямоугольной системы координат поворачиваются около начала координат на ориентированный угол α (черт. 165), так что получается новая декартова прямоугольная система координат $x'Oy'$.



Черт. 165.

Каждая точка M плоскости в системе xOy имеет координаты x и y, а в системе $x'Oy'$ она имеет координаты x' и y'. Найти зависимость между старыми и новыми координатами точки M.

Решение. Пусть r и φ—старые полярные координаты точки M (если за полярную ось принята ось Ox), а r' и φ' — новые полярные координаты той же точки M (если за полярную ось принять ось Ox'). Тогда

$$r'=r,\quad \varphi=\varphi'+\alpha,$$

откуда

$$\begin{aligned} x = r\cos\varphi = r'\cos(\varphi'+\alpha) &= r'\cos\varphi'\cos\alpha - r'\sin\varphi'\sin\alpha = \\ &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = r\sin\varphi = r'\sin(\varphi'+\alpha) &= r'\sin\varphi'\cos\alpha + r'\cos\varphi'\sin\alpha = \\ &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}$$

Итак, окончательно

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Эти формулы называются формулами поворота.

§ 52. Приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду

Общее уравнение второй степени между x и y мы будем записывать так:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0. \qquad (1)$$

Все коэффициенты в левой части этого уравнения обозначены одной буквой a с индексами, указывающими, какая координата и сколько раз множителем входит в соответствующий член (например, a_{22} — коэффициент при квадрате второй координаты). Через a_{12}, a_1, a_2 обозначены половины коэффициентов при xy, x и y для симметрии последующих формул.

Пример. $3x^2 - 5xy + 4y - x + 3 = 0$.

Здесь $a_{11}=3,\ a_{12}=-\frac{5}{2},\ a_{22}=0,\ a_1=-\frac{1}{2},\ a_2=2,\ a=3,$

Теорема 1. *Если в общем уравнении*

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0 \tag{1}$$

линии второго порядка коэффициент при произведении разноимённых координат не равен нулю, т. е. $a_{12}\neq 0$, *то можно повернуть оси декартовой прямоугольной системы координат на такой ориентированный угол* α, *что в преобразованном уравнении коэффициент при произведении новых координат* $x'y'$ *обратится в нуль и, следовательно, преобразованное уравнение примет вид:*

$$A_{11}x'^2+A_{22}y'^2+2A_1x'+2A_2y'+a=0. \tag{2}$$

Доказательство. Произведём поворот осей координат пока на произвольный ориентированный угол α. Подставляя x и y из формул поворота в наше уравнение, получим преобразованное уравнение в виде:

$$\begin{aligned}a_{11}(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+2a_{12}(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+\\+a_{22}(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+2a_1(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+\\+2a_2(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+a=0\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}(a_{11}\cos^2\alpha+2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha+a_{22}\sin^2\alpha)x'^2+\\+2(-a_{11}\cos\alpha\sin\alpha+a_{12}\cos^2\alpha-a_{12}\sin^2\alpha+a_{22}\cos\alpha\sin\alpha)x'y'+\\+(a_{11}\sin^2\alpha-2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha+a_{22}\cos^2\alpha)y'^2+\\+2(a_1\cos\alpha+a_2\sin\alpha)x'+2(-a_1\sin\alpha+a_2\cos\alpha)y'+a=0,\end{aligned} \tag{3}$$

или

$$A_{11}x'^2+2A_{12}x'y'+A_{22}y'^2+2A_1x'+2A_2y'+a=0, \tag{4}$$

где положено:

$$A_{11}=a_{11}\cos^2\alpha+2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha+a_{22}\sin^2\alpha, \tag{5}$$

$$A_{12}=-a_{11}\cos\alpha\sin\alpha+a_{12}\cos^2\alpha-a_{12}\sin^2\alpha+a_{22}\cos\alpha\sin\alpha, \tag{6}$$

$$A_{22}=a_{11}\sin^2\alpha-2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha+a_{22}\cos^2\alpha, \tag{7}$$

$$A_1=a_1\cos\alpha+a_2\sin\alpha, \tag{8}$$

$$A_2=-a_1\sin\alpha+a_2\cos\alpha. \tag{9}$$

Мы хотим подобрать такое α, чтобы в преобразованном уравнении обратился в нуль член с произведением координат $x'y'$, т. е. чтобы $A_{12}=0$ или

$$-a_{11}\cos\alpha\sin\alpha+a_{12}\cos^2\alpha-a_{12}\sin^2\alpha+a_{22}\cos\alpha\sin\alpha=0; \tag{10}$$

написанное соотношение есть тригонометрическое уравнение относительно α (уравнение (1) считается данным, а потому все коэффициенты, входящие в его левую часть, надо считать известными). Покажем прежде всего, что уравнению (10) не удовлетворяют углы α, для которых $\cos\alpha=0$. В самом деле, предполагая $\cos\alpha=0$, будем иметь $\sin\alpha = \pm 1$ и из (10) получаем $-a_{12}=0$, что противоречит условию теоремы. Значит, разделив левую часть уравнения (10) на $-a_{12}\cos^2\alpha$, получим уравнение

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0, \tag{11}$$

эквивалентное уравнению (10). Корни этого квадратного уравнения относительно $\operatorname{tg}\alpha$ всегда действительные (почему?), и, более того, мы можем сказать, что один из корней уравнения (11) $\operatorname{tg}\alpha = p$ положителен, $p>0$, другой $\operatorname{tg}\alpha = q$ отрицателен. Будем в дальнейшем всегда брать положительный корень $\operatorname{tg}\alpha = p > 0$ уравнения (11). Взяв этот корень: $\operatorname{tg}\alpha = p > 0$, вычислив по $\operatorname{tg}\alpha$ функции $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, которые мы также всегда можем брать положительными, и подставляя найденные значения $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ в формулы поворота, а x и y из этих формул в левую часть начального уравнения, мы и получим уравнение вида:

$$A_{11}x'^2 + A_{22}y'^2 + 2A_1x' + 2A_2y' + a = 0.$$

Теорема доказана.

Уравнение

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0,$$

из которого находится угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha$ новой оси Ox' системы координат, в которой уравнение не содержит члена с $x'y'$, будем называть уравнением, определяющим главные направления данной линии второго порядка.

Пример 1.

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Составляем уравнение, определяющее главные направления:

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{8}{3}\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0,$$

откуда берём:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{1};$$

значит

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \qquad \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Формулы поворота принимают вид:

$$x = \frac{x'-3y'}{\sqrt{10}}, \qquad y = \frac{3x'+y'}{\sqrt{10}},$$

а данное уравнение преобразуется в следующее:

$$6\,\frac{x'-3y'}{\sqrt{10}}\cdot\frac{3x'+y'}{\sqrt{10}} + 8\left(\frac{3x'+y'}{\sqrt{10}}\right)^2 - 12\,\frac{x'-3y'}{\sqrt{10}} - 26\,\frac{3x'+y'}{\sqrt{10}} + 11 = 0,$$

или

$$9x'^2 - y'^2 - 9\sqrt{10}x' + \sqrt{10}y' + 11 = 0.$$

Теорема 2. *Общее уравнение*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

(a_{11}, a_{12} и a_{22} — *не равны нулю одновременно*) *линии второго порядка, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат, поворотом и переносом осей координат и делением левой части на число, не равное нулю, может быть приведено к одному из следующих девяти видов:*

1-я группа

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$$ $\boxed{1}$ эллипс

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0$$ $\boxed{2}$ мнимый эллипс

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$$ $\boxed{3}$ две мнимые пересекающиеся прямые

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$$ $\boxed{4}$ гипербола

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$$ $\boxed{5}$ две пересекающиеся прямые

2-я группа

$$Y = aX^2$$ $\boxed{6}$ парабола

3-я группа

$$X^2 - a^2 = 0$$ $\boxed{7}$ две параллельные прямые

$$X^2 + a^2 = 0$$ $\boxed{8}$ две мнимые параллельные прямые

$$X^2 = 0$$ $\boxed{9}$ две совпадающие прямые,

где все параметры (a *и* b) *положительны.*

Доказательство. На основании предыдущей теоремы поворотом прямоугольной системы координат данное нам уравнение может быть приведено к виду

$$A_{11}x'^2 + A_{22}y'^2 + 2A_1x' + 2A_2y' + a = 0. \qquad (\alpha)$$

Случай I

Мы будем говорить, что линия второго порядка является линией второго порядка первой группы, если в её уравнении, свободном от произведения разноимённых координат, оба коэффициента при квадратах координат не равны нулю, т. е.

$$A_{11} \neq 0 \text{ и } A_{22} \neq 0.$$

В этом случае преобразуем уравнение α так:

$$A_{11}\left(x'^2+2\frac{A_1}{A_{11}}x'\right)+A_{22}\left(y'^2+2\frac{A_2}{A_{22}}y'\right)+a=0,$$

$$A_{11}\left(x'+\frac{A_1}{A_{11}}\right)^2+A_{22}\left(y'+\frac{A_2}{A_{22}}\right)^2+a-\frac{A_1^2}{A_{11}}-\frac{A_2^2}{A_{22}}=0.$$

Полагая для краткости

$$a-\frac{A_1^2}{A_{11}}-\frac{A_2^2}{A_{22}}=A$$

и перенося оси $x'Oy'$ так, чтобы новое начало координат O' новой системы координат $XO'Y$ в системе $x'Oy'$ имело бы координаты $-\frac{A_1}{A_{11}}$ и $-\frac{A_2}{A_{22}}$, т. е. полагая

$$X=x'+\frac{A_1}{A_{11}},\qquad Y=y'+\frac{A_2}{A_{22}},$$

мы приведём последнее уравнение к виду:

$$A_{11}X^2+A_{22}Y^2+A=0,\quad A_{11}\neq 0,\quad A_{22}\neq 0. \tag{I}$$

Это уравнение мы будем называть **приведённым** уравнением линий второго порядка первой группы. Ясно, что в зависимости от значений A_{11}, A_{22}, A мы получим одно из уравнений $\boxed{1}$ — $\boxed{5}$; при этом, конечно, возможно, придётся разделить левую часть уравнения $\boxed{\text{I}}$ на число, отличное от нуля. Следует ещё заметить, что в случае $A_{11}<0$, $A<0$, $A_{22}>0$ мы получим

$$\frac{X^2}{-\frac{A}{A_{11}}}+\frac{Y^2}{-\frac{A}{A_{22}}}-1=0$$

и, полагая

$$-\frac{A}{A_{11}}=-b^2,\quad -\frac{A}{A_{22}}=a^2,$$

получим:

$$\frac{Y^2}{a^2}-\frac{X^2}{b^2}-1=0.$$

Это уравнение в точности не совпадает с уравнением $\boxed{4}$. Произведём тогда ещё поворот осей $XO'Y$ на угол 90°; будем иметь $X=-Y'$, $Y=X'$, и последнее уравнение приводится к виду $\boxed{4}$. Во всех остальных случаях мы, разделив левую часть уравнения $\boxed{1}$ на подходящее число (отличное от нуля), приходим к одному из уравнений $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$.

Случай II

Мы будем говорить, что линия второго порядка является линией второго порядка второй группы, если в её уравнении, свободном от произведения разноимённых координат, один из коэффициентов при квадратах координат равен нулю, а коэффициент при первой степени координат, квадрат которой отсутствует, не равен нулю, т. е.

$$A_{11}=0, \quad A_1 \neq 0 \text{ или } A_{22}=0, \quad A_2 \neq 0.$$

Пусть, например, $A_{22}=0$, $A_2 \neq 0$; тогда уравнение (α) имеет вид:

$$A_{11}x'^2+2A_1x'+2A_2y'+a=0.$$

Это уравнение можно разрешить относительно y':

$$y'=\alpha x'^2+\beta x'+\gamma,$$

а это последнее уравнение, как известно, определяет параболу. Его, как это было показано в § 42, можно при помощи переноса осей привести к виду:

$$Y=\alpha X^2. \tag{II}$$

Если $A_{11}=0$, $A_1 \neq 0$, то уравнение α имеет вид:

$$A_{22}y'^2+2A_1x'+2A_2y'+a=0;$$

производя поворот осей координат Ox' и Oy' на угол $90°$, т. е. полагая $x'=-y''$, $y'=x''$, мы приходим к уже разобранному случаю, т. е. к уравнению $A_{22}x''^2-2A_1y''+2A_2x''+a=0$, а значит и к уравнению $Y=\alpha X^2$.

Случай III

Мы будем говорить, что линия второго порядка является линией второго порядка третьей группы, если в её уравнение, свободное от произведения разноимённых координат, входит только одна координата, т. е. если $A_{11}=A_1=0$ (или $A_{22}=A_2=0$). Пусть, например, $A_{22}=A_2=0$. В этом случае уравнение (α) примет вид:

$$A_{11}x'^2+2A_1x'+a=0,$$

$$A_{11}\left(x'^2+2\frac{A_1}{A_{11}}x'\right)+a=0,$$

$$A_{11}\left(x'+\frac{A_1}{A_{11}}\right)^2+a-\frac{A_1^2}{A_{11}}=0;$$

полагая

$$a-\frac{A_1^2}{A_{11}}=A$$

и перенося оси $x'Oy'$ так, чтобы новое начало координат новой системы координат $XO'Y$ имело бы координаты

$$-\frac{A_1}{A_{11}},\ 0,$$

т. е. полагая

$$X=x'+\frac{A_1}{A_{11}},$$

$$Y=y',$$

получим:

$$A_{11}X^2+A=0,\ A_{11}\neq 0. \tag{III}$$

Это уравнение будем называть приведённым уравнением линий второго порядка третьей группы. В зависимости от значений A_{11} и A оно легко приводится к виду $\boxed{7}$ или $\boxed{8}$, или $\boxed{9}$.

Замечание. Если в уравнении $A_{11}x'^2+A_{22}y'^2+2A_1x'+$ $+2A_2y'+a=0$ имеем $A_{11}=A_1=0$, то, производя поворот осей на $90°$, т. е. полагая $x'=-y''$, $y'=x''$, мы приведём этот случай к уже рассмотренному, т. е. опять придём к уравнению (III), а следовательно, и к одному из уравнений $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$.

Пример 2. Возвращаясь к примеру, рассмотренному выше:

$$6xy+8y^2-12x-26y+11=0,$$

мы можем утверждать, что это линия первой группы, так как поворотом осей это уравнение было приведено нами к виду:

$$9x'^2-y'^2-9\sqrt{10}x'+\sqrt{10}y'+11=0$$

и здесь оба коэффициента при квадратах координат не равны нулю.

Далее имеем:

$$9\left(x'^2-\sqrt{10}\,x'\right)-\left(y'^2-\sqrt{10}\,y'\right)+11=0,$$

$$9\left(x'-\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)^2-\left(y'-\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)^2+11-\frac{45}{2}+\frac{5}{2}=0,$$

$$9\left(x'-\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)^2-\left(y'-\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)^2-9=0$$

и, полагая

$$X=x'-\frac{1}{2}\sqrt{10},\quad Y=y'-\frac{1}{2}\sqrt{10},$$

получим:

$$9X^2-Y^2-9=0$$

или

$$\frac{X^2}{1}-\frac{Y^2}{9}=1.$$

Это уравнение вида $\boxed{4}$, т. е. оно определяет гиперболу. Найдём ещё связь старых координат x, y с новыми координатами X, Y; из соотношений

$$x=\frac{x'-3y'}{\sqrt{10}}, \qquad y=\frac{3x'+y'}{\sqrt{10}}$$

и

$$X=x'-\frac{\sqrt{10}}{2}, \qquad Y=y'-\frac{\sqrt{10}}{2},$$

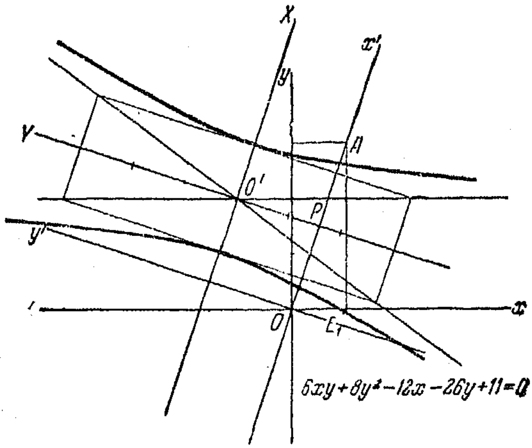
находим:

$$x=\frac{X+\frac{\sqrt{10}}{2}-3\left(Y+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}{\sqrt{10}}, \quad y=\frac{3\left(X+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)+Y+\frac{\sqrt{10}}{2}}{\sqrt{10}}$$

или

$$x=\frac{X-3Y}{\sqrt{10}}-1, \qquad y=\frac{3X+Y}{\sqrt{10}}+2.$$

Для того чтобы выразить X и Y через x и y, можно разрешить эти уравнения относительно X и Y, но можно рассуждать и так: разрешая уравне-



Черт. 166.

ния $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$, $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$ относительно x' и y', найдём:

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,$$
$$y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.$$

Эти уравнения получаются из формул поворота заменой x' и y' соответственно на x и y и обратно, а также заменой α на $-\alpha$ (ибо система xOy из системы $x'Oy'$ получается поворотом на угол $-\alpha$). В нашем случае

$$x'=\frac{x-3y}{\sqrt{10}}, \qquad y'=\frac{-3x+y}{\sqrt{10}}$$

и значит

$$X=\frac{x+3y}{\sqrt{10}}-\frac{\sqrt{10}}{2},\quad Y=\frac{-3x+y}{\sqrt{10}}-\frac{\sqrt{10}}{2}$$

или

$$X=\frac{x+3y-5}{\sqrt{10}},\quad Y=\frac{-3x+y-5}{\sqrt{10}}.$$

На чертеже 166 показано построение систем координат $x'Oy'$ и $XO'Y$ по отношению к системе xOy: $E_1A=3OE_1$, $OA=\sqrt{10}$, $OP=\frac{1}{2}\sqrt{10}$ и т. д., а также начерчена данная гипербола (по её каноническому уравнению в системе $XO'Y$).

§ 53. Замечания

Рассматривая уравнения $\boxed{1}$ — $\boxed{9}$, мы видим, что уравнения $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ определяют простые геометрические образы. Так, уравнение $\boxed{2}$ не удовлетворяется ни одной парой действительных чисел X и Y, поэтому нет ни одной точки плоскости, координаты которой обращают это уравнение в тождество. Мы будем говорить, что уравнение $\boxed{2}$ есть уравнение мнимого эллипса, понимая под этим, что каноническое уравнение имеет вид $\boxed{2}$ и только. Таким образом фраза «мнимый эллипс» относится к уравнению и не имеет у нас никакого геометрического содержания.

Уравнение $\boxed{3}$ обращается в тождество тогда и только тогда, когда $X=Y=0$, т. е. на плоскости есть одна и только одна точка, координаты которой обращают уравнение $\boxed{3}$ в тождество; поэтому уравнение $\boxed{3}$ можно было бы назвать «уравнением точки». Мы, однако, будем говорить, что уравнение $\boxed{3}$ определяет две мнимые прямые, пересекающиеся в действительной точке (O'), отражая этим то (и только то), что левая часть уравнения $\boxed{3}$ распадается на два линейных, относительно X и Y, множителя вида:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=\left(\frac{X}{a}+i\frac{Y}{b}\right)\left(\frac{X}{a}-i\frac{Y}{b}\right);$$

часть коэффициентов этих множителей — мнимые числа (отсюда — «мнимые» прямые). Конечно, и здесь не следует себе рисовать никакого геометрического образа и понимать опять, что фраза «две мнимые пересекающиеся прямые» означает только то, что каноническое уравнение имеет вид $\boxed{3}$.

Уравнение $\boxed{5}$ определяет две пересекающиеся прямые

$$\frac{X}{a}-\frac{Y}{b}=0, \qquad \frac{X}{a}+\frac{Y}{b}=0$$

— пересекающиеся потому, что эти прямые имеют разные угловые коэффициенты. Точкой их пересечения является, очевидно, точка O'.

Уравнение $\boxed{7}$ определяет две параллельные прямые $X=a$ и $X=-a$.

Уравнение $\boxed{8}$ не обращается в тождество ни при одном действительном значении X, т. е. нет ни одной точки плоскости, координаты которой обращают это уравнение в тождество. Мы будем говорить, что оно определяет две мнимые параллельные прямые, подразумевая под этим только то, что каноническое уравнение имеет вид $X^2+a^2=0$; в этом случае левая часть разлагается на два линейных множителя: $X^2+a^2=(X+ai)(X-ai)$. И здесь не надо рисовать себе какого-то геометрического образа, а понимать, что фраза «две мнимые параллельные прямые» относится к уравнению. Наконец, уравнение $X^2=0$ или $X=0$ определяет ось $O'Y$. Так как уравнение $X^2=0$ второй степени, то мы будем говорить, что оно определяет две совпадающие прямые.

Таким образом, не считая перечисленных шести случаев, общее уравнение второй степени между x и y в декартовой прямоугольной системе координат определяет одну из трёх следующих линий:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \qquad \text{эллипс } (A),$$

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1 \qquad \text{гипербола } (B),$$

$$Y=aX^2 \qquad \text{парабола } (C).$$

Важным в принципиальном отношении является вопрос о несовместимости групп линий и несовместимости их видов, иначе говоря, нерешённым остаётся следующий вопрос: можно ли, производя различные повороты и переносы декартовой прямоугольной системы координат, привести один раз данное уравнение к каноническому уравнению линий одной группы, а другими поворотами и переносами к каноническому уравнению линий другой группы? То же по отношению к видам? Даже, более того, ниоткуда ещё не следует, что если при помощи каких-то поворотов и переносов данное общее уравнение линии второго порядка приведено, например, к виду $X^2+2=0$, то при помощи других поворотов и переносов оно приводится к виду $X^2+3=0$ или, например, к виду $2X^2+4=0$.

Иногда на этот вопрос мы можем дать ответ легко: если, например, уравнение определяет эллипс, то упрощение его приведёт ко вполне определённому каноническому уравнению эллипса, так как не может же одно и то же уравнение определять одновременно и эллипс и, например, две пересекающиеся прямые!

Нельзя ли написать каноническое уравнение линии, не производя поворота и переноса осей? Нельзя ли узнать группу или вид кривой, не приводя её уравнение к каноническому виду? и т. д.

Решение всех этих вопросов проще всего даётся применением теории инвариантов, которая выходит за рамки настоящего курса.

Упражнения

103. Привести к каноническому виду следующие уравнения:

$$1)\ 5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0,$$
$$2)\ x^2-4xy+4y^2-2x-y+2=0.$$

Начертить старые и новые системы координат и сами линии. Найти в каждом примере связь старых координат с новыми.

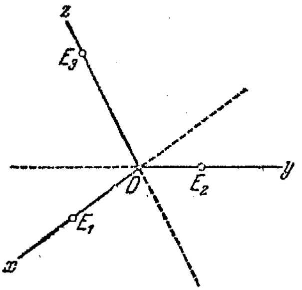
Найти уравнения осей симметрии, координаты вершины и фокусов данных линий по отношению к начальной системе координат.

ГЛАВА X
МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

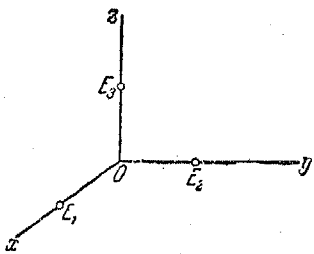
§ 54. Декартова система координат в пространстве

Рассмотрим три оси координат Ox, Oy и Oz, не лежащие в одной плоскости (черт. 167). Совокупность таких трёх осей координат называется декартовой косоугольной системой координат в пространстве. Если масштабные отрезки OE_1, OE_2, OE_3 осей Ox, Oy и Oz равны и попарно взаимно перпендикулярны, то система координат называется прямоугольной (черт. 168).

Координаты произвольной точки M пространства определяются так же, как и на плоскости: через точку M проводим плоскости,



Черт. 167.



Черт. 168.

коллинеарные*) соответственно плоскостям yOz, zOx и xOy, до встречи с осями Ox, Oy и Oz соответственно в точках P, Q и R (черт. 169). Если x — координата точки P на оси Ox, y — координата точки Q на оси Oy и z — координата точки R на оси Oz, то числа x, y и z называются координатами точки M (число x — абсциссой, число y — ординатой, число z — аппликатой).

На чертеже 170 построена точка M с координатами $x=2$, $y=-3$, $z=-2$. Точку M вместе с её координатами будем записывать так: $M(x, y, z)$.

*) Плоскости называются коллинеарными, если они или параллельны или совпадают.

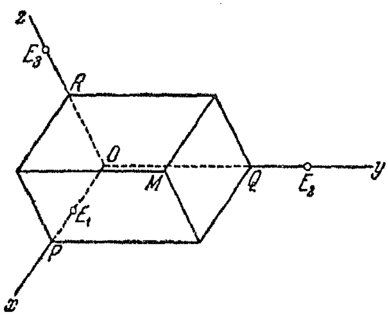
Упражнения

104. Постройте точки $M(3, 1, -2)$, $N(2, -6, -1)$, $P(-2, -3, 1)$.

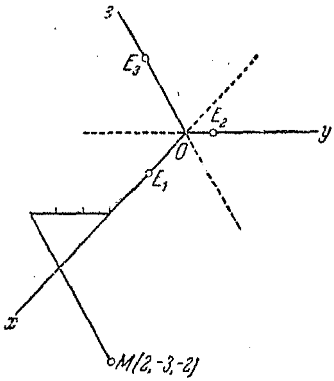
105. Что можно сказать про координаты точки M, если она:

1) лежит в плоскости xOy? 2) лежит в плоскости yOz? 3) лежит в плоскости zOx? 4) лежит на оси Ox? 5) лежит на оси Oy? 6) лежит на оси Oz? 7) совпадает с началом координат?

106. Точка M имеет координаты x, y, z. Какие координаты будет иметь точка M', симметричная точке M относительно начала координат?



Черт. 169.



Черт. 170.

107. Через точку $M(x, y, z)$ проводятся прямые, коллинеарные осям координат. Пусть P, Q и R — точки встречи этих прямых соответственно с плоскостями yOz, zOx и xOy. Найти координаты этих точек.

108. Как расположены относительно системы координат следующие пары точек:

1) $M(x, y, z)$ и $N(-x, -y, z)$,
2) $M(x, y, z)$ и $N(-x, y, z)$,
3) $M(x, y, z)$ и $N(0, y, 0)$,
4) $M(x, y, z)$ и $N(x, -y, z)$?

§ 55. Деление отрезка в данном отношении

В пространстве, как и в аналитической геометрии на прямой и на плоскости, имеют место теоремы, аналогичные теоремам о делении отрезка в данном отношении (см. §§ 7 и 13).

Теорема 1. *Если точка $M(x, y, z)$ делит отрезок с концами $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в отношении $\lambda\ (\neq -1)$, то её координаты определяются следующими соотношениями:*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{1}$$

Доказательство этой теоремы проводится совершенно так же, как и доказательство соответствующей теоремы на плоскости (см. § 13): через точки M_1, M и M_2 проводим плоскости, коллинеарные плоскости yOz. Пусть P_1, P и P_2 — точки встречи этих плоскостей с осью Ox и т. д. (окончание рассуждений в точности такое, как и при доказательстве теоремы 1 § 13).

Следствие. Координаты середины отрезка равны полусуммам координат его концов:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (2)$$

Имеет место и доказывается в точности так же, как и на плоскости, обратная теорема.

Теорема 2. *Каково бы ни было число* $\lambda \neq -1$, *формулами*

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

определяются координаты некоторой точки M, *лежащей на прямой, проходящей через точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *и делящий отрезок* M_1M_2 *в отношении* λ.

Пример. Определим координаты точки M (x, y, z), делящей отрезок с концами M_1 (2, 3, 5) и M_2 (—3, 1, 0) в отношении $\lambda=\frac{2}{3}$; имеем

$$x=\frac{2-3\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=0,\quad y=\frac{3+1\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{11}{5},\quad z=\frac{5+\frac{2}{3}\cdot 0}{1+\frac{2}{3}}=3.$$

Упражнения

109. Найти координаты точки M, делящей отрезок M_1M_2 с концами $M_1(2, 5, 1)$ и $M_2(0, 0, 3)$ в отношении $\lambda=3$.

110. Найти точки встречи прямой, проходящей через точки $M_1(3, 2, 5)$ и $M_2(1, 1, -2)$ с координатными плоскостями.

§ 56. Перенос осей координат

Рассмотрим две системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$, одна из которых получается переносом другой, т. е. в этих системах масштабные отрезки OE_1, OE_2, OE_3 и $O'E'_1$, $O'E'_2$, $O'E'_3$ соответственно равны и одинаково направлены. Каждая точка M пространства имеет координаты x, y, z в системе $Oxyz$ (старые координаты) и координаты x', y', z' в системе $O'x'y'z'$ (новые координаты в новой системе) (черт. 171).

Теорема. *Если старые координаты нового начала координат равны* a, b, c, *то новые координаты точки* M *равны разностям между её старыми координатами и соответствующими старыми координатами нового начала*:

$$x'=x-a,\quad y'=y-b,\quad z'=z-c, \qquad (1)$$

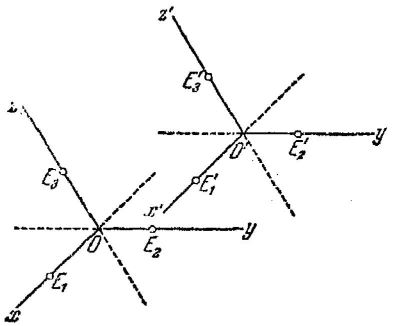
Доказательство. Рассмотрим сначала такой перенос осей $Oxyz$, при котором новое начало координат остаётся в плоскости xOy. Ясно, что при таком переносе z не меняется:

$$z = z'',$$

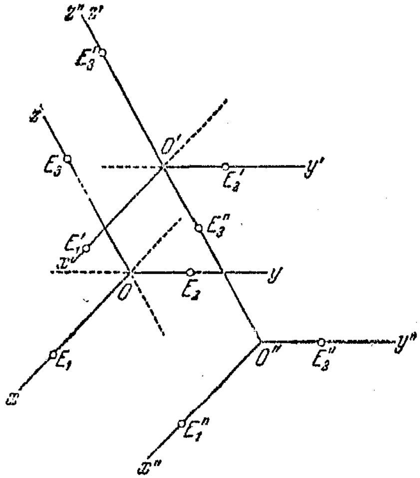
а x и y преобразуются так же, как и на плоскости (черт. 172):

$$x'' = x - a, \quad y'' = y - b.$$

Далее: перенесём оси $O''x''y''z''$ так, чтобы новое начало координат O' попало бы в точку (a, b, c), координаты которой даны по



Черт. 171.



Черт. 172.

отношению к начальной системе. Тогда в системах $O''x''y''z''$ и $O'x'y'z'$ координаты x' и x'' так же, как и y' и y'', будут соответственно равны:

$$x' = x'', \quad y' = y'',$$

а координата z'' будет преобразовываться так же, как и для случая переноса на прямой:

$$z' = z'' - c.$$

Из написанных соотношений следует:

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c.$$

Пример. Если перенести начало координат в точку O' (3, 1, 5), то новые координаты точки M (2, 1, 1) будут: $x' = 2 - 3 = -1$, $y' = 1 - 1 = 0$, $z' = 1 - 5 = -4$.

Упражнения

111. Каковы будут новые координаты точек $A(3, 1, 0)$, $B(0, 2, 4)$ и $C(-1, -7, 5)$, если оси координат перенесены так, что новым началом координат служит точка $O'(7, -2, 4)$?

112. Найти старые координаты нового начала координат и новые координаты старого начала координат, если известны старые координаты $x = 2$, $y = 3$, $z = -4$ некоторой точки и её новые координаты $x' = 0$, $y' = -3$, $z' = 2$.

§ 57. Расстояние точки от начала координат и расстояние между двумя точками

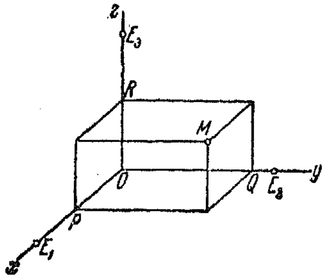
Рассмотрим точку $M(x, y, z)$, заданную относительно декартовой прямоугольной системы координат (черт. 173). Предположим, что она не лежит ни в одной из координатных плоскостей. Проводя через точку M плоскости, коллинеарные координатным, получим параллелепипед с рёбрами OP, OQ, OR, для которого

$$OM^2 = OP^2 + OQ^2 + OR^2$$

или

$$\left(\frac{OM}{m}\right)^2 = \left(\frac{OP}{m}\right)^2 + \left(\frac{OQ}{m}\right)^2 + \left(\frac{OR}{m}\right)^2,$$

где m — масштабный отрезок.



Черт. 173.

Число $\frac{OM}{m}$ и является расстоянием точки M от начала координат; обозначим его через r. Далее

$$\frac{OP}{m} = |x|, \quad \frac{OQ}{m} = |y|, \quad \frac{OR}{m} = |z|;$$

значит

$$r^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2$$

или

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad (1)$$

откуда

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad (2)$$

т. е. *расстояние точки $M(x, y, z)$ от начала декартовой прямоугольной системы координат равно корню квадратному из суммы квадратов её координат.*

Последняя формула доказана в предположении, что точка M не лежит ни в одной из координатных плоскостей. Но она верна и в этих частных случаях. Пусть, например, точка M лежит в плоскости xOy. Тогда её расстояние от точки O может быть вычислено по формуле

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

но эту формулу можно получить из формулы $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, положив $z = 0$.

Если по отношению к декартовой прямоугольной системе координат заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то, перенося оси так, чтобы точка M_1 стала новым началом координат, найдём координаты

$$x' = x_2 - x_1, \quad y' = y_2 - y_1, \quad z' = z_2 - z_1$$

точки M_2 в новой системе.

В новой системе расстояние d между точками M_1 и M_2 будет равно расстоянию r' точки M_2 от начала координат M_1:

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

или

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (3)$$

Итак, *расстояние d между двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, заданными относительно декартовой прямоугольной системы координат, равно корню квадратному из суммы квадратов разностей соответствующих координат данных точек.*

Упражнения

113. Найти расстояние точки $M(3, 3, 1)$ от начала координат.

114. Найти расстояние между двумя точками $A(2, 3, 1)$ и $B(3, -1, 0)$.

115. Найти точку M, лежащую в плоскости xOz и равноудалённую от трёх точек $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ и $(1, 1, 0)$.

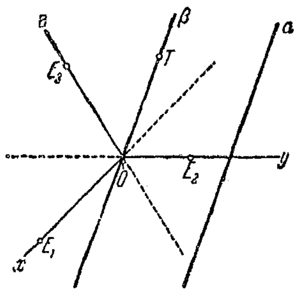
116. На оси Oz найти точку, равноудалённую от двух точек $A(3, 5, 1)$ и $B(-2, 4, 0)$.

ГЛАВА XI

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

§ 58. Угловые коэффициенты прямой

Рассмотрим произвольную прямую α в пространстве. Проведём через начало координат прямую β, коллинеарную прямой α, и возьмём на прямой β произвольную точку T, отличную от начала координат (черт. 174). Точка T вполне определяет направление прямой α, так как эта точка определяет прямую OT или β, коллинеарную прямой α. Точка T может быть названа **направляющей** точкой прямой β или прямой α, или любой прямой, им коллинеарной. Координаты направляющей точки T принято обозначать буквами l, m, n и называть **угловыми** или **направляющими** коэффициентами прямой α.



Черт. 174.

Определение. *Угловыми коэффициентами прямой α называются координаты l, m, n любой точки T (направляющей точки), не совпадающей с началом координат, лежащей на прямой β, проходящей через начало координат коллинеарно прямой α.*

Угловые коэффициенты прямой α не являются вполне определёнными числами, так как вместо точки T на прямой β можно взять любую точку T' (отличную от начала координат) и эта последняя точка будет иметь другую тройку координат l', m', n'. Нетрудно найти связь между числами l, m, n и l', m', n'. В самом деле: пусть точка T' делит отрезок OT в отношении λ; тогда

$$l'=\frac{\lambda l}{1+\lambda}, \quad m'=\frac{\lambda m}{1+\lambda}, \quad n'=\frac{\lambda n}{1+\lambda}$$

или, полагая $\frac{\lambda}{1+\lambda}=t\,(\neq 0)$, получим $l'=lt$, $m'=mt$, $n'=nt$, т. е. разные тройки угловых коэффициентов одной и той же прямой (одного и того же направления) пропорциональны. Нетрудно видеть, что и обратно: при любом $t\neq 0$ точка $T'(tl, tm, tn)$ лежит на прямой OT, так как при заданном $t \neq 0$ всегда можно подобрать такое λ, что $\frac{\lambda}{1+\lambda} = t$; именно: $\lambda = \frac{t}{1-t}$ (если $t = 1$, то точки T' и T совпадают). Итак, если какая-нибудь одна тройка угловых коэффициентов есть l, m, n, то все тройки чисел, являющиеся угловыми коэффициентами прямой, можно получить, умножая эти числа на число $t \neq 0$: lt, mt, nt, и придавая t произвольные действительные значения.

Отсюда следует, что если l, m, n и l', m', n' — угловые коэффициенты двух коллинеарных прямых, то они пропорциональны:

$$l' = lt, \quad m' = mt, \quad n' = nt, \quad \text{где } t \neq 0, \tag{1}$$

и обратно: если угловые коэффициенты двух прямых пропорциональны, то точка $T'(l', m', n')$ лежит на прямой OT, где T имеет координаты l, m, n, т. е. направляющие прямые OT и OT' совпадают и значит рассматриваемые прямые коллинеарны.

Итак, *необходимым и достаточным условием коллинеарности двух прямых является пропорциональность их угловых коэффициентов.*

§ 59. Угол между двумя прямыми

Рассмотрим две прямые α и α', заданные относительно декартовой прямоугольной системы координат. Пусть l, m, n — угловые коэффициенты прямой α, а l', m', n' — угловые коэффициенты прямой α' (черт. 175). Из треугольника OST имеем:

$$d^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\varphi_1$$

(φ_1 — один из углов, образованных прямыми α и α') или

$$(l-l')^2 + (m-m')^2 + (n-n')^2 = l^2 + m^2 + n^2 + l'^2 + m'^2 + n'^2 - \\ - 2\sqrt{l^2+m^2+n^2} \cdot \sqrt{l'^2+m'^2+n'^2} \cdot \cos\varphi_1;$$

отсюда

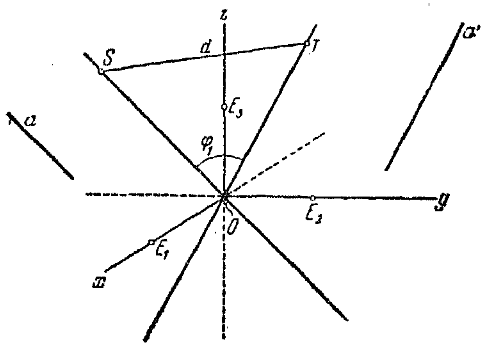
$$\cos\varphi_1 = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2} \cdot \sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}. \tag{1}$$

Косинус угла φ_2, смежного с φ_1, будет отличаться от $\cos\varphi_1$ знаком. Итак, *косинусы углов $\varphi_{1,2}$ между двумя прямыми в пространстве определяются через их угловые коэффициенты формулой*

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2} \cdot \sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}. \tag{2}$$

Замечание. Если прямые α и α' коллинеарны, то фигура OST не будет треугольником. Верна ли в этом случае формула (2)? Оказывается, что она верна и в этом случае. В самом деле: если прямые α и α' коллинеарны, то их угловые коэффициенты можно считать равными $l = l'$, $m = m'$, $n = n'$, ибо направляющую точку для обеих прямых можно взять одну и ту же. Но тогда правая часть формулы (2) обращается в ± 1; для коллинеарных прямых естественно считать $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, так что и левая часть формулы (2) равна ± 1, значит формула (2) верна и в этом случае. Из формулы (2) находим условие перпендикулярности двух прямых:

$$ll' + mm' + nn' = 0. \quad (3)$$



Черт. 175.

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух прямых, заданных относительно декартовой прямоугольной системы координат, является равенство нулю суммы произведений их соответствующих координат.

Упражнения

117. Определить углы между прямыми α и β, если прямая α имеет угловые коэффициенты

$$l = 1, \quad m = 2, \quad n = -3,$$

а прямая β имеет угловые коэффициенты

$$l' = -2, \quad m' = 0, \quad n' = 5.$$

118. Каковы будут угловые коэффициенты осей координат?

119. Как расположена прямая относительно координатной системы, если 1) $l = 0$, 2) $m = 0$, 3) $n = 0$?

120. Определить углы, образованные прямой с угловыми коэффициентами $l = 1$, $m = 2$, $n = 3$ с осями координат.

121. Найти углы между биссектрисами углов xOy и yOz.

§ 60. Площадь треугольника

Рассмотрим треугольник OM_1M_2, одна из вершин которого находится в начале координат.

Из формулы (1) предыдущего параграфа находим:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1r_2}$$

или

$$r_1r_2\cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

где φ — угол M_1OM_2, x_1, y_1, z_1 — координаты точки M_1, x_2, y_2, z_2 — координаты точки M_2, а r_1 и r_2 — длины сторон OM_1 и OM_2.

Теперь легко вычислить площадь s треугольника OM_1M_2:

$$s=\frac{1}{2}r_1r_2\sin\varphi=\frac{1}{2}r_1r_2\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\frac{1}{2}\sqrt{r_1^2r_2^2-r_1^2r_2^2\cos^2\varphi}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}^2}\,^{*)}. \qquad (1)$$

Если вершины треугольника даны в пространстве произвольно:

$$M_1(x_1,\ y_1,\ z_1),\ M_2(x_2,\ y_2,\ z_2),\ M_3(x_3,\ y_3,\ z_3),$$

то, перенося оси координат так, чтобы, например, точка M_3 стала новым началом координат, найдём координаты точек M_1 и M_2:

$$x_1'=x_1-x_3,\quad y_1'=y_1-y_3,\quad z_1'=z_1-z_3,$$
$$x_2'=x_2-x_3,\quad y_2'=y_2-y_3,\quad z_2'=z_2-z_3,$$

и формула для площади примет вид:

$$s=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_1'&z_1'\\y_2'&z_2'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_1'&x_1'\\z_2'&x_2'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1'&y_1'\\x_2'&y_2'\end{vmatrix}^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_1-y_3&z_1-z_3\\y_2-y_3&z_2-z_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_1-z_3&x_1-x_3\\z_2-z_3&x_2-x_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_3&y_1-y_3\\x_2-x_3&y_2-y_3\end{vmatrix}^2}$$

или

$$s=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_1&z_1&1\\y_2&z_2&1\\y_3&z_3&1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_1&x_1&1\\z_2&x_2&1\\z_3&x_3&1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}^2}.$$

Упражнения

122. Найти площадь треугольника, вершины которого:

$$O(0,\ 0,\ 0),\ M_1(2,\ 3,\ 5)\ \text{и}\ M_2(-2,\ 4,\ 1).$$

123. Найти площадь треугольника, вершины которого:

$$M_1(2,\ 1,\ 1),\ M_2(3,\ 1,\ 5),\ M_3(0,\ 1,\ 6).$$

124. Доказать, что площадь треугольника равна корню квадратному из суммы квадратов площадей его проекций в координатные плоскости.

---

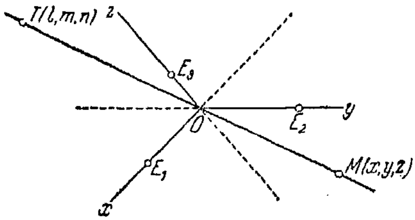
*) Тождество

$$(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2=$$
$$=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}^2$$

называется тождеством Лагранжа; проверьте его самостоятельно. Оно часто применяется в различного рода преобразованиях.

§ 61. Параметрические уравнения прямой

Рассмотрим прямую α, проходящую через начало координат декартовой косоугольной системы координат. Пусть l, m, n — её угловые коэффициенты (т. е. в данном случае координаты какой-нибудь, произвольно взятой, точки T, лежащей на этой прямой и не совпадающей с началом координат). Возьмём любую точку $M(x, y, z)$ прямой α (черт. 176); обозначим простое отношение (MOT) через $-t$; тогда на основании формул деления отрезка в данном отношении будем иметь:



Черт. 176.

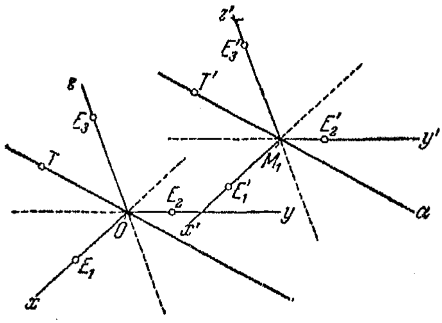
$$0 = \frac{x - tl}{1 - t}, \quad 0 = \frac{y - tm}{1 - t},$$

$$0 = \frac{z - tn}{1 - t},$$

откуда

$$x = lt, \quad y = mt, \quad z = nt. \qquad (1)$$

Ясно, что $t = -(MOT)$ есть координата точки M на прямой α, если O — начало координат, а точка T — единичная. Поэтому множество всех действительных значений t соответствует (и притом взаимно однозначно) множеству всех точек прямой с координатами



Черт. 177.

$$x = lt, \quad y = mt, \quad z = nt.$$

По этой причине соотношения

$$x = lt, \quad y = mt, \quad z = nt$$

называются **параметрическими уравнениями** прямой α.

Если прямая α не проходит через начало координат, а проходит, например, через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и имеет угловые коэффициенты l, m, n, то, перенося оси координат так, чтобы новым началом координат стала бы точка M_1 (черт. 177), будем иметь следующую зависимость между старыми и новыми координатами точки:

$$x' = x - x_1, \quad y' = y - y_1, \quad z' = z - z_1.$$

В новой системе координат параметрические уравнения прямой α будут:

$$x' = lt, \quad y' = mt, \quad z' = nt,$$

так как угловые коэффициенты прямой a в новой системе те же. Отсюда получаем параметрические уравнения данной прямой в старой системе

$$x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt, \quad z = z_1 + nt. \tag{2}$$

Множеству всех действительных значений t соответствует, и притом взаимнооднозначно, множество всех точек данной прямой (числу t соответствует точка с координатами $x_1 + lt, \quad y_1 + mt, \quad z_1 + nt$).

Наконец, если прямая в пространстве задана двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то, перенося оси $Oxyz$ так, чтобы точка M_1 стала новым началом координат, найдём новые координаты точки M_2:

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1;$$

так как точка M_2 лежит теперь на прямой, проходящей через новое начало координат, то её новые координаты и будут угловыми коэффициентами данной прямой

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1, \tag{3}$$

и параметрические уравнения прямой примут вид:

$$\begin{gathered} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{gathered} \tag{4}$$

Упражнения

125. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через начало координат и через точку (1, 7, —4).

126. Составить уравнения прямой, проходящей через начало координат и имеющей угловые коэффициенты 3, 7, — 1.

127. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(2, 1, 7)$ и $M_2(-3, 1, 4)$.

128. Составить параметрические уравнения осей координат.

129. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через начало координат и единичную точку E.

ГЛАВА XII

ПЛОСКОСТЬ

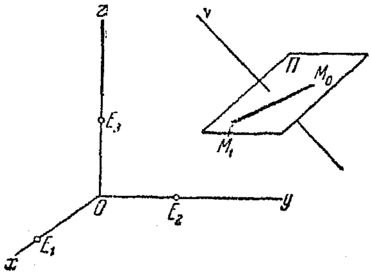
§ 62. Уравнение плоскости

Уравнение плоскости определяется аналогично тому, как в аналитической геометрии на плоскости определялось уравнение прямой. Имеют место и теоремы, аналогичные теоремам, доказанным для прямой линии, а именно:

Теорема 1. *Если в пространстве задана произвольная декартова система координат и произвольная плоскость, то существует, и притом только одно, уравнение первой степени относительно x, y, z, т. е. уравнение вида*

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad (1)$$

где A, B, C не равны нулю одновременно, которое удовлетворяется координатами любой точки этой плоскости.



Черт. 178.

Теорема 2 (обратная). *Всякое уравнение первой степени относительно x, y, z,* т. е. *уравнение вида*

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

где A, B, C не равны нулю одновременно, в декартовой системе координат определяет плоскость, т. е. если дана декартова система координат и дано уравнение вида $Ax+By+Cz+D=0$, где A, B, C не равны нулю одновременно, то множество всех точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, является множеством всех точек некоторой плоскости.

Мы докажем обе теоремы, предполагая, что система координат прямоугольная (хотя верны эти теоремы и в косоугольной системе; доказательство для косоугольной системы несколько сложнее; оно дано ниже мелким шрифтом).

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим произвольную плоскость П, заданную относительно декартовой системы координат (черт. 178). Обозначим через A, B, C угловые коэффициенты прямой ν, перпендикулярной к плоскости П, а через x_1, y_1, z_1 — координаты какой-нибудь точки M_1 плоскости П. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка плоскости П. Тогда угловые коэффициенты прямой M_1M_0 на основании § 61 будут $l = x_0 - x_1$, $m = y_0 - y_1$, $n = z_0 - z_1$. Так как прямые ν и M_1M_0 взаимноперпендикулярны, то выполняется условие их перпендикулярности, которое здесь принимает вид:

$$A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) = 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

полученное из предыдущего равенства заменой x_0, y_0, z_0 соответственно на x, y, z.

В этом уравнении A, B, C не равны нулю одновременно, так как A, B, C являются угловыми коэффициентами прямой ν, а угловые коэффициенты никогда одновременно в нуль не обращаются. Кроме того, это уравнение удовлетворяется координатами x_0, y_0, z_0 любой точки M_0 данной плоскости П, значит уравнение

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \tag{2}$$

и есть уравнение плоскости П. Уравнение (2) является уравнением плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной к прямой с угловыми коэффициентами A, B, C. Его можно переписать и так:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3}$$

где

$$D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1.$$

Остаётся ещё доказать, что плоскость П не может быть определена другим уравнением первой степени.

Предположим, что есть ещё уравнение

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \tag{4}$$

которое также определяет нашу плоскость П и в котором также A', B', C' не равны нулю одновременно. Докажем, что это уравнение эквивалентно уравнению (3), т. е. левые части уравнений (3) и (4) отличаются числовым, отличным от нуля множителем. Возьмём на плоскости П произвольную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$; её координаты должны удовлетворять уравнениям (3) и (4):

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$
$$A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 + D' = 0.$$

Определяя отсюда D и D' и подставляя их значения в уравнения (3) и (4), получим:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0, \tag{5}$$

$$A'(x-x_1)+B'(y-y_1)+C'(z-z_1)=0; \tag{6}$$

каждое из этих уравнений является уравнением плоскости П.

Возьмём в плоскости П произвольную точку M_0, отличную от точки M_1. Тогда координаты x_0, y_0, z_0 точки M_0 должны удовлетворять обоим уравнениям:

$$A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)=0,$$

$$A'(x_0-x_1)+B'(y_0-y_1)+C'(z_0-z_1)=0.$$

Так как x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1 — угловые коэффициенты прямой M_1M_0, то последние два равенства указывают, что A, B, C и A', B', C' являются угловыми коэффициентами прямых, перпендикулярных к прямой M_1M_0; но точка M_0 была любой точкой плоскости П, значит A, B, C и A', B', C' — угловые коэффициенты прямых, перпендикулярных ко всем прямым, лежащим в плоскости П, т. е. эти числа являются угловыми коэффициентами прямой, перпендикулярной к плоскости П, следовательно, они отличаются друг от друга лишь множителем пропорциональности:

$$A=\lambda A', \quad B=\lambda B', \quad C=\lambda C' \quad (\lambda \neq 0),$$

а это и значит, что левые части уравнений (5) и (6) отличаются числовым, отличным от нуля множителем, значит и уравнения (3) и (4) эквивалентны, так как уравнения (3) и (4) — это и есть уравнения (5) и (6), только иначе записанные. Теорема доказана.

Переходим к доказательству теоремы 2.

Пусть дано уравнение первой степени $Ax+By+Cz+D=0$, где A, B и C не равны нулю одновременно. Система координат декартова прямоугольная. Рассмотрим произвольное решение

$$x=x_1, \quad y=y_1, \quad z=z_1$$

данного уравнения, т. е.

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0.$$

Определяя отсюда $D=-Ax_1-By_1-Cz_1$ и подставляя это значение D в уравнение $Ax+By+Cz+D=0$, мы его перепишем так:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

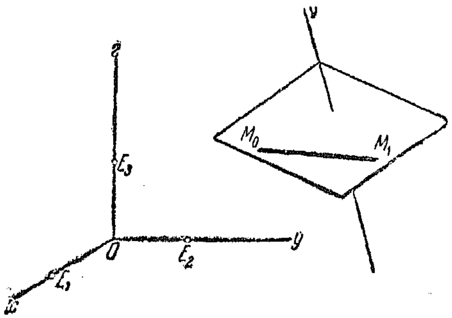
Построим теперь точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и проведём через эту точку плоскость П, перпендикулярную к прямой ν, имеющей угловые коэффициенты A, B, C (черт. 179).

Докажем, что уравнение $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ или $Ax+By+Cz+D=0$ и есть уравнение построенной плоскости. В самом деле: если мы возьмём в плоскости Π любую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, отличную от точки M_1, то x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1 будут угловыми коэффициентами прямой M_0M_1, перпендикулярной к прямой ν, значит, на основании условия перпендикулярности, будем иметь:

$$A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)=0,$$

т. е. координаты любой точки построенной плоскости Π удовлетворяют уравнению $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ и значит это уравнение или $Ax+By+Cz+D=0$ и определяет эту плоскость Π.

Остаётся доказать, что никакой другой плоскости наше уравнение не определяет. Возьмём для этого любую точку $M'(x', y', z')$, не лежащую в плоскости Π. Тогда $x'-x_1$, $y'-y_1$, $z'-z_1$ — угловые коэффициенты прямой $M'M_1$, не перпендикулярной к прямой ν, и значит



Черт. 179.

$$A(x'-x_1)+B(y'-y_1)+C(z'-z_1)\neq 0,$$

т. е. координаты точек, не лежащих в построенной плоскости Π, не удовлетворяют уравнению $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$, значит и уравнению $Ax+By+Cz+D=0$, т. е. уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ определяет только одну плоскость Π.

Теорема доказана.

Замечание. Выше мы указали, что обе теоремы 1 и 2 верны и по отношению к декартовой косоугольной системе координат. После того как обе они доказаны в декартовой прямоугольной системе, их нетрудно установить в декартовой косоугольной системе координат, привлекая понятие сдвига и сжатия пространства; эти преобразования определяются вполне аналогично соответствующим преобразованиям плоскости, а именно *сдвигом пространства около какой-нибудь плоскости по направлению какой-нибудь прямой, например, сдвигом около плоскости xOy по направлению оси Ox называется преобразование, в котором каждая точка $M(x, y, z)$ сдвигается параллельно оси Ox на расстояние kz, пропорциональное аппликате z точки M*; при этом сдвиг производится в направлении масштабного отрезка OE_1, если $kz>0$, и в противоположном направлении, если $kz<0$. В координатах такой сдвиг запишется так:

$$x'=x+kz, \quad y'=y, \quad z'=z, \tag{7}$$

где x', y', z' — координаты «сдвинутой» точки.

Сжатием пространства около какой-нибудь плоскости по направлению какой-нибудь прямой, например сжатием пространства около плоскости xOy по направлению оси Oz, называется преобразование, в котором каждая точка перемещается по прямой, коллинеарной оси Oz, и так, что её аппликата изменяется в «k раз»:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = kz. \tag{8}$$

Исходя из формул сдвига и сжатия, легко доказать (так же, как это делалось в аналитической геометрии на плоскости), что сдвиг и сжатие обладают следующими свойствами: 1) два разных прообраза имеют два разных образа; 2) каждая точка пространства имеет прообраз; 3) преобразование, обратное сдвигу, есть сдвиг, а преобразование, обратное сжатию, есть сжатие; 4) три коллинеарные точки после сдвига или сжатия остаются коллинеарными, причём их простое отношение не меняется; 5) параллельные прямые после сдвига или сжатия остаются параллельными; 6) любая плоскость пространства после сдвига или сжатия переходит снова в некоторую плоскость; 7) параллельные плоскости после сдвига или сжатия остаются параллельными.

Эти свойства доказываются аналогично тому, как доказывались свойства сдвига и сжатия на плоскости. Предоставляем читателю провести все рассуждения.

Рассмотрим теперь произвольную декартову косоугольную систему координат и произвольную плоскость П. Ясно, что можно подобрать такие сдвиги относительно координатных плоскостей по направлению соответствующих осей координат, что все углы между осями станут прямыми, а затем можно подобрать такие сжатия около координатных плоскостей, что масштабный параллелепипед перейдёт в куб.

Плоскость П после всех этих сдвигов и сжатий перейдёт в некоторую плоскость П′. В системе с масштабным кубом плоскость П′ определяется по доказанному уравнением первой степени. В силу свойств сдвига и сжатия координаты точки M в системе $Oxyz$ с произвольным масштабным параллелепипедом будут соответственно равны координатам точки M' в системе $Ox'y'z'$ с масштабным кубом (M' — та точка, в которую переходит точка M после всех сдвигов и сжатий). Значит, если координаты всех точек плоскости П′ удовлетворяли некоторому уравнению первой степени относительно координат, то т о м у ж е с а м о м у уравнению удовлетворяют и координаты всех точек плоскости П в начальной системе. Не может быть двух различных уравнений плоскости П, так как тогда и плоскость П′ имела бы два различных уравнения, что по доказанному в теореме 1 невозможно. Итак, теорема 1 обобщена и для косоугольной системы.

Легко обобщается и теорема 2: уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ в системе $Ox'y'z'$ с масштабным кубом определяет некоторую плоскость П′; значит то же уравнение будет определять в системе $Oxyz$ плоскость П, являющуюся прообразом плоскости П′ в преобразовании (из сдвигов и сжатий), переводящем масштабный параллелепипед системы $Oxyz$ в масштабный куб системы $Ox'y'z'$.

Координаты точек относительно системы $Oxyz$, не лежащих в плоскости П, не удовлетворяют рассматриваемому уравнению, так как в противном случае точка с теми же координатами относительно системы $Ox'y'z'$ не лежала бы на плоскости П′, а её координаты удовлетворяли бы рассматриваемому уравнению. Итак, доказана и теорема 2 для косоугольной системы.

Упражнение

130. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (3,—1,2), зная угловые коэффициенты $A = 3$, $B = -2$, $C = 1$ нормали к ней.

§ 63. Условие прохождения плоскости через начало координат

Если плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ проходит через начало координат, то координаты начала координат $x=0$, $y=0$, $z=0$ должны удовлетворять уравнению этой плоскости

$$A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0+D=0 \quad \text{или} \quad D=0.$$

Итак, *если плоскость проходит через начало координат, то свободный член в её уравнении равен* 0.

Обратно, если свободный член в уравнении плоскости равен нулю: $D=0$, то плоскость проходит через начало координат.

В самом деле: если $D=0$, то уравнение плоскости имеет вид $Ax+By+Cz=0$; подставляя в это уравнение координаты начала координат, получим $A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0=0$, и значит плоскость проходит через начало координат.

Итак, *уравнение всякой плоскости, проходящей через начало координат, можно записать в виде $Ax+By+Cz=0$ и обратно: всякое уравнение такого вида определяет плоскость, проходящую через начало координат* (в обоих случаях, конечно, A, B, C не равны нулю одновременно).

§ 64. Условие компланарности прямой и плоскости

Плоскость и прямая называются компланарными, если прямая или параллельна плоскости, или лежит на плоскости. Понятие компланарности, таким образом, шире понятия параллельности. Параллельность прямой и плоскости есть частный случай их компланарности.

Рассмотрим плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и прямую, имеющую угловые коэффициенты l, m, n. При каком условии они будут компланарны? Для решения вопроса рассмотрим прямую, коллинеарную данной и проходящую через начало координат:

$$x=lt, \quad y=mt, \quad z=nt.$$

Эта прямая (а вместе с ней и данная прямая) будет компланарна данной плоскости, если при подстановке координат любой точки прямой в уравнение плоскости мы получим уравнение

$$Alt+Bmt+Cnt+D=0,$$

которое либо вовсе не будет иметь решения относительно t (случай параллельности), либо обратится относительно t в тождество (случай, когда прямая лежит в данной плоскости). Ясно, что это будет тогда и только тогда, когда

$$Al+Bm+Cn=0,$$

ибо, если $Al+Bm+Cn\neq 0$ (и только в этом случае), то уравнение $(Al+Bm+Cn)t+D=0$ имеет относительно t единственное решение, что означает, что прямая и плоскость имеют одну только общую точку, т. е. пересекаются.

Итак, *соотношение* $Al+Bm+Cn=0$ *есть необходимое и достаточное условие компланарности прямой с угловыми коэффициентами* l, m, n *и плоскости* $Ax+By+Cz+D=0$.

§ 65. Исследование уравнения плоскости

Как следствие из результатов двух предыдущих параграфов легко получить признаки, характеризующие различные частные случаи расположения плоскости относительно координатной системы. А именно, имеет место *теорема*:

необходимым и достаточным условием того, что плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ компланарна оси	является условие
Ox	$A=0$
Oy	$B=0$
Oz	$C=0$

т. е. *уравнение всякой плоскости, компланарной оси* Ox, *может быть записано в виде*:

$$By+Cz+D=0,$$

и обратно: всякое такое уравнение определяет плоскость, компланарную оси Ox. *Уравнение всякой плоскости, компланарной оси* Oy, *может быть записано в виде*:

$$Ax+Cz+D=0,$$

и обратно: всякое такое уравнение определяет плоскость, компланарную оси Oy. *Наконец, уравнение всякой плоскости, компланарной оси* Oz, *может быть записано в виде*:

$$Ax+By+D=0,$$

и обратно: всякое такое уравнение определяет плоскость, компланарную оси Oz.

Доказательство. За направляющую точку оси Ox можно взять масштабную точку $E_1(1, 0, 0)$. Отсюда ясно, что угловые коэффициенты оси Ox можно принять равными $l=1$, $m=0$, $n=0$, и условие компланарности плоскости и прямой для оси Ox принимает вид:

$$A\cdot 1+B\cdot 0+C\cdot 0=0 \quad \text{или} \quad A=0.$$

Аналогично выводится и условие компланарности плоскости другим осям координат.

Из доказанной теоремы легко получить и условие параллельности плоскости и оси координат, условие прохождения плоскости через какую-нибудь ось координат и т. д., например, условием того, что плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ параллельна оси Ox, является условие $A=0$, $D\neq 0$, так как параллельность плоскости и оси Ox равносильна компланарности плоскости и оси $Ox\,(A=0)$ и тому, что плоскость не проходит через начало координат ($D\neq 0$).

Аналогично получаем условие того, что плоскость параллельна оси Oy: $B=0$, $D\neq 0$ и оси Oz: $C=0$, $D\neq 0$.

Рассмотрим ещё, например, признак того, что плоскость проходит через ось Ox: это равносильно тому, что она компланарна оси Ox и проходит через начало координат; это имеет место, если $A=0$ и $D=0$.

Таким образом *уравнение всякой плоскости, проходящей через ось Ox, записывается в виде*:

$$By+Cz=0,$$

и обратно: всякое такое уравнение определяет плоскость, проходящую через ось Ox.

Аналогично получаем условие того, что плоскость проходит через ось Oy: $B=0$, $D=0$, и условие того, что плоскость проходит через ось Oz: $C=0$, $D=0$, т. е. *всякая плоскость, проходящая через ось Oy (или Oz), может быть записана уравнением*

$$Ax+Cz=0 \text{ (или } Ax+By=0);$$

и обратно: любое уравнение указанного вида определяет плоскость, проходящую через ось Oy (или Oz).

Плоскость коллинеарна координатной плоскости тогда и только тогда, когда она компланарна паре осей координат. Отсюда получаем признаки коллинеарности плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ с координатной плоскостью:

$$\begin{array}{lll} xOy & A=0, & B=0, \\ yOz & B=0, & C=0, \\ zOx & C=0, & A=0. \end{array}$$

Уравнения таких плоскостей будут $Cz+D=0$, $Ax+D=0$, $By+D=0$ или, разрешая относительно x, y, z, получаем:

$x=a$ — уравнение плоскости, коллинеарной плоскости yOz,
$y=b$ — уравнение плоскости, коллинеарной плоскости zOx,
$z=c$ — уравнение плоскости, коллинеарной плоскости xOy,

причём уравнение всякой плоскости, коллинеарной одной из координатных, записывается именно в таком виде. В частности,

$x=0$ — уравнение плоскости yOz;
$y=0$ — уравнение плоскости zOx;
$z=0$ — уравнение плоскости xOy.

Упражнения

131. Составить уравнение плоскостей, проходящих через точку (3, 1, 2) параллельно координатным плоскостям.

132. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (3, 1, 2) и ось Oy.

133. Через точки (3, 1, 2) и (— 1, 0, 1) проведена плоскость, параллельная оси Oz. Составить уравнение этой плоскости.

134. При каком условии плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ будет:
1) пересекать ось Ox?
2) пересекать плоскость yOz?
3) пересекать оси Oy и Oz?

§ 66. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку компланарно двум данным прямым

Поставим следующую задачу: *дана точка* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *и угловые коэффициенты* l, m, n *и* l', m', n' *двух прямых* a *и* a' *(между собой неколлинеарных). Требуется составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку компланарно двум данным прямым.*

Решение. Будем предполагать, что наша система координат прямоугольная. Докажем, что тогда прямая с угловыми коэффициентами

$$A=\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix}, \quad C=\begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}$$

перпендикулярна к обеим прямым α и α'. В самом деле: применяя условие перпендикулярности двух прямых, будем иметь:

$$lA+mB+nC=l\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}+m\begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix}+n\begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} l & m & n \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}=0,$$

$$l'A+m'B+n'C=l'\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}+m'\begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix}+n'\begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} l' & m' & n' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}=0.$$

Теперь искомое уравнение можно записать в виде:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

$$\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}(z-z_0)=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}=0.$$

Замечание. Так как в это уравнение входят величины, не изменяющиеся при сдвиге и сжатии, так как при сдвиге и сжатии компланарность сохраняется, и, наконец, так как при помощи сдвигов и сжатий можно произвольную косоугольную систему преобразовать в прямоугольную систему с масштабным кубом, то написанное уравнение будет решать поставленную нами задачу и в косоугольной системе.

Упражнения

135. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (3, 1, 5) и коллинеарной прямым с угловыми коэффициентами

$$l=2,\ m=3,\ n=-1 \text{ и } l'=1,\ m'=0,\ n'=2.$$

136. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и компланарной прямым с угловыми коэффициентами

$$l=1,\ m=0,\ n=1 \quad\text{и}\quad l'=0,\ m=1,\ n=1.$$

§ 67. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, и уравнение плоскости, проходящей через две точки компланарно данной прямой

I. *Уравнение плоскости, проходящей через три* неколлинеарные *точки* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, *пишется так:*

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0,$$

так как

$$\begin{aligned} l&=x_1-x_0, & m&=y_1-y_0, & n&=z_1-z_0; \\ l'&=x_2-x_0, & m'&=y_2-y_0, & n'&=z_2-z_0 \end{aligned}$$

являются угловыми коэффициентами прямых M_1M_0 и M_2M_0, компланарных данной плоскости.

II. *Уравнение плоскости, проходящей через точки* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *и* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и компланарной прямой с угловыми коэффициентами* l, m, n, *запишется, очевидно, так:*

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

Упражнения

137. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$M_1(2,\ 1,\ 0),\quad M_2(0,\ 1,\ 5),\quad M_3(-1,\ -1,\ 1).$$

138. Как запишется уравнение плоскости, проходящей через начало координат и две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$?

§ 68. Уравнение плоскости в отрезках

Рассмотрим плоскость, не проходящую через начало координат, не коллинеарную ни одной из осей координат и пересекающую оси координат в точках $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ и $C(0, 0, c)$. Числа a, b, c называют «отрезками», отсекаемыми нашей плоскостью на осях координат. На основании § 67 уравнение плоскости ABC имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

или после упрощений:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Упражнения

139. Составить уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки, соответственно равные 3, 4 и -5.

140. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(-3, 2, -1)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.

§ 69. Угол между двумя плоскостями

Пусть по отношению к декартовой прямоугольной системе координат заданы две плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

Как известно, тройки чисел A, B, C и A', B', C' являются угловыми коэффициентами прямых, перпендикулярных соответственно к нашим плоскостям. Поэтому углы между данными плоскостями будут равны углам между этими прямыми, а косинусы углов между этими прямыми мы можем получить из формулы, определяющей косинусы углов между двумя прямыми через их угловые коэффициенты (§ 59) (полагая $A=l$, $B=m$, $C=n$, $A'=l'$, $B'=m'$, $C'=n'$):

$$\cos\varphi=\pm\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}. \tag{1}$$

Из этой формулы, как следствие, получаем условие перпендикулярности двух плоскостей: *две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда равна нулю сумма произведений соответствующих коэффициентов при x, y, z в уравнениях этих плоскостей:*

$$AA'+BB'+CC'=0. \tag{2}$$

Условие коллинеарности двух плоскостей можно получить, например, из таких соображений: плоскости коллинеарны тогда и только тогда, когда коллинеарны прямые, к ним перпендикулярные, а, как известно, условие коллинеарности прямых с угловыми коэффициентами A, B, C и A', B', C' таково:

$$A=\lambda A',\quad B=\lambda B',\quad C=\lambda B'\ (\lambda\neq 0);$$

это и есть условие коллинеарности двух плоскостей.

Замечание. Отметим, что в косоугольной системе условие перпендикулярности двух плоскостей нельзя писать в виде $AA'+BB'+CC'=0$, но условие $A=\lambda A'$, $B=\lambda B'$, $C=\lambda C'$ их коллинеарности в точности сохраняется: в самом деле, деформируя при помощи сдвигов и сжатий масштабный параллелепипед в куб, мы преобразуем наши плоскости Π_1 и Π_2 в новые плоскости Π'_1 и Π'_2, уравнения которых в новой системе будут теми же. Из условия $A=\lambda A'$, $B=\lambda B'$, $C=\lambda C'$ следует, что плоскости Π'_1 и Π'_2 коллинеарны, значит коллинеарны плоскости Π_1 и Π_2. Обратно: если коллинеарны плоскости Π_1 и Π_2, то будут коллинеарны Π'_1 и Π'_2, а значит будет выполнено условие

$$A=\lambda A', \quad B=\lambda B', \quad C=\lambda C'.$$

Упражнения

141. Найти углы между плоскостями

$$2x+3y-z+4=0,$$
$$7x-y+2z=0.$$

142. Найти углы, образованные плоскостью

$$3x+3y-z+4=0$$

с координатными плоскостями.

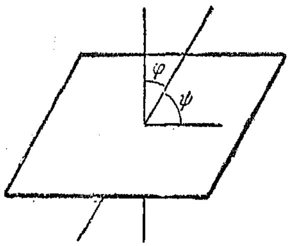
143. Доказать, что плоскости

$$x+y-z+4=0,$$
$$3x-2y+z=0$$

взаимноперпендикулярны.

§ 70. Угол между прямой и плоскостью

Угол ψ между прямой и плоскостью в сумме с одним из углов φ между прямой и перпендикуляром к этой плоскости даёт $90°$:



Черт. 180.

$$\psi+\varphi=90°$$

(черт. 180), откуда

$$\cos\varphi=\sin\psi.$$

Если плоскость задана уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то A, B и C являются угловыми коэффициентами прямой, перпендикулярной к плоскости, а если l, m, n — угловые коэффициенты некоторой прямой, то косинус угла φ между этими прямыми вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

так как φ — острый угол. Отсюда находим:

$$\sin\psi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\;\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad (1)$$

Если прямая и плоскость перпендикулярны, то прямая и нормаль к рассматриваемой плоскости коллинеарны, значит

$$A=\lambda l, \quad B=\lambda m, \quad C=\lambda n$$

— таково условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Упражнения

144. Угловые коэффициенты прямой равны 3, 2, —1. Найти угол, образованный этой прямой с плоскостью

$$3x-y+z=0.$$

145. Найти углы, образованные плоскостью

$$4x-y+z=0$$

с осями координат.

146. Найти угол плоскости, проходящей через биссектрисы углов xOy и xOz с биссектрисой угла yOz.

§ 71. Прямая как пересечение двух плоскостей

В § 58, 61, относящихся к теории прямой линии в пространстве, мы указывали, что прямая в пространстве определяется параметрическими уравнениями. Прямую в пространстве можно задать также уравнениями двух плоскостей, через неё проходящих:

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+Cz+D=0, \\ A'x+B'y+C'z+D'=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Пусть l, m, n — угловые коэффициенты прямой, по которой пересекаются данные плоскости.

Тогда из условия компланарности этой прямой с каждой из данных плоскостей

$$\begin{gathered} Al+Bm+Cn=0, \\ A'l+B'm+C'n=0 \end{gathered}$$

находим угловые коэффициенты данной прямой:

$$l=\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \quad m=\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}, \quad n=\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

В качестве примера рассмотрим оси координат: уравнения оси Ox таковы: $y=0$ и $z=0$, так как эти уравнения определяют плоскости xOz и xOy, которые пересекаются по оси Ox. Точно так же устанавливаем, что уравнения оси Oy суть $x=0$, $z=0$, а уравнения оси Oz:

$$x=0, \quad y=0.$$

Упражнения

147. Составить уравнения перпендикуляров, опущенных из точки $M(a, b, c)$ на координатные оси.

148. Составить уравнение проекции оси Oy в плоскость

$$x+y-z+4=0.$$

149. Составить уравнение плоскостей, проходящих через прямую:

$$x - y + 2z = 0,$$
$$x + 4y - 3z + 1 = 0,$$

компланарных осям координат.

§ 72. Расстояние от точки до плоскости

Для определения расстояния точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ составим уравнения

$$x = x_0 + At,$$
$$y = y_0 + Bt,$$
$$z = z_0 + Ct$$

прямой, проходящей через точку M_0, перпендикулярной к данной плоскости. Решая совместно уравнения этого перпендикуляра с уравнением плоскости, находим сначала t, а затем и координаты

$$x' = x_0 - A\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$y' = y_0 - B\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad z' = z_0 - C\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

основания перпендикуляра.

Искомое расстояние найдём по формуле, определяющей расстояние между двумя точками:

$$d = \sqrt{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2},$$

или, произведя преобразования:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{1}$$

т. е. *расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной своим общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ относительно декартовой прямоугольной системы координат, равно дроби, в числителе которой стоит абсолютная величина результата подстановки координат данной точки в левую часть уравнения плоскости, а в знаменателе — корень квадратный из суммы квадратов коэффициентов при x, y, z в уравнении плоскости.*

Точно так же, как и на плоскости, можно доказать, что по одну сторону от плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ функция $Ax + By + Cz + D$ положительна, т. е. $Ax + By + Cz + D > 0$ (положительное полупространство), а по другую сторону $Ax + By + Cz + D < 0$ (отрицательное полупространство).

Ориентированным расстоянием δ *от точки до плоскости будем называть расстояние от этой точки до плоскости, которому приписан знак, а именно: расстояние* δ *будем считать положительным, если точка лежит в положительном полупространстве, и отрицательным, если она лежит в отрицательном полупространстве. Очевидно,*

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (2)$$

Упражнения

150. Найти расстояние от точки (3, 2, 1) до плоскости

$$x - y + z - 4 = 0.$$

151. Составить уравнение биссектрис углов между плоскостями

$$x + z - 3 = 0, \quad y - x + 4 = 0.$$

152. Найти высоту h_S пирамиды, вершины которой

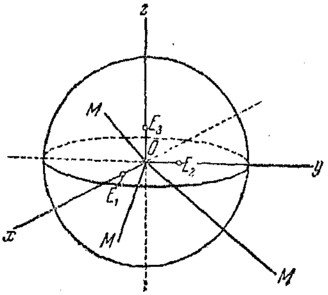
$$S(0, 6, 4), \quad A(3, 5, 3), \quad B(-2, 4, -5), \quad C(1, -1, 4).$$

ГЛАВА XIII

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 73. Сфера

Рассмотрим сферу радиуса r с центром в начале координат (черт. 181). Пусть $M(x, y, z)$ — любая точка, лежащая на этой сфере. Расстояние от этой точки до центра сферы, т. е. до начала координат, равно $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, а с другой стороны, это же расстояние равно радиусу r сферы, т. е.



Черт. 181.

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$$

или

$$x^2+y^2+z^2=r^2. \qquad (1)$$

Это уравнение и называется уравнением данной сферы. Нетрудно видеть, что для точек $M(x, y, z)$, лежащих вне сферы,

$$x^2+y^2+z^2>r^2,$$

а для всех точек $M(x, y, z)$, лежащих внутри сферы,

$$x^2+y^2+z^2<r^2.$$

Если центр сферы находится в точке $C(a, b, c)$, а радиус её равен r, то уравнение сферы запишется так:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Упражнения

153. Составить уравнение сферы радиуса $r=4$ с центром в начале координат.

154. Составить уравнения сферы радиуса $r=5$ с центром в точке $(3-5,1)$.

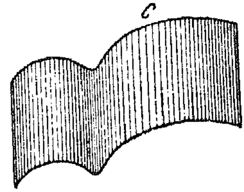
155. Доказать, что уравнение $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z=0$ определяет сферу. Найти её центр и радиус.

§ 74. Цилиндрические поверхности

Цилиндрической поверхностью или просто цилиндром называется множество параллельных прямых, проходящих через все точки некоторой линии C (черт. 182).

Эта линия C называется направляющей цилиндра, а каждая из прямых, лежащих на поверхности цилиндра, называется образующей цилиндра.

Ясно, что цилиндр полностью определяется заданием направляющей линии C и направлением образующих цилиндра. Направляющая линия C может быть и не плоской линией, однако чаще всего направляющую линию мы будем считать плоской.

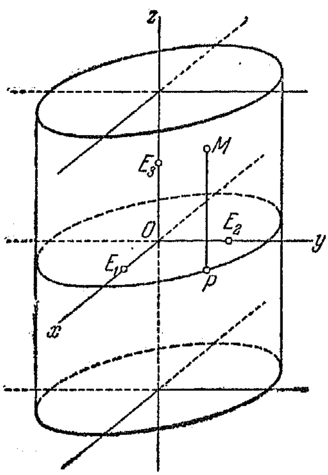


Черт. 182.

Составим уравнение цилиндра для того случая, когда направляющая линия лежит в какой-нибудь из координатных плоскостей, например в плоскости xOy, а образующие цилиндра коллинеарны оси Oz. Пусть, например, направляющей служит окружность радиуса r с центром в начале координат, лежащая в плоскости xOy (черт. 183). Уравнение этой окружности в плоскости xOy таково:

$$x^2+y^2=r^2. \tag{1}$$

Возьмём на поверхности цилиндра, для которого эта окружность служит направляющей, а образующие параллельны оси Oz, любую точку $M(x, y, z)$ и рассмотрим её проекцию $P(x, y, 0)$ в плоскость xOy. Точка P лежит на данной окружности и, значит, её координаты удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=r^2$, но абсцисса и ордината точки P соответственно равны абсциссе и ординате точки M, значит, можно сказать и так: уравнению (1) удовлетворяют координаты любой точки цилиндра (так как в это уравнение z вовсе не входит). Итак, уравнение $x^2+y^2=r^2$ и есть уравнение цилиндра.



Черт. 183.

Таким образом, если рассматривать уравнение (1) только для точек плоскости xOy, то оно определяет окружность, но если рассматривать все точки пространства, координаты которых ему удовлетворяют, то эти точки расположатся на цилиндре с образующими, параллельными оси Oz, для которых окружность (1) будет направляющей.

Вообще: повторяя в точности те же рассуждения, легко получить, что *уравнение любой цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Oz и направляющая которой лежит в плоскости xOy, имеет вид:*

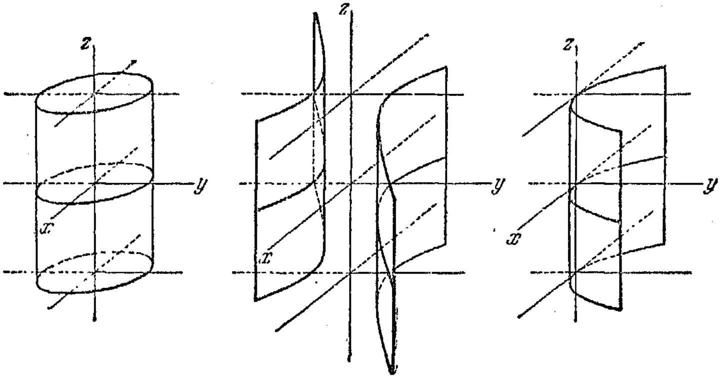
$$F(x, y)=0;$$

все точки плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, образуют направляющую линию.

Например, уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad y=ax^2$$

определяют в пространстве соответственно эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры с образующими, коллинеарными оси Oz (черт. 184). Множества же точек плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют этим уравнениям, определяют соответственно эллипс, гиперболу, параболу — направляющие линии этих цилиндров.



Черт. 184.

Всё сказанное можно перенести и на случай цилиндров с образующими, коллинеарными другим осям координат.

Упражнение

156. Какие поверхности определяют следующие уравнения:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, 3) $z=ax^2$,

4) $\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 5) $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 6) $y=az^2$,

7) $xy=1$, 8) $y=ax^2+bx+c$, 9) $x^2+y^2-2y=0$.

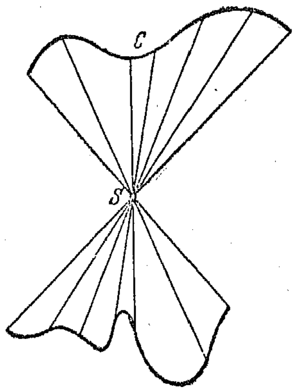
§ 75. Конусы

Определение. *Конической поверхностью или просто конусом называется множество прямых, проходящих через некоторую точку S и пересекающих некоторую линию C* (черт. 185).

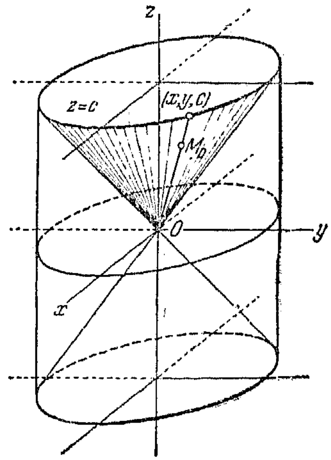
Точка S называется вершиной конуса. Прямые, лежащие на поверхности конуса, называются его образующими.

Линия C называется направляющей конуса. Направляющую мы чаще всего будем считать плоской линией.

Составим, например, уравнение конуса, вершина которого лежит в начале координат, а направляющей линией служит эллипс, являю-



Черт. 185.



Черт. 186.

щийся пересечением плоскости $z=c$, параллельной плоскости xOy с поверхностью эллиптического цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

(черт. 186).

Возьмём на поверхности конуса любую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Уравнения прямой OM_0 суть:

$$x=x_0t, \quad y=y_0t, \quad z=z_0t.$$

Пусть эта прямая встречает направляющий эллипс в точке (x, y, c); тогда $z_0t=c$, $t=\frac{c}{z_0}$ и, значит,

$$x=x_0t=\frac{cx_0}{z_0}, \quad y=\frac{cy_0}{z_0}.$$

Эти координаты должны удовлетворять уравнению (1), значит,

$$\frac{x_0^2c^2}{a^2z_0^2}+\frac{y_0^2c^2}{b^2z_0^2}=1$$

или

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=0.$$

Отсюда следует, что уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{2}$$

и есть уравнение конуса, так как этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки нашего конуса (и только координаты таких точек).

В частности, если направляющий эллипс является окружностью, т. е. $a=b$, то конус будет круговой; его уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{3}$$

Упражнения

157. Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющей служит линия пересечения плоскости $x=a$ с гиперболическим цилиндром

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

158. Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющей служит линия пересечения плоскости $z=h$ с параболическим цилиндром

$$y=ax^2+bx+c.$$

159. Составить уравнение конуса, вершина которого лежит на оси Oz в точке $(0, 0, h)$, а направляющей служит окружность радиуса r с центром в начале координат, лежащая в плоскости xOy.

§ 76. Поверхности вращения

Поверхностью вращения называется поверхность, образованная при вращении какой-либо линии (черт. 187) *вокруг какой-нибудь прямой l.*

Прямая l называется осью вращения. Окружности, по которым рассекается поверхность вращения плоскостями, перпендикулярными к оси вращения, называются параллелями поверхности вращения, а линии, по которым пересекается поверхность вращения плоскостями, проходящими через ось вращения, называются меридианами поверхности вращения.

На чертеже 188 изображён тор вместе с его параллелями и меридианами (тором называется поверхность вращения, для которой меридианом служит окружность, не пересекающая ось вращения, т. е. поверхность, образованная вращением окружности вокруг прямой, её не пересекающей).

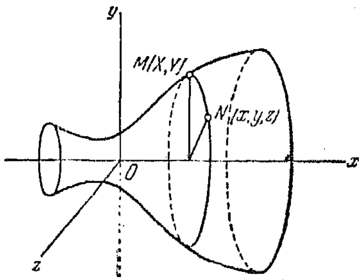
В плоскости xOy рассмотрим линию C, определяемую уравнением

$$Y=f(X)$$

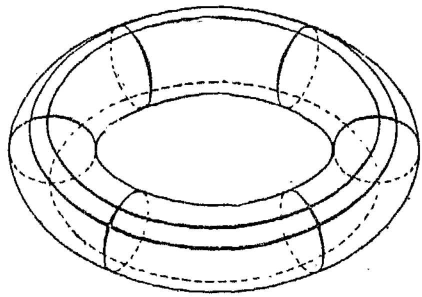
(черт. 187).

Будем вращать эту линию вокруг оси Ox. Тогда каждая точка $M(X, Y)$ линии C опишет окружность, радиус которой равен $|Y|$ (черт. 187), а *линия C опишет поверхность вращения.*

Возьмём на поверхности вращения любую точку $N(x, y, z)$ и проведём через неё плоскость, перпендикулярную к оси вращения Ox.



Черт. 187.



Черт. 188.

Эта плоскость встретит линию C в некоторой точке $M(X, Y)$. Расстояния от точек $M(X, Y)$ и $M(x, y, z)$ до оси вращения, т. е. до оси Ox:

$$|Y| \text{ и } \sqrt{y^2+z^2};$$

эти числа будут равны как длины радиусов одной и той же окружности:

$$|Y|=\sqrt{y^2+z^2}.$$

Кроме того, очевидно, что $x=X$; далее из уравнения $Y=f(X)$ получаем: $|Y|=|f(X)|$ и значит,

$$\sqrt{y^2+z^2}=|f(x)|$$

или

$$y^2+z^2=(f(x))^2.$$

Это уравнение и есть уравнение поверхности вращения.

Итак, для написания уравнения поверхности вращения, полученной от вращения вокруг оси Ox линии $Y=f(X)$, надо обе части этого уравнения возвести в квадрат: $Y^2=f^2(X)$, заменить Y^2 на y^2+z^2, а X на x.

Замечание I. Если линия C задана уравнением $Y^2=\varphi(X)$, то возводить в квадрат обе части уравнения, конечно, не нужно; уравнение поверхности вращения в этом случае сразу запишется так:

$$y^2+z^2=\varphi(x).$$

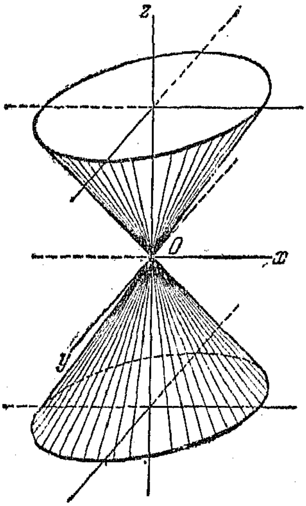
Замечание II. Сказанное легко распространить и на случай поверхностей вращения, для которых осями вращения служат другие оси: Oy или Oz.

Пример 1. Сферу можно рассматривать как поверхность, полученную вращением окружности $x^2+y^2=r^2$ вокруг оси Ox.

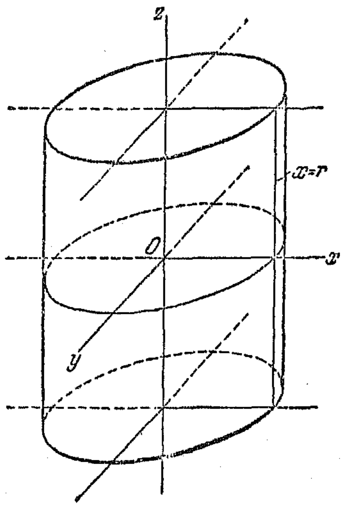
Так как в уравнение $x^2+y^2=r^2$ ордината y входит во второй степени, то, заменяя в нём y^2 на y^2+z^2, мы получим уравнение сферы

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Пример 2. Рассмотрим прямую $z=kx$ (черт. 189). Вращая эту прямую вокруг оси Oz, получим конус. Его уравнение составим так: возводя



Черт. 189.



Черт. 190.

в квадрат обе части уравнения $z=kx$ и заменяя затем x^2 на x^2+y^2, получим:

$$z^2=k^2(x^2+y^2).$$

Это уравнение совпадает с уравнением (3) § 75, если в нём принять $\frac{c^2}{a^2}=k^2$.

Пример 3. Рассмотрим прямую $x=r$, лежащую в плоскости xOz (черт. 190). Вращая её вокруг оси Oz, получим круглый цилиндр, уравнение которого находим так:

$$x=r,$$
$$x^2=r^2,$$
$$x^2+y^2=r^2.$$

Упражнение

160. Составить уравнение поверхности вращения, полученной от вращения вокруг оси Ox следующих линий:

$$y=ax^2+bx+c \text{ — парабола},$$
$$y=\sin x \text{ — синусоида}.$$

§ 77. Эллипсоид

Рассмотрим сферу радиуса 1 с центром в начале координат; её уравнение

$$x^2+y^2+z^2=1. \qquad (1)$$

Растянем пространство от плоскости yOz по направлению оси Ox «в a раз», от плоскости zOx по направлению оси Oy «в b раз» и от плоскости xOy по направлению оси Oz «в c раз».

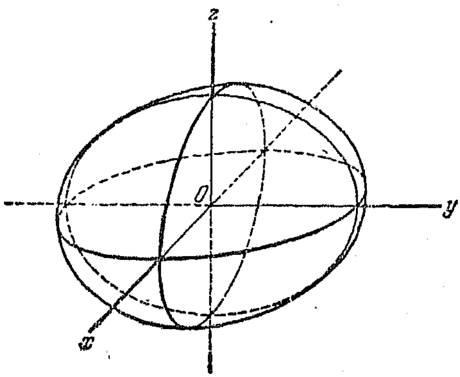
Если X, Y, Z — координаты точки M, в которую при этом перейдёт точка $m(x, y, z)$, то

$$X=ax,\quad Y=by,\quad Z=cz.$$

Сфера при указанных растяжениях перейдёт в поверхность, называемую **эллипсоидом** (черт. 191). Уравнение эллипсоида мы получим из уравнения (1) сферы, замечая, что

$$x=\frac{X}{a},\quad y=\frac{Y}{b},\quad z=\frac{Z}{c}:$$

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1. \qquad (2)$$



Черт. 191.

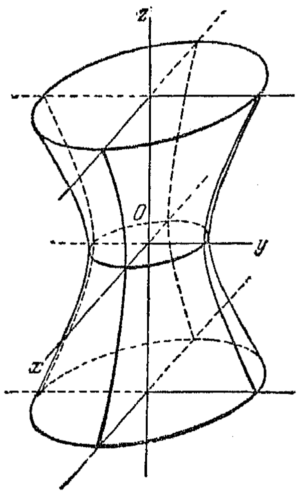
Мы будем предполагать, что

$$a\geqslant b\geqslant c.$$

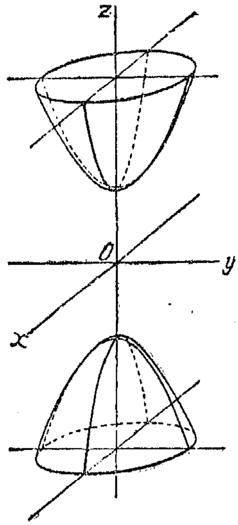
Числа a, b, c называются **полуосями** эллипсоида. Если $a>b>c$, то эллипсоид называется **трёхосным**. Если $a>b=c$, то эллипсоид называется **вытянутым эллипсоидом вращения**, так как в этом случае его можно получить, вращая эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Ox. Его можно также получить, вытягивая сферу радиуса $b=c$ вдоль оси Ox в $\frac{a}{b}$ раз (приблизительно такую форму имеет огурец). Если, наконец, $a=b>c$, то эллипсоид называется сжатым эллипсоидом вращения, так как его можно получить, вращая эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ вокруг оси Oz. Его можно также получить, сжимая сферу радиуса $a=b$ к плоскости xOy по направлению оси Oz в $\frac{c}{a}$ раз; приблизительно такую форму имеет, например, репа.

§ 78. Однополостный и двуполостный гиперболоиды

При вращении гиперболы $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ около её мнимой оси симметрии получается поверхность, называемая однополостным гиперболоидом вращения.



Черт. 192.



Черт. 193.

На основании § 76 уравнение однополостного гиперболоида вращения будет:

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

Сожмём теперь однополостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

к плоскости yOz по направлению оси Ox; пусть точка $A(b,\ 0,\ 0)$ перейдёт в точку $A'(a,\ 0,\ c)$; тогда коэффициент сжатия будет равен $\frac{a}{b}$, и формулы, определяющие сжатие, будут иметь вид:

$$X=\frac{a}{b}x, \quad Y=y, \quad Z=z, \tag{α}$$

а потому уравнение сжатого однополостного гиперболоида запишется так:

$$\frac{\frac{b^2}{a^2}X^2+Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

или

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1. \qquad (2)$$

Эта поверхность называется однополостным гиперболоидом (черт. 192). При вращении гиперболы

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

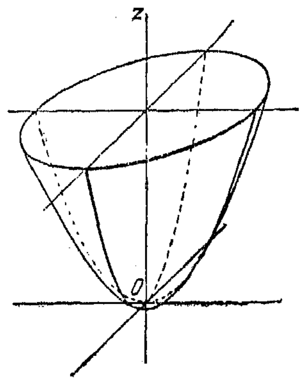
около её действительной оси (OZ) получим поверхность, называемую двуполостным гиперболоидом вращения.

Уравнение двуполостного гиперболоида вращения будет

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{b^2}=1. \qquad (3)$$

Если произвести сжатие (α) над двуполостным гиперболоидом, то уравнение (3) перейдёт в уравнение

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=-1. \qquad (4)$$



Черт. 194.

Эта поверхность называется двуполостным гиперболоидом (черт. 193).

§ 79. Эллиптический параболоид

Рассмотрим параболу $2pz=x^2$. Уравнение поверхности, полученной от вращения этой параболы вокруг её оси симметрии, запишется так:

$$2pz=x^2+y^2 \quad \text{или} \quad 2z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p} \qquad (1)$$

(параболоид вращения), а если эту поверхность сжать к плоскости xOz по направлению оси Oy, то в последнем уравнении изменится лишь коэффициент при y^2 и оно примет вид:

$$\frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}=2Z. \qquad (2)$$

Это уравнение поверхности, называемой эллиптическим параболоидом (черт. 194).

§ 80. Гиперболический параболоид

Рассмотрим в заключение поверхность второго порядка, определяемую в декартовой прямоугольной системе координат уравнением

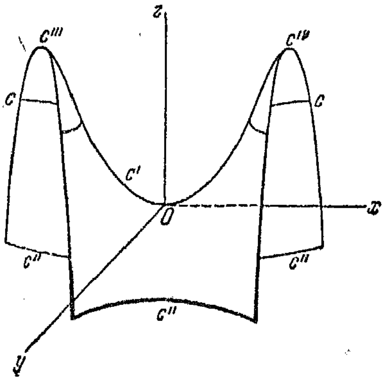
$$\frac{X^2}{p}-\frac{Y^2}{q}=2Z, \tag{1}$$

где $p>0$ и $q>0$. Эта поверхность называется **гиперболическим параболоидом**.

Исследуем форму поверхности:

1) в сечении её плоскостью $Z=h>0$, параллельной плоскости xOy, получаем гиперболу C (черт. 195):

$$\frac{X^2}{p}-\frac{Y^2}{q}=2h, \quad Z=h$$



Черт. 195.

с полуосями $\sqrt{2ph}$ и $\sqrt{2qh}$. Действительная ось этой гиперболы параллельна оси Ox, а мнимая — оси Oy. В сечении поверхности плоскостью $Y=0$ получаем параболу C': $X^2=2pZ$.

2) В сечении поверхности плоскостью $Z=-h$ $(h>0)$ получаем гиперболу C'':

$$\frac{Y^2}{-2qh}-\frac{X^2}{-2ph}=1, \quad Z=-h$$

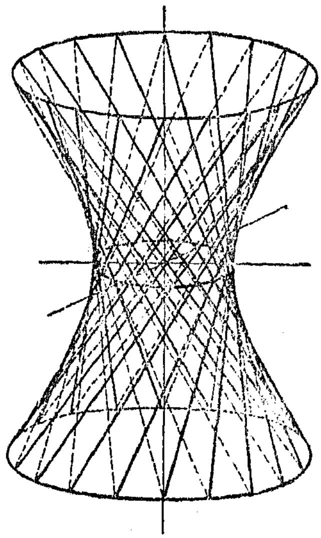
с полуосями $\sqrt{-2qh}$ и $\sqrt{-2ph}$. Действительная ось этой гиперболы параллельна оси Oy, а мнимая — оси Ox (черт. 195). Наконец, в сечении нашей поверхности плоскостями $x=\pm h$ получаем параболы C''' и C^{IV}:

$$Y^2=-2q\left(Z-\frac{h^2}{2p}\right), \quad X=\pm h.$$

Вершины парабол находятся в точках $P_{1,2}$ $\left(\pm h,\ 0,\ \frac{h^2}{2p}\right)$. Эти сечения уже дают достаточно ясное представление о форме нашей поверхности: поверхность имеет седлообразную форму.

§ 81. Замечания

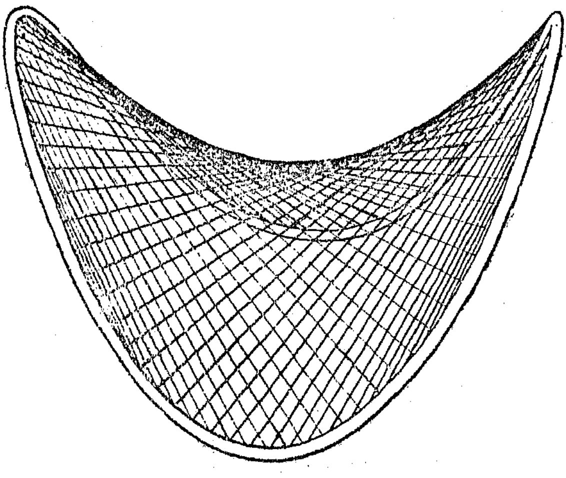
Все рассмотренные поверхности определялись в декартовой системе координат уравнениями второй степени относительно координат, т. е. все эти поверхности были поверхностями второго порядка. Оказывается, что исследованными поверхностями исчерпываются важнейшие поверхности второго порядка. Можно было бы доказать, что, не считая ряда случаев, а именно случаев, когда уравнение второй степени не определяет никакой поверхности или определяет пару плоскостей, любое уравнение второй степени определяет одну из рассмотренных выше поверхностей. Доказательство этой теоремы выходит за рамки настоящего курса; оно значительно сложнее аналогичной теоремы, доказанной нами для линий второго порядка.



Черт. 196.

Поверхности второго порядка обладают целым рядом замечательных свойств, гораздо более глубоких геометрически и более сложных, чем это имело место для линий второго порядка. Например, на первый взгляд только цилиндры и конусы могут быть образованы прямыми линиями. В действительности такие «кривые» поверхности, как однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид, также могут быть образованы из прямых. Существуют модели этих поверхностей из натянутых нитей (черт. 196).

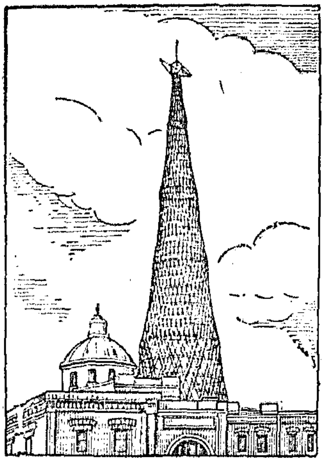
Таким образом, например, «седло» можно изготовить из палок! Возможность образования поверхности однополостного гиперболоида



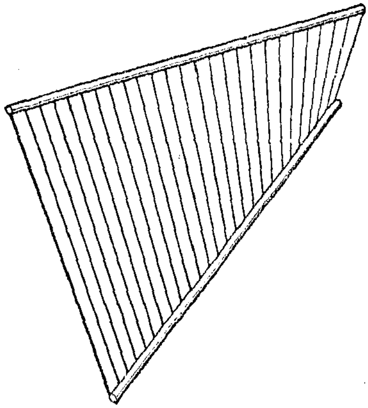
Черт. 196 а.

из прямых была использована русским инженером Шуховым для постройки известной радиостанции в Москве (черт. 197).

Представление о форме гиперболического параболоида можно получить опять из той модели, которая была указана в § 18 для изучения сдвига и сжатия: если повернуть одну из планок так,

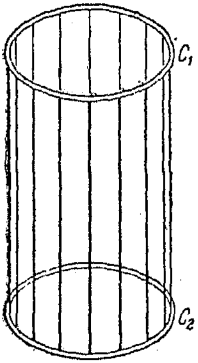


Черт. 197.

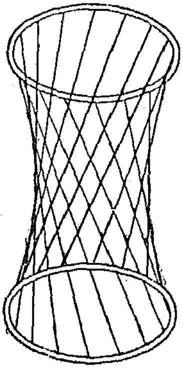


Черт. 198.

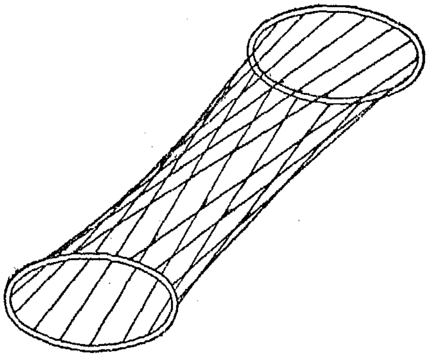
чтобы верхняя и нижняя планки скрещивались в пространстве, то натянутые резиновые нити расположатся на поверхности гиперболического параболоида (это мы оставляем без доказательства) (черт. 198).



Черт. 199.



Черт. 200.



Черт. 201.

Рассмотрим две окружности C_1 и C_2, расположенные в двух параллельных плоскостях так, что прямая O_1O_2, соединяющая их центры, перпендикулярна к этим плоскостям (черт. 199).

Перетянем эти окружности резиновыми нитями, параллельными оси O_1O_2 (черт. 199). Если теперь повернуть одну из окружностей (или обе!) около оси O_1O_2, то резинки расположатся на поверхности однополостного гиперболоида вращения (черт. 200), а если затем произвести сдвиг одной из окружностей относительно плоскости, в которой расположена другая, то резиновые нити перейдут на поверхность уже однополостного гиперболоида, не являющегося гиперболоидом вращения (черт. 201).

Мы рекомендуем читателю произвести эти опыты. Вы увидите тогда «скелеты» указанных поверхностей, образованные прямыми, на них лежащими. Отметим, что «Шуховская башня» в Москве образована из «прямых» (балок), расположенных на частях нескольких однополостных гиперболоидов вращения, причём эти части соединены по плоскостям круговых сечений одинаковых радиусов (уменьшающихся кверху!).

ГЛАВА XIV

ФУНКЦИЯ

§ 82. Понятие функции

Понятие функции является основным в анализе. Оно связано с понятиями множества и отображения одного множества на другое.

Вместе с тем все эти понятия считаются первоначальными, т. е. не определяемыми через другие, более простые понятия. Таким образом то, что говорится ниже, следует рассматривать как разъяснения, а не как определения.

Множеством мы называем совокупность предметов или группу предметов, собрание предметов и т. д. Рассмотрим примеры множества:

1) Множество людей в одной аудитории.
2) Множество книг в какой-либо библиотеке.
3) Множество атомов в данном куске вещества.
4) Множество всех целых положительных чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

5) Множество всех действительных чисел.
6) Множество всех точек какой-нибудь прямой линии.
7) Множество всех треугольников на плоскости и т. д.

Те вещи, из которых составлено множество, называются **элементами** этого множества. Если какой-то элемент α принадлежит рассматриваемому множеству $\mathfrak{M}$, то говорят, что этот элемент входит в это множество или принадлежит этому множеству и пишут:

$$\alpha \in \mathfrak{M}.$$

Если же элемент α не принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, то будем писать:

$$\alpha \overline{\in} \mathfrak{M};$$

так, например, если $\mathfrak{M}$ есть множество всех целых положительных чисел, то

$$2 \in \mathfrak{M},\ 10 \in \mathfrak{M},\ +125 \in \mathfrak{M},$$

но

$$\frac{3}{2} \overline{\in} \mathfrak{M},\ -2 \overline{\in} \mathfrak{M},\ \sqrt{2} \overline{\in} \mathfrak{M} \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, природа элементов каждого из которых для нас совершенно безразлична, т. е. элементами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ могут быть люди, книги, числа и вообще какие угодно предметы или понятия.

Предположим, что установлено соответствие (отображение), при котором каждому элементу множества $\mathfrak{M}$ поставлено в соответствие один или более элементов множества $\mathfrak{N}$. Тогда мы будем говорить, что задана функция, и будем это записывать так:

$$y = f(x);$$

здесь x — любой элемент множества $\mathfrak{M}$, называемый аргументом, а y—значение функции, т. е. y есть множество тех элементов $\mathfrak{N}$, которые ставятся в соответствие элементу x. Множество $\mathfrak{M}$ называется областью определения функции $f(x)$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество книг в данной библиотеке, а $\mathfrak{N}$ есть множество читателей. Поставим в соответствие каждой книге всех тех читателей, которые эту книгу читали. Областью определения этой функции является множество $\mathfrak{M}$ книг в библиотеке; здесь аргумент x — это любая книга из данной библиотеки, а значение функции, т. е. y, — множество всех читателей, прочитавших книгу x.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество должностей в данном учреждении, а $\mathfrak{N}$ множество людей, работавших на этих должностях за всё время существования рассматриваемого учреждения. Поставим в соответствие должности x всех людей, которые занимали должность x. Здесь аргумент x — это должность, значение функции, т. е. y, — множество всех тех людей, которые занимали должность x.

Пример 3. Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество мест в данном классе, а $\mathfrak{N}$ множество всех тех учеников, которые учились в этом классе (скажем, за всё время существования школы). Поставим в соответствие каждому месту x всех тех учеников, которые хотя бы один раз сидели на месте x. Здесь аргумент x — это место в данном классе. Значение функции, т. е. y, — множество всех тех учеников, которые сидели на месте x.

Пример 4. Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество людей в данном городе, а $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$, т. е. и $\mathfrak{N}$ есть множество тех же людей в данном городе. Поставим в соответствие каждому человеку x всех его знакомых данного города. Здесь аргумент x есть человек, а значение функции y — множество всех его знакомых.

Пример 5. Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество точек нагретой пластинки, а $\mathfrak{N}$ есть множество температур в точках этой пластинки. Поставим в соответствие точке x пластинки температуру y в этой точке. Здесь аргумент x — точка, значение функции, т. е. y, — температура пластинки в точке x.

Пример 6. Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество треугольников плоскости, а $\mathfrak{N}$ есть множество точек той же плоскости. Поставим каждому треугольнику в соответствие точки, равноудалённые от его сторон (таких точек будет 4). Здесь аргумент x — это треугольник. Значение функции, т. е. y, — точки, равноудалённые от сторон треугольника.

Пример 7. Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество всех действительных положительных чисел, а $\mathfrak{N}$ есть множество всех прямоугольников на плоскости. Поставим в соответствие каждому положительному числу x прямоугольник y, площадь которого равна x. Здесь аргумент x — это действительное положительное число. Значение функции, т. е. y, есть множество всех тех прямоугольников, площадь которых равна x. В этом примере аргументу x соответствует бесконечное множество прямоугольников, имеющих площадь, равную x.

В настоящем курсе мы будем изучать функции, для которых элементами множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ являются действительные числа и каждому числу x из множества $\mathfrak{M}$ ставится в соответствие только одно число y из множества $\mathfrak{N}$ (однозначная функция). Но даже такое ограничение не снимает с нас необходимости пересмотреть целый ряд понятий, вводимых в математике при изучении различных объектов; таковы понятия: равенства, суммы, разности, произведения функций и т. д. В самом деле: если каждому числу x из множества $\mathfrak{M}$ поставлено в соответствие только одно число y из множества $\mathfrak{N}$, т. е. мы имеем функцию *)

$$y=f(x),$$

и если задано второе соответствие $y=\varphi(x)$ между двумя другими (или теми же самыми!) множествами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ чисел, то что же надо понимать под суммой

$$f(x)+\varphi(x)?$$

Как надо понимать равенство

$$f(x)=\varphi(x)? \text{ и т. д.}$$

Всё это должно быть определено, так как понятия равенства, суммы и т. д. нам известны для чисел, а функция не есть число.

Определения. *Две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются равными, если области их определения совпадают и если их значения равны*

$$f(x)=\varphi(x)$$

при любом x из области определения этих функций.

Суммой функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, области определения которых соответственно $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, назовём функцию, которая определена для всех значений x, которые входят и в $\mathfrak{M}_1$ и в $\mathfrak{M}_2$; значение функции-суммы в точке x, входящей и в $\mathfrak{M}_1$ и в $\mathfrak{M}_2$, равно $f(x)+\varphi(x)$.

Аналогично определяются понятия разности двух функций, их произведения, частного (если делитель отличен от нуля) и т. д.

Значение функции $f(x)$ в точке $x=a$ обозначается так: $f(a)$.

Если закон соответствия, определяющий функцию, задан формулой, а относительно области определения этой функции ничего не

---

*) В настоящем курсе мы будем изучать лишь однозначные функции; слово «функция» у нас означает «однозначная функция».

Изучение многозначных функций и определение для них таких понятий, как равенство, сумма, произведение и т. д., значительно сложнее соответствующих определений для функций однозначных. В большинстве вопросов математики чаще всего или имеют дело с однозначными функциями или сводят изучение многозначной функции к изучению нескольких однозначных. Поэтому, разъяснив понятие функции в полной и законченной форме как любого отображения одного множества на другое, мы в дальнейшем многозначные функции изучать не будем.

сказано, то под областью определения мы будем понимать множество **всех** чисел, при которых упомянутая формула имеет смысл, т. е. определяет некоторое действительное число y (например, областью определения функции $y = \lg x$ является множество всех положительных чисел). Рассмотрим ещё ряд примеров.

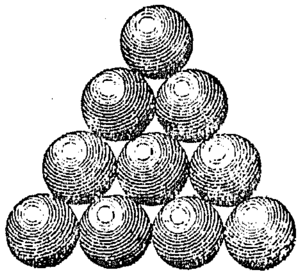
Пример 8. Круглые ядра сложены в виде правильного треугольника, причём на каждой стороне основания умещено n ядер. Общее число N ядер определяется формулой (черт. 202)

$$N = \frac{1}{2} n (n+1).$$

В этом примере аргументом является число n ядер, сложенных в основании треугольника, функцией является общее число N ядер, а областью определения этой функции $N = f(n)$ является множество всех целых положительных чисел, бо́льших или равных 2, так как по смыслу примера n может быть только любым целым положительным числом, бо́льшим или равным 2. Имеем, например,

$$f(2) = 3, \quad f(5) = 15$$

и т. д.



Черт. 202.

Пример 9. Стоимость книги 5 руб., тираж её 1000. Сколько рублей стоит x книг этого тиража?

Обозначив через y искомую сумму, будем иметь:

$$y = 5x.$$

В этом примере аргументом является число x книг, функция y — число рублей, выражающих стоимость x книг. Областью определения функции y является множество целых чисел от 0 до 1000, так как по смыслу задачи x может быть только любым числом из этого множества. Имеем, например,

$$f(10) = 50, \quad f(40) = 200$$

и т. д.

Пример 10. Имеется 30 $см^3$ металла, удельный вес которого равен 5 $г/см^3$. Сколько граммов весит x $см^3$ этого металла?

Обозначив через y искомое число граммов, будем иметь:

$$y = 5x.$$

Здесь аргументом является число x $см^3$ металла. Функцией является число y, выражающее в граммах вес x $см^3$ металла. Областью определения функции является сегмент $[0,30]$, так как x по смыслу примера может быть только одним из чисел этого множества. Обратите внимание, что функции примеров 9 и 10 различны, так как хотя закон соответствия выражается одной и той же формулой ($y = 5x$), но различны области их определения. Для функции $f(x)$ последнего примера имеем, например, $f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{35}{3}$, в то время как символ $f\left(\frac{7}{3}\right)$ в примере 9 не имеет никакого смысла, так как не имеет смысла говорить о стоимости $\frac{7}{3}$ книг.

Пример 11. Тело свободно падает с высоты 490 $м$. На какой высоте s от поверхности земли находится тело через t сек. от начала падения?

За начало отсчёта времени примем начало падения. Ускорение земного притяжения будем считать равным 9,8 *м/сек²*.

Решение. Если t не превосходит 10 сек., то $s = 490 - 4{,}9t^2$; через 10 сек. тело упадёт на землю, т. е. $s = 0$ при $t > 10$. Итак, окончательно

$$s = \begin{cases} 490 - 4{,}9 \cdot t^2, & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant 10, \\ 0 \quad , & \text{если} \quad t > 10. \end{cases}$$

В этом примере аргументом является число t, измеряющее время, функция — число s, измеряющее (в метрах) расстояние тела от поверхности земли, областью определения функции является полусегмент $[0, +\infty)$, т. е. множество всех неотрицательных чисел.

Замечание. Если условиться считать время, прошедшее до начала падения, отрицательным, то значение s по данному значению времени будет определяться так:

$$s = \begin{cases} 490, & \text{если} \quad t < 0, \\ 490 - 4{,}9t^2, & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant 10, \\ 0 \quad , & \text{если} \quad t > 10. \end{cases}$$

В этом примере для вычисления значений функции $s = f(t)$ приходится пользоваться тремя формулами.

Например: $f(-7) = 490$, $f(-5) = 490$, $f(5) = 367{,}5$, $f(40) = 0$, $f(315) = 0$ и т. д.

Пример 12. Обозначим через x число рублей у некоторого лица, а через y — расход из этой суммы. Пусть расход производится по следующей таблице:

$$y = \begin{cases} 10, & \text{если} \quad 50 \leqslant x < 100, \\ 20, & \text{если} \quad 100 \leqslant x < 200, \\ 30, & \text{если} \quad 200 \leqslant x < 300, \\ 40, & \text{если} \quad 300 \leqslant x < 400. \end{cases}$$

Аргументом x здесь является число рублей, а функцией — число y рублей которые расходуются из суммы x рублей. Областью определения функции $f(x)$ в этом примере, согласно приведённой таблице, является множество целых чисел, не меньших 50, но меньших чем 400.

Имеем:

$$f(60) = 10,\ f(80) = 10,\ f(100) = 20,\ f(257) = 30$$

и т. д.

Пример 13.

$$y = \begin{cases} -x + 2, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x + 2, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

здесь x — аргумент, y — функция, область определения: $(-\infty, +\infty)$, т. е. множество всех действительных чисел.

Начинающие изучать анализ при рассмотрении примеров, подобных этому, склонны считать, что мы здесь имеем две функции $y = -x + 2$ и $y = x + 2$. Это неверно. В примере 13 (а также в предыдущих примерах 11 и 12) задана одна функция, но закон соответствия этой одной функции описан двумя формулами: по формуле $y = -x + 2$ мы подсчитываем значения функции y для значений аргумента x, меньших или равных нулю, а по формуле $y = x + 2$ мы подсчитываем значения этой функции для положительных значений аргумента.

Если обозначить функцию, заданную в этом примере, как обычно, через $f(x)$, то имеем, например:

$$f(-7)=9 \text{ (применяем формулу } y=-x+2);$$
$$f(10)=12 \text{ (применяем формулу } y=x+2 \text{ и т. д.)}.$$

Пример 14.

$$y=\begin{cases} 3, & \text{если } x=5, \\ -7, & \text{если } x=9, \\ 0, & \text{если } x=12. \end{cases}$$

Здесь x — аргумент, y — функция; область определения состоит из трёх чисел: 5, 9 и 12; смысл имеют только

$$f(5),\ f(9) \text{ и } f(12),$$

причём

$$f(5)=3,\ f(9)=-7,\ f(12)=0.$$

Пример 15. Поставим в соответствие всякому действительному числу x число y следующим образом: если x — рациональное число, то считаем $y=1$, если x — иррациональное число, то считаем $y=0$. Эта функция $f(x)$ называется функцией Дирихле; она задаётся непосредственно описанием закона соответствия. Областью её определения является множество всех действительных чисел. Имеем например:

$$f(2)=1, \quad f(\sqrt{2})=0, \quad f(\pi)=0, \quad f\left(-\frac{17}{4}\right)=1 \text{ и т. д.}$$

Пример 16. Зададим функцию $y=f(x)$ формулой

$$y=x^2-\lg x+\frac{1}{x-3}.$$

Областью определения этой функции является множество значений x, при которых выражение y имеет смысл. Это есть множество всех положительных чисел, кроме числа $x=3$, т. е. множество, состоящее из двух интервалов

$$(0,\ 3) \text{ и } (3,\ +\infty).$$

Пример 17. 1) $y=ax^2+bx+c$ — область определения — множество всех действительных чисел.

2) $y=\sqrt{x}$ — область определения — множество всех неотрицательных чисел.

3) $y=\sqrt{-x}$ — область определения — множество всех неположительных чисел.

4) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ — область определения — множество всех действительных чисел, отличных от 1 и -1.

5) $y=\lg\sin x$ — область определения состоит из промежутков, в которых синус положителен:

$$2k\pi < x < (2k+1)\pi$$

(k принимает все целые значения).

6) $y=\sqrt{-1-x^2}$ — выражение не определяет никакой (действительной) функции, так как ни при каком действительном x значение y не является действительным. Область определения есть «пустое множество», т. е. множество, в котором нет ни одного элемента.

Пример 18. 1) $y=|x|$. Область определения — множество всех действительных чисел.

Имеем, например:

$$f(2)=|2|=2,\ f(-3)=|-3|=3$$

и т. д.

2) $y=\frac{|x|}{x}$. Область определения — множество всех значений x, кроме $x=0$. Ясно, что если $x>0$, то $|x|=x$, а значит $y=1$, а если $x<0$, то $|x|=-x$ и значит $y=-1$. Таким образом эту функцию $f(x)$ можно задать и так:

$$y=\begin{cases}-1, & \text{если } x<0,\\ 1, & \text{если } x>0.\end{cases}$$

Упражнения

161. Найти область определения функции

$$f(x)=\frac{2}{x-1}$$

и найти

$$f(0),\quad f(-1),\quad f(5),\quad f\left(-\frac{1}{3}\right),\quad f(\sqrt{2}),\ f(1).$$

162. Найти область определения функции

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$$

и найти

$$f(3),\quad f(a),\quad f(-a),\quad f(a^2),\quad [f(a)]^2,\quad f(-1).$$

163. Найти область определения функции

$$f(t)=t^3-1$$

и вычислить

$$f(t)+1,\quad f(t+1),\quad f(t^2),\quad f\left(\frac{1}{t}\right),\quad \frac{f(1)}{t},\quad f(-t),\quad f(2t),\quad 2f(t).$$

164. Дана функция $f(x)=x^2-2x+3$. Решить уравнения $f(x)=f(10)$, $f(x)=f(-1)$.

165. Полагая $f(x)=x^4-3x^2+\frac{1}{x^2}$, доказать, что $f(-1)=f(1), f(-a)=f(a)$.

166. Полагая $f(x)=x^2-2x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x}$, доказать, что $f(3)=f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

167. Доказать, что функция $f(x)=a^x$ удовлетворяет соотношению $f(x)f(y)=f(x+y)$.

168. Доказать, что функция $f(x)=kx$ (k — число) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ f(Cx)=Cf(x)\ (C \text{ — число}).$$

169. Найти аналитическое выражение для функции, характеризующей зависимость радиуса r цилиндра от его высоты h при данном объёме $v=1$. Какова область определения этой функции?

170. То же для функции, выражающей зависимость объёма v от его высоты h при данной образующей $l=2$.

171. Найти области определения следующих функций:

$$1)\ y=\sqrt{|x|},\quad 2)\ y=\sqrt{1-|x|},\quad 3)\ y=\sqrt{\sin x},$$

$$4)\ y=\sqrt{(x-1)(x+2)},\quad 5)\ y=\lg[x(x-3)(x-5)],$$

$$6)\ y=\frac{x^2}{x},\ 7)\ y=\frac{(x-1)(x+2)(x-6)}{(x-1)(x+2)(x-6)},\ 8)\ y=\sqrt{\frac{(x-2)(x+3)}{x(x-1)}},$$

$$9)\ y=\sqrt{\sin\left(2\pi x+\frac{\pi}{2}\right)-1},\quad 10)\ y=\sqrt{\operatorname{tg} x},\quad 11)\ y=\lg(x^2+2x),$$

$$12)\ y=\lg(x^2),\quad 13)\ y=2^x,\quad 14)\ y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}.$$

§ 83. Графики функций

Пусть $y=f(x)$ — некоторая функция. Любому значению x из области её определения соответствует значение функции $y=f(x)$. Пара чисел x, y определяет в декартовой системе*) координат точку $M(x, y)$ или $M(x, f(x))$.

Определение. *Графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек $M(x, f(x))$ плоскости, соответствующее всем значениям x из области определения функции $y=f(x)$.*

Обратно. *Если на плоскости введена декартова система координат и задано множество точек, обладающее тем свойством, что на любой прямой, параллельной оси ординат, имеется не более одной точки этого множества, то такое множество точек плоскости определит функцию $y=f(x)$, если абсциссе любой точки этого множества мы поставим в соответствие её ординату.* Такой способ задания функции называется графическим.

Если функция задана графически, то областью её определения является совокупность абсцисс всех точек её графика.

Построим графики некоторых функций, заданных в ряде примеров предыдущего параграфа.

Пример 8**). $N=\frac{1}{2}n(n+1)$, где n — любое целое число, большее или равное 2.

Построим таблицу, в первой строке которой будем записывать значения n, а во второй строке под каждым значением аргумента n будем записывать соответствующее значение функции N:

n	2	3	4	5	6	7 ...
N	3	6	10	15	21	28 ...

Множество точек $M_1(2, 3)$, $M_2(3, 6)$, $M_3(4, 10)$, $M_4(5, 15)$, $M_5(6, 21)$, $M_6(7, 28)$, ... и есть график данной функции (черт. 203).

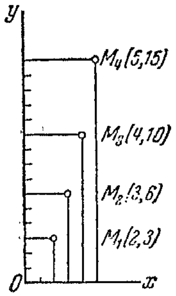
*) В анализе мы будем пользоваться исключительно декартовой прямоугольной системой координат.

**) Нумерация первых восьми примеров такая же, как в предыдущем параграфе.

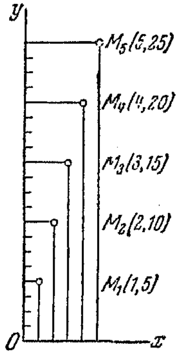
Пример 9. $y=5x$, где x — любое целое число из отрезка $[0, 1000]$. Опять строим таблицу:

x	0	1	2	3	4	5 ...
y	0	5	10	15	20	25 ...

Множество точек
$O(0, 0)$, $M_1(1, 5)$, $M_2(2, 10)$, $M_3(3, 15)$, $M_4(4, 20)$, $M_5(5, 25)$, ..., $M_{1000}(1000, 5000)$

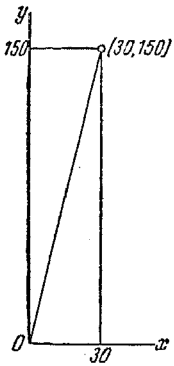


Черт. 203.

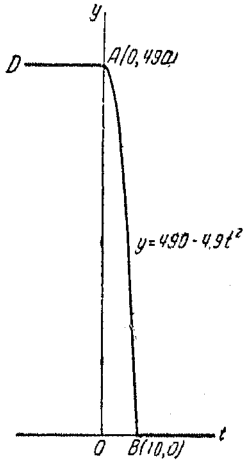


Черт. 204.

и будет графиком этой функции (черт. 204). В данном примере все эти точки расположены на прямой $y=5x$, проходящей через начало координат. Таким



Черт. 205.



Черт. 206.

образом графиком данной функции является множество всех точек прямой $y=5x$ с абсциссами x, равными всем целым числам из отрезка $[0, 1000]$.

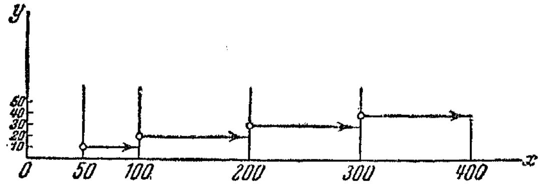
Пример 10. $y=5x$, где x — любое число из отрезка $[0, 30]$.

Графиком этой функции является отрезок прямой линии $y=5x$ с концами $(0, 0)$ и $(30, 150)$ (черт. 205).

Пример 11.

$$s=\begin{cases} 490, & \text{если } x<0 \\ 490-4{,}9t^2, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 10, \\ 0, & \text{если } x>10. \end{cases}$$

График этой функции изображён на чертеже 206. На интервале $(-\infty, 0)$ он представляет собой прямую $s=490$, параллельную оси Ox; на отрезке $[0,10]$



Черт. 207.

этот график является дугой AB параболы $(s=490-4{,}9t^2)$, а на интервале $(0, +\infty)$ он совпадает с осью Ox.

Пример 12.

$$y=\begin{cases} 10, & \text{если } 50\leqslant x<100, \\ 20, & \text{если } 100\leqslant x<200, \\ 30, & \text{если } 200\leqslant x<300, \\ 40, & \text{если } 300\leqslant x<400, \end{cases}$$

причём x — целое положительное число. График изображён на чертеже 207. Он состоит из 350 точек: (50, 10), (51, 10), (52, 10), ..., (99, 10), (100, 20), (101, 20), ..., (399, 40).

Пример 13.

$$y=\begin{cases} -x+2, & \text{если } x\leqslant 0 \\ x+2, & \text{если } x>0. \end{cases},$$

График изображён на чертеже 208. Он состоит из двух лучей (полупрямых)

Пример 14.

$$y=\begin{cases} 3, & \text{если } x=5, \\ -7, & \text{если } x=9, \\ 0, & \text{если } x=12. \end{cases}$$

График этой функции состоит из трёх точек: $M_1(5, 3)$, $M_2(9, -7)$, $M_3(12, 0)$ (черт. 209).

Пример 15. График функции Дирихле состоит из всех точек оси Ox, имеющих иррациональные абсциссы, и всех точек прямой $y=1$, имеющих рациональные абсциссы. Начертить такой график не представляется возможным.

Рассмотрим ряд примеров на графическое задание функции.

Пример 1. Рассмотрим прямую, проходящую через две точки: $M_1(2, 3)$ и $M_2(3, 7)$ (черт. 210). Эта прямая не параллельна оси Oy (почему?), поэтому она определяет функцию $y=f(x)$. Для отыскания закона соответствия составим уравнения прямой M_1M_2

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}=0$$

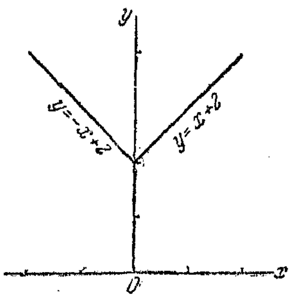
или

$$4x-y-5=0$$

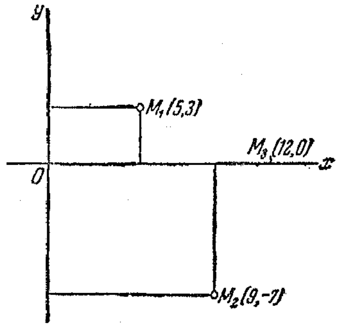
и решим это уравнение относительно y:

$$y=4x-5.$$

Областью определения этой функции является множество $(-\infty, +\infty)$ всех действительных чисел.

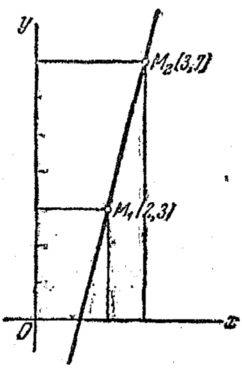


Черт. 208.

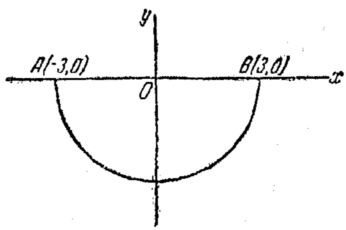


Черт. 209.

Пример 2. Возьмём на оси Ox две точки $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ и построим на отрезке AB, как на диаметре, полуокружность, расположенную в области отрицательных ординат (черт. 211). Эта полуокружность определит функцию $f(x)$, так как любая прямая, параллельная оси Oy, либо её не пересе-



Черт. 210.



Черт. 211.

кает, либо пересекает только в одной точке. Для отыскания закона соответствия составим уравнение окружности радиуса 3 с центром в начале координат:

$$x^2+y^2=9,$$

откуда и найдём выражение для ординаты y точки полуокружности через её абсциссу:

$$y = -\sqrt{9-x^2};$$

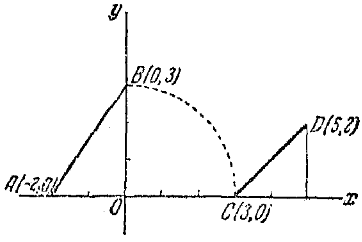
перед корнем надо взять знак минус, так как ординаты точек указанной полуокружности неположительны.

Пример 3. Рассмотрим множество точек плоскости, в которое входят: 1) все точки оси Ox с абсциссами, меньшими числа -2; 2) все точки отрезка прямой с концами $A(-2, 0)$ и $B(0, 3)$; 3) все точки дуги BC окружности, радиус которой равен 3, а центр находится в начале координат, и, наконец, 4) все точки отрезка с концами $C(3, 0)$ и $D(5, 2)$ (черт. 212). Это множество точек определяет функцию. Закон соответствия:

$$y = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -2, \\ \frac{3}{2}x + 3, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ +\sqrt{9-x^2}, & \text{если } 0 < x \leqslant 3, \\ x - 3, & \text{если } 3 < x \leqslant 5. \end{cases}$$

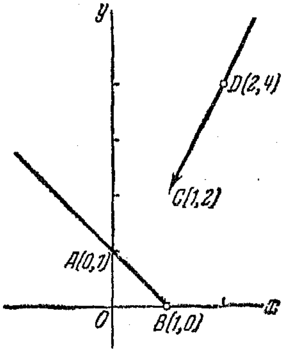
Областью определения этой функции является полуинтервал

$$(-\infty, 5].$$

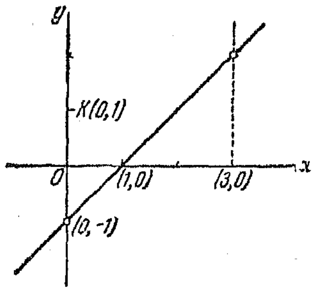


Черт. 212.

Пример 4. Рассмотрим множество точек, в которое входят: 1) все точки прямой, проходящей через точки $A(0, 1)$ и $B(1, 0)$ с абсциссами, меньшими или равными 1, и 2) все точки прямой, проходящей через точки $C(1, 2)$ и $D(2, 4)$ с абсциссами, бо́льшими 1 (черт. 213). Это множество



Черт. 213.



Черт. 214.

точек определяет функцию, для которой областью определения является множество всех действительных чисел. Закон соответствия такой:

$$y = \begin{cases} -x + 1, & \text{если } x \leqslant 1, \\ 2x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Пример 5. Рассмотрим множество точек, в которые входят все точки прямой, отсекающей на осях координат отрезки $a = 1$, $b = -1$, кроме точек с абсциссами $x = 0$ и $x = 3$; включим в это множество ещё точку $K(0, 1)$ (черт. 214). Это множество точек определяет функцию $f(x)$, закон соответствия которой таков:

$$y=\begin{cases} x-1, & \text{если} \quad x\neq 0 \quad \text{и} \quad x\neq 3, \\ 1, & \text{если} \quad x=0. \end{cases}$$

Областью определения данной функции служит множество всех действительных чисел, кроме числа $x=3$.

Упражнения

172. Построить графики следующих функций:

1) $y=-2x+1$, 2) $y=2x^2-1$, 3) $y=-\dfrac{2}{x}$, 4) $y=\dfrac{x}{x+1}$,

5) $y=\sqrt{x}$, 6) $y=|x|$, 7) $y=\dfrac{x}{|x|}$, 8) $y=1-|x|$.

173. Равнобедренный треугольник данного периметра $2p=12$ вращается вокруг основания. Составить функцию, выражающую зависимость объёма v тела вращения от боковой стороны l треугольника.

Построить график этой функции.

174. Как известно, 0° С (Цельсия) соответствует 32° F (Фаренгейта) и 100° С соответствуют 212° F. Составить функцию, выражающую зависимость температуры t по Цельсию от температуры τ по Фаренгейту.

Построить график этой функции.

175. При напряжении $E=120$ V (вольт) сила тока $I=10$ A (ампер). Исходя из закона Ома, выразить I как функцию E и построить график этой функции.

176. В теории чисел рассматривается функция $E(x)$, равная наибольшему целому числу, не превосходящему x, например, $E(2)=2$, $E(2,3)=2$, $E(-3,4)=-4$.

Начертить графики функций

1) $y=E(x)$, 2) $y=x-E(x)$, 3) $y=\dfrac{x}{E(x)}$.

177. Какую функцию определяет прямая, проходящая через единичные точки E_1 и E_2 осей координат?

178. Какую функцию определяет часть гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

расположенная в области положительных ординат?

179. Рассмотрим множество, состоящее из всех точек оси Ox с абсциссами, меньшими числа 3, и из всех точек гиперболы $xy=1$ с абсциссами, бо́льшими числа 5.

Какую функцию определяет это множество точек?

§ 84. Чётные и нечётные функции

Определение. *Функция $f(x)$ называется чётной, если каково бы ни было значение x из области определения этой функции, число $-x$ также входит в эту область определения и если для всех x из области определения этой функции выполнено равенство*

$$f(-x)=f(x).$$

Пример 1. Функции

$$y=x^2,$$
$$y=\sqrt{\cos x},$$
$$y=\sqrt{1-x^2},$$
$$y=|x|$$

— чётные, так как для каждой из них оба числа x и $-x$ входят или одновременно не входят в области их определения и для всех значений из области определения имеем:

$$(-x)^2=x^2,$$
$$\sqrt{\cos(-x)}=\sqrt{\cos x},$$
$$\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2},$$
$$|-x|=|x|.$$

Пример 2. Функция

$$y=x+x^2$$

не является чётной, так как, например,

$$f(1)=2, \quad f(-1)=0$$

и значит

$$f(-1)\neq f(1).$$

Пример 3. Функция

$$y=\sqrt{x}$$

также не является чётной, так как, например, $x=1$ входит в область определения, а $x=-1$ не входит в область определения.

Вообще функция $f(x)$ не является чётной, если или найдётся такое число x, что только одно из двух чисел x или $-x$ входит в область определения функции, или если найдётся хотя бы одно такое число x, что оба числа x и $-x$ входят в область определения функции, но $f(-x)$ отлично от $f(x)$, т. е. $f(x)\neq f(-x)$ (см. два предыдущих примера).

Аналогично определяется понятие нечётной функции:

Определение. *Функция $f(x)$ называется нечётной, если, каково бы ни было значение аргумента x из области определения этой функции, число $-x$ также входит в эту область определения и если при всех x из области определения выполнено равенство*

$$f(-x)=-f(x).$$

Пример 4. Функции

$$y=x^3,$$
$$y=\sin x,$$
$$y=\frac{1}{x}$$

— нечётные, так как если x входит в область определения каждой из этих функций, то $-x$ также входит в эту область определения, причём

$$(-x)^3=-x^3,$$
$$\sin(-x)=-\sin x,$$
$$\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}.$$

Пример 5. Функции

$$y = \lg x,$$
$$y = x^2 + x^3$$

не являются нечётными, так как для функции $\lg x$ область определения состоит только из положительных чисел (так что, например, 2 входит в эту область, а -2 не входит), для функции же $x^2 + x^3$ имеем, например, $f(1) = 2$, $f(-1) = 0$, так что $f(-1)$ и $-f(1)$ — различные числа.

График чётной функции $f(x)$ *симметричен относительно оси* Oy, так как в силу равенства

$$f(-x) = f(x)$$

для всех x из области определения чётной функции точки

$$M_1(x,\ f(x)) \text{ и } M_2(-x,\ f(-x)),$$

принадлежащие графику, симметричны относительно оси Oy *). В самом деле: ординаты этих точек равны: $f(x) = f(-x)$, а абсциссы отличаются знаком.

Таким образом для каждой точки $M_1(x,\ f(x))$ графика чётной функции найдётся точка $M_2(-x,\ f(-x))$, также принадлежащая графику и симметричная точке M_1 относительно оси Oy.

Точно так же *график нечётной функции* $f(x)$ *симметричен относительно начала координат*, так как каждой точке $M_1(x, f(x))$ этого графика соответствует точка $M_2(-x,\ f(-x))$ того же графика, симметричная точке M_1 относительно начала координат **).

В самом деле, абсциссы этих точек отличаются знаком, ординаты $f(x)$ и $f(-x)$ в силу равенства $f(-x) = -f(x)$ также отличаются знаком, значит середина отрезка M_1M_2 имеет координаты

$$\frac{x + (-x)}{2} = 0, \quad \frac{f(x) + f(-x)}{2} = 0,$$

т. е. совпадает с началом координат. Имеют место и обратные положения: *если функция задана графиком, симметричным относительно оси* Oy, *то она чётная, а если функция задана графиком, симметричным относительно начала координат, то она нечётная.*

Пример 6. Функция $|x|$ чётная. Её график симметричен относительно оси Oy.

---

*) Две точки M_1 и M_2 называются симметричными относительно прямой l, если отрезок M_1M_2 перпендикулярен к этой прямой, причём его середина лежит на этой прямой, или если обе эти точки совпадают с какой-нибудь точкой прямой l. Множество точек, расположенных в плоскости, симметрично относительно прямой l, лежащей в этой плоскости, если, какова бы ни была точка M_1 этого множества, точка M_2, симметричная точке M_1 относительно прямой l, также принадлежит данному множеству.

**) Точки M_1 и M_2 называются симметричными относительно точки O, если или точка O является серединой отрезка M_1M_2, или если обе точки M_1 и M_2 совпадают с точкой O. Множество точек симметрично относительно точки O, если, какова бы ни была точка M_1 этого множества, точка M_2, симметричная точке M_1 относительно точки O, также принадлежит этому множеству.

Пример 7. Функция $y=\frac{1}{x}$ нечётная. Её график (гипербола) симметричен относительно начала координат.

Замечание. Если задана функция $f(x)$, то она не обязательно является чётной или нечётной, однако если область определения функции $f(x)$ симметрична относительно числа нуль, т. е. числа x и $-x$ — оба либо входят, либо не входят в область определения этой функции, то её можно представить в виде суммы чётной и нечётной функции (имеющих ту же область определения). В самом деле:

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Легко проверить, что функция

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

чётная, а функция

$$f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

нечётная:

$$f_1(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=f_1(x);\quad f_2(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-f_2(x).$$

Упражнения

180. Доказать, что функции

$$\sin x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{cosec} x$$

— нечётные, а

$$\cos x,\ \operatorname{ctg} x,\ \sec x$$

— чётные.

181. Представить в виде суммы чётной и нечётной функций следующую функцию:

$$y=\frac{x+2}{1-x^2}.$$

182. Как определить чётность или нечётность функции $f(x)$ на любом множестве M, входящем в область определения этой функции? Какому условию должно удовлетворять множество M?

183. Доказать, что если областью определения функции $f(x)$ является множество A положительных чисел, то можно построить чётную функцию $\varphi(x)$, такую, что $\varphi(x)=f(x)$ при всех $x\in A$, и можно построить нечётную функцию $\psi(x)$, такую, что $\psi(x)=f(x)$ при всех $x\in A$. Дать геометрическую интерпретацию.

§ 85. Ограниченные функции

Определение. *Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху на множестве M, входящем в область её определения, если существует такое число P, что $f(x)$ меньше P:*

$$f(x)<P$$

при всех x, входящих в множество M.

Функция $f(x)$ называется ограниченной снизу на множестве M, входящем в область её определения, если существует такое число p, что $f(x)$ больше p:

$$f(x)>p$$

при всех x, входящих в множество M.

Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве M, входящем в область определения, если на этом множестве она ограничена и сверху и снизу, т е. если существуют такие числа p и P, что значения $f(x)$ заключены между этими числами:

$$p<f(x)<P$$

при всех x, входящих в множество M.

Это определение можно видоизменить и так: *функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве M, входящем в область её определения, если на этом множестве ограничен сверху её модуль, $|f(x)|$, т. е. найдётся такое число K, что $|f(x)|<K$ при всех x, входящих в множество M.* Докажем эквивалентность двух последних определений:

1) Пусть $p<f(x)<P$ при всех $x \in M$. Возьмём интервал $(-K, K)$, в который войдут числа p и P. Тогда и подавно $-K<f(x)<K$ или $|f(x)|<K$ при всех $x \in M$.

2) Обратно: если $|f(x)|<K$ при всех $x \in M$, то $-K<f(x)<K$ при всех $x \in M$ и значит $f(x)$ ограничена на множестве M числами $-K$ (снизу) и K (сверху).

В частности, множество M может совпадать с областью определения функции $f(x)$ и тогда *функция $f(x)$ называется ограниченной сверху, если существует такое число P, что $f(x)$ меньше P при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$.*

Аналогично определяется понятие функции $f(x)$, ограниченной снизу, и понятие функции ограниченной.

Таким образом, если не упоминается то множество, на котором функция ограничена, то таким множеством считается вся область определения рассматриваемой функции.

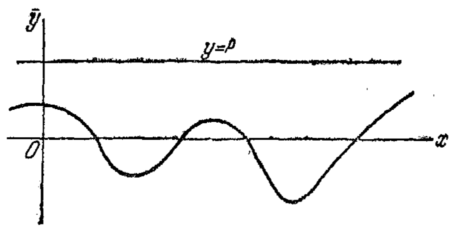
Геометрический смысл введённых определений таков:

Ограниченность сверху функции $f(x)$ на множестве M заключается в том, что точки графика функции, соответствующие всем абсциссам из множества M, лежат «ниже» некоторой прямой $y=P$, параллельной оси Ox (отсюда и происходит термин ограниченность «сверху» — черт. 215). *Ограниченность снизу функции $f(x)$ на множестве M заключается в том, что точки графика этой функции, соответствующие всем абсциссам из множества M, лежат «выше» некоторой прямой $y=p$, параллельной оси Ox* (отсюда и термин ограниченность «снизу» — черт. 216).

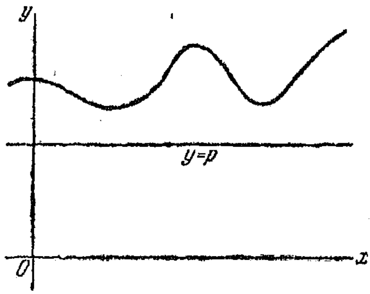
Наконец, ограниченность функции $f(x)$ на множестве M заключается в существовании такой пары прямых, параллельных *оси Ox, что точки графика функции $f(x)$, соответствующие всем абсциссам x из множества M, расположены между этими прямыми* (черт. 217).

Если множество M совпадает с областью определения функции, то между указанными параллельными прямыми будут расположены все точки графика этой функции.

Определение. *Функция $f(x)$ называется ограниченной в окрестности числа a, если существует такая окрестность*



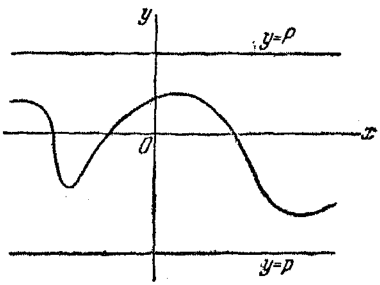
Черт. 215.



Черт. 216.

$(a-\delta, a+\delta)$ этого числа, в которой функция $f(x)$ ограничена.

Аналогично вводятся понятия ограниченности сверху и снизу функции $f(x)$ в окрестности числа $x=a$. Можно ввести понятие ограниченности сверху, снизу или просто ограниченности функции $f(x)$ в окрестности $x=a$ на произвольном множестве M. Тогда в определениях надо под значениями аргумента понимать те числа из окрестности числа a, которые входят во множество M. Например: *функция $f(x)$ называется ограниченной в точке $x=a$ на множестве M, входящем в область её определения, если существует такая окрестность числа a, что функция $f(x)$ будет ограниченной на множестве значений аргумента, входящих одновременно и в эту окрестность и во множество M.*



Черт. 217.

Пример 1. Функция $y=-\frac{1}{x^2}$ ограничена сверху, например числом 0, так как

$$-\frac{1}{x^2}<0$$

при всех x из области её определения.

Пример 2. Функция $y=\frac{1}{x^2}$ ограничена снизу, например, числом 0, так как

$$0<\frac{1}{x^2}$$

при всех x из области определения этой функции.

Пример 3. Функция $y=\frac{1}{1+x^2}$ ограничена, например, сверху числом 2, снизу — числом 0, так как

$$0<\frac{1}{1+x^2}<2$$

при всех x.

Пример 4. Докажем, что функция $y=\frac{1}{x^2}$ не ограничена сверху. Возьмём любое число P. Пусть Q — любое положительное число больше чем P:

$$Q>P \quad \text{и} \quad Q>0.$$

Найдём x из уравнения $Q=\frac{1}{x^2}$; получим $x=\frac{1}{\sqrt{Q}}$ (мы берём лишь один корень); при этом значении x значение функции будет равно Q. Значит, каково бы ни было число P, найдётся такое значение x, что $\frac{1}{x^2}>P$, а это как раз и означает, что данная функция не ограничена сверху.

Упражнения

184. Доказать, что функция $y=x^2-4x+3$ ограничена снизу, но не ограничена сверху.

185. Доказать, что функция $y=-x^2+8x$ ограничена сверху, но не ограничена снизу.

186. Доказать, что функция $y=\frac{x}{x^2+1}$ ограничена.

187. Доказать, что разность, сумма и произведение двух функций, ограниченных на одном и том же множестве, — функция, ограниченная на том же множестве.

§ 86. Возрастающие и убывающие функции

Определение. *Функция $f(x)$ называется возрастающей на множестве M, входящем в область её определения, если на этом множестве M она обладает следующим свойством: пусть x_1 и x_2 — два любых значения аргумента, входящих в множество M; тогда бо́льшему значению аргумента соответствует бо́льшее значение функции, т. е. если*

$$x_1 \in M, \quad x_2 \in M_2 \quad \text{и} \quad x_1<x_2, \quad \text{то} \quad f(x_1)<f(x_2).$$

Функция $f(x)$ называется убывающей на множестве M, входящем в область её определения, если на этом множестве она обладает следующим свойством: пусть x_1 и x_2 — два любых зна-

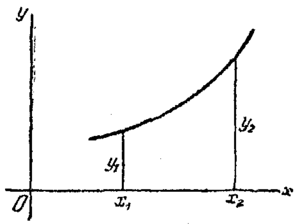
чения аргумента, входящих в множество M, тогда большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т. е. если

$$x_1 \in M, \quad x_2 \in M \quad \text{и} \quad x_1 < x_2, \quad \text{то} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

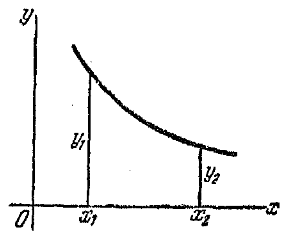
В частности, множество M может совпадать со всей областью определения функции $f(x)$: *функция $f(x)$ называется возрастающей, если она обладает следующим свойством: пусть x_1 и x_2 — два любых значения аргумента из области её определения; тогда бо́льшему значению аргумента соответствует бо́льшее значение функции, т. е. если x_1 и x_2 — два любых значения аргумента из области определения функции, причём $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$.*

Аналогично видоизменяется и второе определение.

Геометрический смысл этих определений таков: возрастание функции на множестве M заключается в том, что *точки графика этой функции, соответствующие всем абсциссам x из множества*



Черт. 218.



Черт. 219.

M, поднимаются «вверх» по мере увеличения абсциссы x, т. е. точка графика с бо́льшей абсциссой x имеет и бо́льшую ординату y (черт. 218).

Убывание функции на множестве M интерпретируется геометрически аналогично: *точки графика функции $f(x)$, соответствующие всем абсциссам x из множества M, «опускаются вниз» по мере увеличения абсциссы, т. е. точка графика с бо́льшей абсциссой x имеет меньшую ординату y* (черт. 219).

По существу картина сохраняется и для частного случая, когда множество M совпадает со всей областью определения функции $f(x)$; в этом случае лишь надо говорить не о части графика функции, а о всём графике.

Если функция $f(x)$ на множестве M возрастает или убывает, то она называется монотонной (на этом множестве).

Пример 1. Функция $y = 2x + 3$ — возрастающая, так как, если x_1 и x_2 — два любых значения аргумента, причём $x_1 < x_2$, то

$$y_1 = 2x_1 + 3,$$
$$y_2 = 2x_2 + 3,$$

отсюда

$$y_1 - y_2 = 2(x_1 - x_2) < 0, \quad \text{т. е.} \quad y_1 < y_2.$$

Пример 2. Функция $y=-5x+6$ — убывающая (докажите!).

Пример 3. Функция $y=\sin x$ возрастает на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и убывает на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (докажите!).

Пример 4. Функция $y=\frac{1}{x}$ убывает в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ (докажите!).

Пример 5. Функция $y=\operatorname{tg} x$ возрастает на любом интервале

$$\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right),$$

где k принимает все целые значения (докажите!), однако эта функция не будет возрастающей во всей области её определения, так как, например, при

$$x_1=0, \quad x_2=\frac{\pi}{4}, \quad x_3=\frac{3\pi}{4}$$

будем иметь:

$$y_1=0, \quad y_2=1, \quad y_3=-1.$$

Замечание. Иногда от учащихся средней школы приходится слышать ответ: «$\operatorname{tg} x$ есть возрастающая функция». Как видно из разобранного примера, это неверно.

Упражнения

188. Доказать, что функция $\frac{x}{1+x^2}$ убывает в интервале $(1, +\infty)$.

189. Как надо понимать фразу «функция $f(x)$ на множестве M, входящем в её область определения, и не возрастает и не убывает»?

190. Доказать, что функция $y=kx+b$ возрастает, если $k>0$, и убывает, если $k<0$.

191. Доказать, что функция $y=\sqrt{1-x^2}$ возрастает на интервале $(-1, 0)$.

192. Доказать, что функция $y=2x+x^2$ не является ни возрастающей ни убывающей.

§ 87. Периодические функции

Определение. *Функция $f(x)$ называется периодической, если существует положительное число l, такое, что имеет место равенство*

$$f(x \pm l)=f(x)$$

при всех x, входящих в область определения периодической функции $f(x)$, причём положительного числа l_1, меньшего чем l и удовлетворяющего этому условию, не существует. Следовательно, если l_1 — любое положительное число, меньшее чем l, то найдётся такое число x, входящее в область определения функции $f(x)$, что $f(x+l_1)$ или $f(x-l_1)$ будет отлично от $f(x)$:

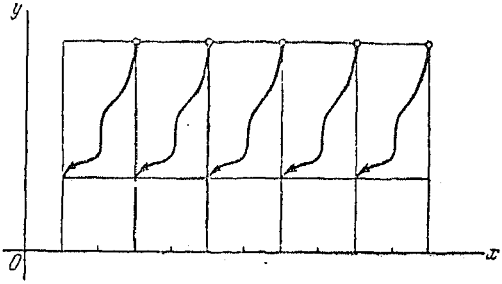
$$f(x+l_1) \neq f(x)$$

(или же $x+l_1$ или $x-l_1$ выйдет из области определения функции $f(x)$).

Наименьшее положительное число l, прибавление которого к любому значению аргумента x из области определения периодической функции не изменяет значения функции, называется наименьшим периодом функции.

Периодом функции $f(x)$ называется такое число, прибавление которого к любому значению аргумента не изменяет соответствующего значения функции.

Ясно, что если l — наименьший период функции $f(x)$, то kl, где k — любое целое число, есть период этой функции.



Черт. 220.

Из определения также следует, что *если x есть любое число из области определения периодической функции $f(x)$ с наименьшим периодом l, то числа $x \pm l$ также входят в область определения этой функции* (в противном случае равенство $f(x \pm l) = f(x)$ не выполняется, так как $f(x+l)$ или $f(x-l)$ не определено!). Если известны значения периодической функции $f(x)$ на полуинтервале $(0, l]$, где l — наименьший период, то в силу периодичности функции известны и её значения во всех точках её области определения.

Для построения графика периодической функции достаточно построить часть графика на полуинтервале $(0, l]$, где l — наименьший период. На каждом полуинтервале $(kl, (k+1)l]$, где k — любое целое число, часть графика рассматриваемой функции получается переносом вдоль оси Ox на расстояние kl части графика, построенного на полуинтервале $(0, l]$; в самом деле: при таком переносе абсцисса изменится на число kl, а ордината при таком изменении абсциссы в силу периодичности функции не изменится (черт. 220).

Пример 1. Функция $\sin x$ периодическая и наименьший период равен 2π, так как: 1) функция $\sin x$ определена на множестве всех действительных чисел;

$$2) \sin(x+2\pi) = \sin x;$$

3) число 2π является наименьшим периодом, потому что если мы возьмём любое положительное число l_1, меньшее чем 2π,

$$0 < l_1 < 2\pi,$$

то всегда можно найти такое значение x, при котором будет выполнено неравенство

$$\sin(x + l_1) \neq \sin x.$$

В самом деле: если $l_1 = \frac{\pi}{2}$, то возьмём $x = 0$, а если $l_1 \neq \frac{\pi}{2}$, то возьмём $x = \frac{\pi}{2} - l_1$; тогда

$$\sin(x + l_1) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - l_1\right) = \cos l_1 \neq 1, \quad \text{ибо} \quad 0 < l_1 < 2\pi.$$

Периодами функции $\sin x$ будут числа 2π, 4π, $6\pi, \ldots, 2\pi, \ldots$ и вообще $2k\pi$, где k — любое целое число.

Упражнения

193. Доказать, что функция $\operatorname{tg} x$ периодическая и что её наименьший период $l = \pi$.

194. Построить график периодической функции, наименьший период которой $l = 1$ и которая на полуинтервале $(0,1]$ задана формулой

1) $y = 2x$;
2) $y = x^2$.

195. Будет ли периодической функция

$$y = \sqrt{\lg \sin x}\,?$$

Найти её наименьший период.

196. На полуинтервале $(0,2]$ задана функция

$$y = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ x^2, & \text{если } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Построить периодическую функцию, наименьший период которой равен 2 и значения которой в точках полуинтервала $(0,2]$ совпадали бы с соответствующими значениями заданной функции. Построить график.

§ 88. Последовательности

Определение. *Последовательностью называется функция, областью определения которой служит множество всех натуральных чисел.*

Обычно в последовательности аргумент обозначают буквой n:

$$y = f(n),$$

а значения функции принято записывать одно за другим с индексами $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, например, так:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Здесь a_n есть значение функции, соответствующее значению n аргумента. Если значения функции заданы числами, то пишут эти числа в порядке возрастания аргумента n, причём число, стоящее на n-м месте, есть значение функции, соответствующее значению n аргумента.

Например, запись

$$2,\ 4,\ 6, \ldots, 2n, \ldots$$

нужно понимать так:

$$f(1)=2, \quad f(2)=4, \quad f(3)=6, \ \ldots, \quad f(n)=2n, \ \ldots$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются **членами последовательности**. Вовсе не обязательно, чтобы все члены последовательности были различными: ведь разным значениям аргумента может соответствовать одно и то же значение функции. Например, в последовательности

$$1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3, \ldots, n,\ n,\ n, \ldots$$

имеем:

$$a_1=a_2=a_3=1, \quad a_4=a_5=a_6=2, \ \ldots, \quad a_{3n-2}=a_{3n-1}=a_{3n}=n, \ \ldots$$

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ мы будем обозначать иногда так:

$$\{a_n\}.$$

Примеры последовательностей:

Пример 1. $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ — последовательность натуральных чисел.

Пример 2. $0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333; \ldots;\ \underbrace{0{,}333\ldots3}_{n \text{ раз}}$ — последовательность десятичных приближений дроби $\frac{1}{3}$, взятых с недостатком.

Пример 3. $2,\ 2\cdot3,\ 2\cdot3^2, \ldots,\ 2\cdot3^n, \ldots$ — бесконечно-возрастающая геометрическая прогрессия.

Пример 4. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ — бесконечно-убывающая геометрическая прогрессия.

Пример 5. $3;\ 3{,}105816\ldots;\ 3{,}132564\ldots;\ 3{,}139272\ldots;\ 3{,}140976\ldots$ — последовательность полупериметров правильных многоугольников, вписанных в круг единичного радиуса и имеющих соответственно 6, 12, 24, 48 и т. д. сторон.

Пример 6. $1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, \ldots, 1, 0, -1, \ldots$; здесь повторяется тройка чисел $1, 0, -1$.

Пример 7. $-3, 2, 17, 9, 9, 9, \ldots, 9, \ldots$; здесь, начиная с четвёртого члена, повторяется число 9.

Пример 8. $a_n=a_1+d(n-1)$ — n-й член арифметической прогрессии, первый член которой равен a_1, а разность равна d.

Пример 9. $s_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$ — сумма n членов геометрической прогрессии, первый член которой равен a_1, а знаменатель равен q.

Пример 10. $a_n=n!$ — произведение всех целых положительных чисел от 1 до n.

Упражнения

197. Даны формулы, выражающие n-е члены последовательностей через аргумент n:

$$1)\ a_n=\frac{\sin n\alpha}{n+1};\quad 2)\ a_n=\frac{2^n}{n!};\quad 3)\ a_n=n\cos n\alpha-n!;\quad 4)\ a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$$5)\ a_n=\begin{cases}3^n & \text{при } n \text{ нечётном,}\\ 0 & \text{при } n \text{ чётном;}\end{cases}\qquad 6)\ a_n=\begin{cases}1+\frac{1}{2^n} & \text{при } n \text{ чётном,}\\ \frac{1}{n} & \text{при } n \text{ нечётном;}\end{cases}$$

$$7)\ a_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}2^n & \text{при } n \text{ чётном,}\\ 1 & \text{при } n \text{ нечётном;}\end{cases}\qquad 8)\ a_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+1}{2}} & \text{при } n \text{ нечётном,}\\ (-1)^{\frac{n}{2}}\lg n & \text{при } n \text{ чётном.}\end{cases}$$

Написать несколько первых членов каждой последовательности.

198. Известны несколько первых членов последовательности; в каждом из указанных ниже примеров подобрать хотя бы одну такую формулу n-го члена, которая давала бы данные числа в качестве первых членов:

$$1)\ 1, 5, 9, 13, \ldots,\quad 2)\ 1, 2, 8, 0, 0, 0, \ldots,\quad 3)\ 2^2, 2^3, 2^4, \ldots,$$

$$4)\ 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}, \ldots,\quad 5)\ 2, -2, 2, -2, 2, -2, \ldots,$$

$$6)\ \frac{1}{2}, \frac{1\cdot 2}{2^2}, \frac{1\cdot 2\cdot 3}{2^3}, \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2^4}, \ldots,\quad 7)\ \frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \ldots,$$

$$8)\ \frac{1}{3}, -\left(\frac{2}{5}\right)^2, \left(\frac{3}{7}\right)^3, -\left(\frac{4}{9}\right)^4, \ldots,\quad 9)\ 1, \frac{3}{5}, \frac{4}{10}, \frac{5}{17}, \frac{6}{25}, \frac{7}{34}, \ldots,$$

$$10)\ \frac{2}{1}, \frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}, \frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}, \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}, \ldots$$

§ 89. Взаимнооднозначные функции

Определение. *Функция $f(x)$ называется взаимнооднозначной на множестве M, входящем в область её определения, если двум любым различным значениям аргумента x, входящим во множество M, соответствуют два различных значения функции, т. е. если $x_1 \in M$, $x_2 \in M_2$, $x_1 \neq x_2$,* то $f(x_1) \neq f(x_2)$. Множество M может, в частности, совпадать с областью определения функции $f(x)$.

Пример 1. Функция $y=\sin x$ взаимнооднозначная на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, но на отрезке $[0, \pi]$ она не взаимнооднозначна.

Пример 2. Функция $y=x^2$ взаимнооднозначная на интервале $(0, +\infty)$, но она не взаимнооднозначна во всей области её определения, так как, например, $(-2)^2=2^2$.

Ясно, что *если функция $f(x)$ возрастает или убывает на множестве M, то она на этом множестве является взаимнооднозначной.*

В самом деле: пусть на множестве M функция $f(x)$ возрастает. Возьмём два любых различных значения x_1 и x_2, входящих в множество M. Пусть $x_1 < x_2$, тогда $f(x_1) < f(x_2)$, т. е. двум любым разным значениям аргумента x из множества M соответствуют два разных значения функции, а это и означает, что функция $f(x)$ на множестве M взаимнооднозначна. Аналогично доказывается, что если функция $f(x)$ на множестве M убывающая, то она взаимнооднозначна.

График взаимнооднозначной функции обладает тем свойством, что на любой прямой, параллельной оси Ox, имеется не более одной точки, принадлежащей графику. Очевидно, что и обратно: *если на плоскости задано произвольное множество точек, определяющее функцию $f(x)$, и если из этого множества выбрано подмножество M, обладающее тем свойством, что на любой прямой, параллельной оси Ox, имеется не более одной точки множества M, то функция $f(x)$ взаимнооднозначна на множестве N абсцисс всех точек множества M.*

Упражнения

199. Доказать, что функция $f(x)$, периодическая на множестве M, не будет на нём взаимнооднозначна.

200. Доказать, что чётная функция, вообще говоря, не взаимнооднозначная.

201. Взаимнооднозначна ли функция $y = x^3$?

202. Взаимнооднозначна ли сумма двух взаимнооднозначных функций?

§ 90. Обратная функция

Определение. *Рассмотрим какую-нибудь функцию $f(x)$ на множестве M, входящем в область её определения. Множеству M значений аргумента соответствует некоторое множество N значений функции $f(x)$. Возьмём любое значение y из множества N и поставим ему в соответствие то значение аргумента x, при котором значение функции $f(x)$ равно y. Это соответствие определяет функцию, которая называется обратной для функции $f(x)$ на множестве M.*

Множество M может, в частности, совпадать со всей областью определения функции $f(x)$; *обратной функцией для функции $f(x)$ называется функция, обратная для $f(x)$ на области её определения.*

По поводу данного определения следует заметить, что обратная функция для данной (на некотором множестве или на всей области определения) будет, вообще говоря, функцией многозначной.

Пример 1. Функция, обратная для функции

$$y = x^2,$$

будет двузначна:

$$x = \pm \sqrt{y}.$$

Пример 2. Функция, обратная для функции

$$y = \sin x,$$

будет бесконечнозначна:

$$x = \arcsin y.$$

Например, при $y=0$ $x=k\pi$, где k принимает все целые значения.

Пример 3. $y=1$ при всех x. Обратной будет функция, которая числу 1 ставит в соответствие множество всех действительных чисел.

Так как мы в настоящем курсе изучаем лишь однозначные функции, то естественно возникает вопрос: при каких условиях функция $\varphi(y)$, обратная для функции $f(x)$ *), будет однозначной?

Ясно, что обратная функция $\varphi(y)$ для однозначной функции $f(x)$ на множестве M однозначна, если на этом множестве M функция $f(x)$ — взаимнооднозначная. В этом случае обратная функция $\varphi(y)$ также будет взаимнооднозначной на множестве N значений $f(x)$.

Везде в дальнейшем во всех вопросах, где будет итти речь об обратной на множестве M функции $f(x)$, мы будем предполагать, что функция $f(x)$ не только однозначная, но и взаимнооднозначная (в частности, монотонная!). Обратите внимание и на то, что *если функция $f(x)$ взаимнооднозначна на множестве M, то всем x, входящим в это множество, соответствует множество N значений функции, которое является областью определения функции $\varphi(y)$, обратной для $f(x)$ на множестве M.*

Кроме того, ясно, что *если функция $\varphi(y)$ — обратная на множестве M для взаимнооднозначной функции $f(x)$, то функция $f(x)$ будет обратной для функции $\varphi(y)$ на множестве N.*

По этой причине функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ называют часто взаимнообратными.

Отметим ещё следующее очевидное положение: *если функция $f(x)$ возрастает на множестве M, причём N есть множество её значений, соответствующее всем x из M, то обратная функция $\varphi(y)$ возрастает на множестве N.*

Аналогичное положение имеет место и для функции $\varphi(y)$, обратной на множестве M для функции $f(x)$, убывающей на этом множестве.

Замечание. Для удобства формулировок при рассмотрении обратной функции мы её аргумент обозначили буквой y, а саму функцию — буквой x. Можно было бы перейти и к обычным обозначениям. Например, обратной функцией для функции, заданной на множестве $[1, 2]$ формулой $y=2x$, будет функция, заданная на множестве $[2, 4]$ значений y формулой $x=\frac{y}{2}$ или (что то же!) — формулой $y=\frac{x}{2}$ на множестве $[2,4]$ значений x. Вообще функцию

*) Функция $f(x)$, конечно, однозначная.

и аргумент можно обозначать какими угодно буквами, так как функция задаётся своей областью определения и законом соответствия. Например, $y=\sin x$, $s=\sin t$, $q=\sin p$ — это одна и та же функция.

Пример 4. Функция $y=x^2$ взаимнооднозначна в интервале $(0, +\infty)$ (в этом интервале эта функция возрастает!). Обратной для неё на этом интервале $(0, +\infty)$ будет функция

$$x=\sqrt{y};$$

областью определения этой функции является также интервал $(0, +\infty)$.

Пример 5. Функция $y=x^2$ взаимнооднозначна в интервале $(-\infty, 0)$ (в этом интервале эта функция убывает!). Обратной для неё на этом интервале $(-\infty, 0)$ будет функция

$$x=-\sqrt{y};$$

областью её определения является интервал $(0, +\infty)$.

Пример 6. Функция $y=\sin x$ на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает (значит, на этом сегменте эта функция взаимнооднозначна). Обратной для неё на этом сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ будет функция

$$y=\arcsin x,$$

называемая в курсах тригонометрии «главным значением арксинуса». Областью её определения является $[-1, 1]$. На сегменте $[-1, 1]$ функция $y=\arcsin x$ (так же, как и функция $y=\sin x$ на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$) возрастает.

Пример 7. Функция $y=\cos x$ убывает на сегменте $[0, \pi]$. Обратной для неё на этом сегменте $[0, \pi]$ будет функция

$$y=\arccos x,$$

называемая в курсах тригонометрии «главным значением арккосинуса». Областью её определения является сегмент $[-1, 1]$. На сегменте $[-1, 1]$ функция $\arccos x$ (так же, как и функция $y=\cos x$ на сегменте $[0, \pi]$) убывает.

Пример 8. Функция $y=\operatorname{tg} x$ возрастает в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Обратной для неё на этом интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ является функция $y=\operatorname{arc\,tg} x$, называемая в курсах тригонометрии «главным значением арктангенса». Областью её определения является множество всех действительных чисел. Функция $y=\operatorname{arc\,tg} x$ — возрастающая.

Пример 9. Функция $y=\operatorname{ctg} x$ убывает в интервале $(0, \pi)$. Обратной для неё на этом интервале является функция

$$y=\operatorname{arc\,ctg} x,$$

называемая в курсах тригонометрии «главным значением арккотангенса». Областью её определения является множество всех действительных чисел. Функция $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ — убывающая.

Пример 10. Обратной для функции $y=x^3$ является функция

$$x=\sqrt[3]{y}.$$

Упражнения

203. Найти функцию, обратную для функции

$$y = kx + b, \text{ где } k \neq 0.$$

204. Доказать, что функция

$$y = x^2 + 2x + 6$$

в интервале $(-\infty, -1)$ имеет обратную и найти эту функцию. Найти обратную функцию для этой функции на интервале $(-1, +\infty)$.

205. Найти функцию, обратную для функции

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

на интервале $(-1, 0)$.

206. Найти функцию, обратную для функции

$$y = \frac{1}{x}$$

1) в интервале $(-\infty, 0)$, 2) в интервале $(0, +\infty)$.

207. Пусть $y = f(x)$ — функция взаимнооднозначная на множестве M, а $x = \varphi(y)$ — функция, обратная для неё на этом множестве.

В соотношении $x = \varphi(y)$ аргументом является y, а функцией x. Будем попрежнему обозначать аргумент буквой x, а значение функции буквой y, т. е. $y = \varphi(x)$. Как связаны графики функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$?

208. Каков должен быть график взаимнооднозначной функции $f(x)$, чтобы обратная функция была равна функции $f(x)$?

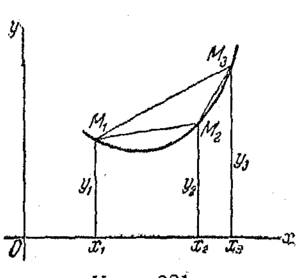
209. Найти функцию $\varphi(y)$, обратную для следующей функции $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } -1 \leqslant x < 1, \\ x^2, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

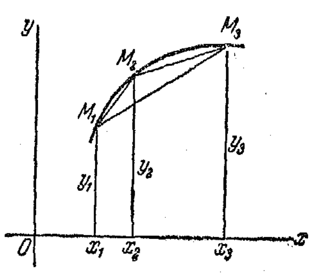
какова будет область определения функции $\varphi(y)$?

§ 91. Выпуклые функции

Рассмотрим график, изображённый на чертеже 221. Он обладает следующим свойством: все точки графика, расположенные между



Черт. 221.



Черт. 222.

двумя любыми его точками $M_1\ (x_1, f(x_1))$ и $M_3\ (x_3, f(x_3))$, лежат «ниже» отрезка M_1M_3. Это положение равносильно следующему:

если $x_1 < x_2 < x_3$, то ориентированная площадь треугольника с вершинами

$$M_1(x_1, f(x_1)), \quad M_2(x_2, f(x_2)), \quad M_3(x_3, f(x_3))$$

— положительна.

Функцию, обладающую этим свойством на некотором множестве M, входящем в её область определения, будем называть функцией с положительной выпуклостью.

Определение. *Функция $f(x)$ называется положительно выпуклой на множестве M, входящем в область её определения, если для любых трёх значений аргумента $x_1<x_2<x_3$, входящих во множество M, имеет место неравенство*

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

Если же имеет место неравенство $\Delta<0$, то функция $f(x)$ называется отрицательно выпуклой (черт. 222).

Пример 1. Докажем, что функция $y=x^2$ положительно выпукла (сделать чертёж!).

Имеем:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & 1 \\ x_2 & x_2^2 & 1 \\ x_3 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-x_3 & x_1^2-x_3^2 & 0 \\ x_2-x_3 & x_2^2-x_3^2 & 0 \\ x_3 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-x_3 & x_1^2-x_3^2 \\ x_2-x_3 & x_2^2-x_3^2 \end{vmatrix} = (x_1-x_3)(x_2-x_3) \begin{vmatrix} 1 & x_1+x_3 \\ 1 & x_2+x_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_2-x_1) = (x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1) > 0$$

так как

$$x_1 < x_2 < x_3.$$

Пример 2. Функция $y=\frac{1}{x}$ имеет на интервале $(-\infty, 0)$ отрицательную выпуклость, а на интервале $(0, +\infty)$ положительную выпуклость (сделать чертёж!).

В самом деле: если $-\infty < x_1 < x_2 < x_3 < 0$, то

$$\begin{vmatrix} x_1 & \frac{1}{x_1} & 1 \\ x_2 & \frac{1}{x_2} & 1 \\ x_3 & \frac{1}{x_3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{x_1x_2x_3} \begin{vmatrix} x_1^2 & 1 & x_1 \\ x_2^2 & 1 & x_2 \\ x_3^2 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{x_1x_2x_3}(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1) < 0,$$

а если $0<x_1<x_2<x_3<+\infty$, то последнее выражение положительно.

Пример 3. Функция $y=\sqrt{x}$ отрицательно выпукла. В самом деле: если $0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3$, то, полагая

$$\sqrt{x_1}=\lambda_1, \quad \sqrt{x_2}=\lambda_2, \quad \sqrt{x_3}=\lambda_3$$

и замечая, что $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, находим:

$$\begin{vmatrix} x_1 & \sqrt{x_1} & 1 \\ x_2 & \sqrt{x_2} & 1 \\ x_3 & \sqrt{x_3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1^2 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_2^2 & 1 \\ \lambda_3 & \lambda_3^2 & 1 \end{vmatrix} < 0$$

(см. пример 1).

Теорема. *Если взаимнооднозначная на множестве M функция $f(x)$ имеет положительную (отрицательную) выпуклость и если она возрастает на этом множестве, то обратная для неё функция $x=\varphi(y)$ на этом множестве имеет отрицательную (положительную) выпуклость.*

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2 < x_3$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M$, $x_3 \in M$; положим $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, $f(x_3)=y_3$. Тогда $y_1 < y_2 < y_3$; имеем: $x_1=\varphi(y_1)$, $x_2=\varphi(y_2)$, $x_3=\varphi(y_3)$,

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(y_1) & y_1 & 1 \\ \varphi(y_2) & y_2 & 1 \\ \varphi(y_3) & y_3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_1 & \varphi(y_1) & 1 \\ y_2 & \varphi(y_2) & 1 \\ y_3 & \varphi(y_3) & 1 \end{vmatrix}.$$

Если первый детерминант положителен, то второй отрицателен, и наоборот.

Замечание. Теорему для функции $f(x)$, убывающей на множестве, предлагаем сформулировать и доказать читателю.

Упражнения

210. Функции $p(x)$ и $q(x)$ имеют положительную выпуклость на множестве M. Доказать, что функция $p(x)+q(x)$ также положительно выпукла на том же множестве M.

211. Доказать, что если число $\lambda < 0$, а функция $f(x)$ имеет на множестве M положительную выпуклость, то функция $\lambda f(x)$ на том же множестве отрицательно выпукла.

212. Доказать, что функция

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

на отрезке $[-1, 1]$ имеет отрицательную выпуклость.

213. Доказать, что если функция $f(x)$ на множестве M имеет положительную выпуклость, то то же можно сказать о функции $x+f(x)$ и о функции $ax+b+f(x)$.

214. Доказать, что функция $y=\operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ имеет отрицательную выпуклость, а на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ — положительную.

215. Доказать, что если на множестве M функция $f(x)$ имеет положительную выпуклость, то на том же множестве функция $-f(x)$ имеет отрицательную выпуклость.

216. Доказать, что функция $y=ax^2+bx+c$ при $a>0$ — положительно выпукла, а при $a<0$ — отрицательно выпукла.

217. Доказать, что функция $y=ax^3+bx^2+cx+d$, где $a \neq 0$, на одном из интервалов $\left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right)$ и $\left(-\frac{b}{3a}, +\infty\right)$ имеет положительную выпуклость, а на другом отрицательную.

§ 92. Сложная функция

Предположим, что на подмножестве M значений функции $y=f(x)$ задана функция $\varphi(y)$. Тогда функция $\varphi[f(x)]$ называется сложной.

Её областью определения служит множество всех тех значений аргумента x из области определения функции $f(x)$, для которых $f(x)$ принадлежит множеству M.

Если функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ заданы формулами, то под областью определения сложной функции $\varphi[f(x)]$ понимают множество всех тех значений аргумента, при которых выражение $\varphi[f(x)]$ имеет смысл.

Понятие сложной функции можно обобщить: пусть $y=f(x)$, $z=\varphi(y)$, $w=\psi(z)$ — три функции, причём область определения каждой функции, начиная со второй, содержится в множестве значений предыдущей. Тогда функция $\psi[\varphi(f(x)]$ называется сложной; областью её определения является множество тех значений x, каждому из которых соответствует значение z из области определения функции $\psi(z)$. Если ничего не сказано об области определения каждой из функций, а функции эти заданы формулами, то под областью определения функции $\psi[\varphi(f(x))]$ понимается то множество значений x, при которых данное аналитическое выражение имеет смысл.

Пример 1. $y=f(x)=1-x^2$. Множество значений этой функции есть полуинтервал $(-\infty, 1]$. Возьмём сегмент $[-1, 1]$, входящий в полуинтервал $(-\infty, 1]$ и зададим на нём функцию $z=\sqrt{y}$. Тогда функция $z=\sqrt{1-x^2}$ будет сложная. Её областью определения является сегмент $[-1, 1]$, так как значения x из этого сегмента служат всеми теми значениями x, которым соответствуют значения функции $y=1-x^2$ на сегменте $[-1, 1]$.

Пример 2. $y=\sin x$, $z=\sqrt{y}$. Этими соотношениями задана сложная функция $z=\sqrt{\sin x}$; её область определения состоит из множества сегментов $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, где k принимает все целые значения.

Пример 3. $y=\begin{cases} x^2, & \text{если } x<0, \\ 2x, & \text{если } x\geqslant 0, \end{cases}$ $\quad z=\begin{cases} y^3, & \text{если } y\geqslant 1, \\ y^2, & \text{если } y<1. \end{cases}$
Этими соотношениями задана сложная функция

$$z=\begin{cases} x^6, & \text{если } x\leqslant -1 \quad \text{(так как при этом } y\geqslant 1), \\ x^4, & \text{если } -1<x<0 \quad \text{(так как при этом } y<1), \\ 4x^2, & \text{если } 0\leqslant x<\frac{1}{2} \quad \text{(так как при этом } y<1), \\ x^6, & \text{если } x\geqslant \frac{1}{2} \quad \text{(так как при этом } y\geqslant 1). \end{cases}$$

§ 93. Экстремум функции

Определение. *Максимумом функции $f(x)$ на множестве M, входящем в область определения функции $f(x)$, называется такое значение $f(x_0)$ этой функции ($x_0 \in M$), что*

$$f(x)<f(x_0)$$

при всех $x \in M$, отличных от x_0. Если в этом определении неравенство

$$f(x) < f(x_0)$$

заменить условием

$$f(x) \leqslant f(x_0),$$

то значение $f(x_0)$ будем называть слабым максимумом функции $f(x)$ на множестве M.

Значение $x = x_0$, при котором функция $f(x_0)$ имеет максимальное значение $f(x_0)$, будем называть точкой максимума (или соответственно точкой слабого максимума). *Минимумом функции $f(x)$ на множестве M, входящем в область определения функции $f(x)$, называется такое значение $f(x_0)$ этой функции ($x_0 \in M$), что*

$$f(x) > f(x_0)$$

при всех $x \in M$, отличных от x_0.

Если в этом определении неравенство

$$f(x) > f(x_0)$$

заменить условием

$$f(x) \geqslant f(x_0),$$

то значение $f(x_0)$ функции $f(x)$ будем называть слабым минимумом функции $f(x)$ на множестве M.

Значение $x = x_0$, при котором функция $f(x)$ имеет минимальное значение $f(x_0)$, будем называть точкой минимума (или, соответственно, точкой слабого минимума).

Пример 1. На сегменте $[0, \pi]$ функция $\sin x$ имеет слабый минимум, равный 0; это значение функция $\sin x$ принимает при $x = 0$ и $x = \pi$, и максимум, равный 1 при $x = \frac{\pi}{2}$.

На сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin x$ имеет максимум, равный 1, и минимум, равный -1.

Пример 2. Функция $\chi(x)$ Дирихле на любом отрезке $[a, b]$ имеет слабый минимум, равный 0, и слабый максимум, равный 1.

Пример 3. В интервале $(0, 1)$ функция $\frac{1}{x}$ не имеет ни максимума (ибо она в этом интервале не ограничена сверху), ни минимума. В самом деле: пусть x_1 — любое число из интервала $(0, 1)$; возьмём число $x_2 > x_1$, входящее в этот интервал; тогда $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, откуда следует, что точка x_1 не является точкой минимума рассматриваемой функции.

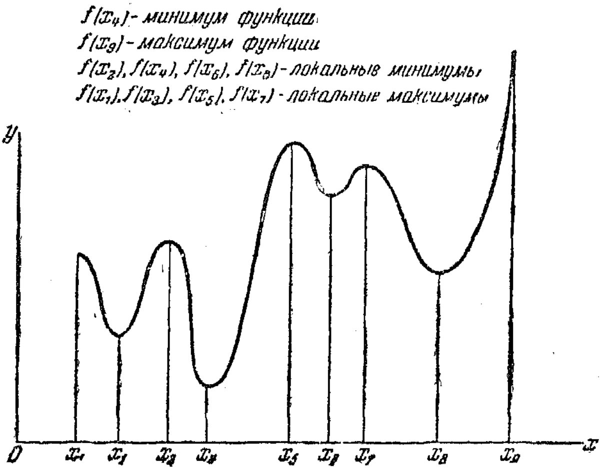
Пример 4. В полуинтервале $(0, 1]$ функция $y = \frac{1}{x}$ не имеет максимума, но имеет минимум, равный 1 (при $x = 1$).

Пример 5. На сегменте $[\varepsilon, 1]$, где $\varepsilon > 0$, функция $y = \frac{1}{x}$ имеет максимум, равный $\frac{1}{\varepsilon}$, и минимум, равный 1.

Максимум или минимум функции $f(x)$ во всей области определения называется **абсолютным** или **тотальным максимумом** и **абсолютным** или **тотальным минимумом** функции $f(x)$.

Значение $f(a)$ функции при $x = a$ (a входит в область определения функции $f(x)$) называется локальным (т. е. местным) максимумом (минимумом), если существует такая окрестность $(a - \delta,\ a + \delta)$ точки $x = a$, в которой $f(a)$ является максимумом (минимумом) функции $f(x)$ (черт. 223).

Аналогично предыдущему могут быть определены понятия слабого локального максимума (минимума) функции $f(x)$ в точке $x = a$,



Черт. 223.

понятия локального максимума (минимума) в точке $x = a$ функции $f(x)$ на данном множестве M и, наконец, понятие слабого максимума (минимума) функции $f(x)$ в точке $x = a$ на данном множестве M (входящем в область определения данной функции).

Введём ещё следующие определения: *значение $f(a)$ называется правым краевым максимумом, если существует такой полуинтервал $[a,\ a + \delta)$, что $f(x) < f(a)$ при всех $x \in [a,\ a + \delta)$* и отличных от a. Аналогично определяется понятие левого краевого максимума, понятия правого и левого краевых минимумов, понятия слабых правых и левых краевых максимумов и минимумов и, наконец, понятия правых и левых краевых слабых максимумов и минимумов на данном множестве M, входящем в область определения рассматриваемой функции.

Пример 6. Функция $y = x^2$ в точке $x = 2$ имеет правый краевой минимум, равный 4, и левый краевой максимум (также равный 4).

Пример 7. Функция

$$y=\begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ -x^2, & \text{если } x \text{ иррационально,}\end{cases}$$

в точке $x=0$ не имеет локального максимума и минимума (почему?). На множестве рациональных чисел эта функция имеет в точке $x=0$ локальный минимум, равный 0.

Пример 8. Функция

$$y=\begin{cases} -x+1, & \text{если } x \geqslant 0, \\ x, & \text{если } x<0,\end{cases}$$

в точке $x=0$ имеет локальный максимум, равный 1 (сделать чертёж).

Пример 9. Функция

$$y=\begin{cases} -x+1, & \text{если } x \geqslant 0, \\ x+2, & \text{если } x<0,\end{cases}$$

не имеет в точке $x=0$ ни максимума, ни минимума (почему?), но имеет в этой точке $x=0$ левый минимум (равный 1) и правый максимум (также равный 1).

Пример 10. Функция $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ в точке $x=0$ имеет минимум, равный 1 (почему?).

Рассмотрим ещё пример.

Пример 11. Из всех прямоугольников данного периметра найти прямоугольник с наибольшей площадью.

Решение. Пусть $2p$ — данный периметр, а x — одна из сторон искомого прямоугольника; тогда длины двух других сторон будут $p-x$, и вопрос сводится к отысканию максимума функции

$$s=x(p-x)$$

в интервале $(0, p)$.

Имеем:

$$s=xp-x^2=\frac{p^2}{4}-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2.$$

Отсюда видно, что s будет иметь максимальное значение при $x=\frac{p}{2}$. Вторая сторона прямоугольника равна $p-x=p-\frac{p}{2}=\frac{p}{2}$, т. е. искомый прямоугольник—квадрат.

§ 94. Основные элементарные функции и их графики

В школьном курсе математики изучаются следующие функции:

1) $y=x^n$ (n — целое число), 2) $y=x^r$ (r — рациональное число), 3) $y=\sin x$, 4) $y=\cos x$, 5) $y=\operatorname{tg} x$, 6) $y=\operatorname{ctg} x$, 7) $y=\arcsin x$, 8) $y=\arccos x$, 9) $y=\operatorname{arc\,tg} x$, 10) $y=\operatorname{arc\,ctg} x$, 11) $y=a^x$, где $a>0$, 12) $y=\lg_a x$, где $a>0$ и $a\neq 1$.

Эти функции мы будем называть **основными элементарными функциями**.

Функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и повторного применения знаков элементарных функций, мы будем называть элементарными.

Например, функции

$$y=\sqrt[3]{\sin\frac{x+1}{\sqrt{\cos x}}},$$

$$y=2^{x^2+\sin x-3}$$

и т. д. — элементарные.

В настоящем параграфе мы изучим некоторые свойства основных элементарных функций и их графиков.

1. Функция $y=x^n$, где n — целое число

Если n — целое положительное число, то областью определения функции $y=x^n$ является множество всех действительных чисел, так как тогда выражение x^n имеет смысл при любом действительном числе x.

Пусть n — чётное. Тогда

$$(-x)^n=x^n,$$

т. е. *функция x^n при чётном n — чётная и, значит, её график симметричен относительно оси Oy.*

Если n — нечётное, то

$$(-x)^n=-x^n,$$

т. е. *x^n при нечётном n — нечётная и, значит, её график симметричен относительно начала координат. Если n — чётное, то функция x^n на полуинтервале $(-\infty, 0]$ убывает, а на полуинтервале $[0, +\infty)$ возрастает и, значит, в точке $x=0$ имеет минимум* (равный 0).

В самом деле: если n — чётное и $x_1<x_2\leqslant 0$, то $x_1^n>x_2^n$, а если $0\leqslant x_1<x_2$, то $x_1^n<x_2^n$.

Если же n — нечётное, то функция x^n возрастает во всей области её определения, так как при n нечётном из неравенства $x_1<x_2$ следует $x_1^n<x_2^n$. Отметим, наконец, что *если n — чётное, то функция x^n имеет положительную выпуклость.*

Мы не будем доказывать этого положения в общем случае, а рассмотрим, например, случай $n=4$:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^4 & 1\\ x_2 & x_2^4 & 1\\ x_3 & x_3^4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1-x_3 & x_1^4-x_3^4\\ x_2-x_3 & x_2^4-x_3^4\end{vmatrix}=(x_1-x_3)(x_2-x_3)\begin{vmatrix} 1 & x_1^3+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_3^3\\ 1 & x_2^3+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_3^3\end{vmatrix}=$$

$$=(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_2^3-x_1^3+x_2^2x_3-x_1^2x_3+x_2x_3^2-x_1x_3^2)=$$

$$=(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1).$$

Если $x_1<x_2<x_3$, то $(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1)>0$, а

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=$$

$$=\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2+\frac{1}{2}(x_2+x_3)^2+\frac{1}{2}(x_3+x_2)^2>0,$$

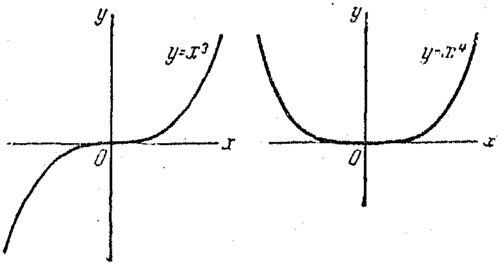
значит, рассматриваемый детерминант положителен. *Если n — нечётное, то функция $y=x^n$ имеет отрицательную выпуклость на полуинтервале $(-\infty, 0]$ и положительную выпуклость на полуинтервале $[0, +\infty)$.*

Не приводя опять общего доказательства, рассмотрим частный пример: $y=x^3$. Имеем:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^3 & 1 \\ x_2 & x_2^3 & 1 \\ x_3 & x_3^3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-x_3 & x_1^3-x_3^3 \\ x_2-x_3 & x_2^3-x_3^3 \end{vmatrix} = (x_1-x_3)(x_2-x_3)\begin{vmatrix} 1 & x_1^2+x_1x_3+x_3^2 \\ 1 & x_2^2+x_2x_3+x_3^2 \end{vmatrix} =$$
$$=(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1)(x_1+x_2+x_3).$$

Если $x_1 < x_2 < x_3 \leqslant 0$, то указанное произведение отрицательно, а если $0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3$, то оно положительно.

Отметим, наконец, *что если n — чётное, то функция $y=x^n$ ограничена снизу*, например числом 0, *но не ограничена сверху*, так как если N — любое число, а P — положительное число, бо́льшее чем N, то, полагая $x^n=P$, находим $x=\sqrt[n]{P}$; значит, каково бы ни было число N, найдётся значение $x\ (=\sqrt[n]{P})$, при котором $x^n\ (=P)$ будет больше N.



Черт. 224.

Если же n — нечётное, то функция x^n не ограничена сверху и не ограничена снизу. Читателю предлагается провести эти доказательства самостоятельно.

Указанные свойства функции $y=x^n$ дают достаточно ясное представление и о графике этой функции при различных n.

На чертеже 224 построены графики функции $y=x^3$ и $y=x^4$. Для более точного вычерчивания графика следует построить ряд точек, придавая x произвольные значения и определяя соответствующие значения y.

Рассмотрим функцию $y=x^n$, если n — целое, но отрицательное число. Положим $n=-m$, где m — целое положительное число. Тогда

$$y=x^n=x^{-m}=\frac{1}{x^m}.$$

Отметим следующие свойства этой функции:

1) *Областью определения функции* $\frac{1}{x^m}$ (m — целое положительное число) *является множество всех действительных чисел, кроме числа $x=0$.*

2) *Если m — чётное, то функция — чётная, т. е. её график симметричен относительно оси Oy; если m — нечётное, то функция — нечётная, т. е. её график симметричен относительно начала координат.*

3) *Если m — чётное, то в интервале $(-\infty, 0)$ функция $y=\frac{1}{x^m}$ возрастает, а в интервале $(0, +\infty)$ убывает.*

Если m — нечётное, то функция $y=\frac{1}{x^m}$ убывает в каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.

4) *Если m — чётное, то функция $y=\frac{1}{x^m}$ имеет положительную выпуклость*; общего доказательства и здесь приводить не будем; читателю предлагаем самостоятельно рассмотреть случаи $m=2$, $m=4$.

Если m — нечётное, то функция $y=\frac{1}{x^m}$ на интервале $(-\infty, 0)$ имеет отрицательную выпуклость, а на интервале $(0, +\infty)$ положительную выпуклость (рассмотреть случай $m=3$).

5) *В окрестности точки $x=0$ при чётном m функция $\frac{1}{x^m}$ ограничена снизу* $\left(\textit{так как } 0<\frac{1}{x^m}\right)$, *но не ограничена сверху* (доказать!); *если же m — нечётное, то в окрестности точки $x=0$ функция $\frac{1}{x^m}$ не ограничена сверху и не ограничена снизу* (доказать!).

6) *Какое положительное число ε мы ни взяли бы, найдётся такое положительное число N, что $\left|\frac{1}{x^m}\right|<\varepsilon$ при всех $x>N$ $\left(\textit{для этого надо взять } |x|>\sqrt[m]{\frac{1}{\varepsilon}}\right)$.*

Указанные свойства функции $\frac{1}{x^m}$ дают вместе с тем и достаточно ясное представление о её графике.

На чертеже 225 построены графики функций

$$y=\frac{1}{x^3} \quad \text{и} \quad y=\frac{1}{x^4}.$$

Последнее из отмеченных нами свойств геометрически означает, что ордината линии $y=\frac{1}{x^m}$ будет по модулю меньше любого положительного числа ε при всех достаточно больших x (по абсолютной величине).

2. Функция $y=x^r$, где r — рациональное число

Пусть $r=\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа; число q будем считать положительным, дробь $\frac{p}{q}$ будем предполагать несократимой.

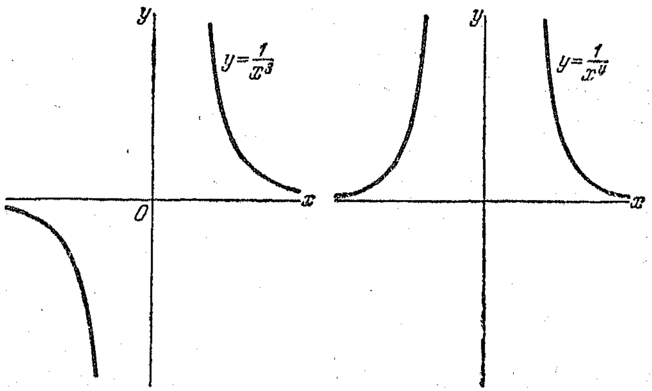
Имеем:

$$y = x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}.$$

Из этого выражения можно сделать следующие заключения об области определения функции $\sqrt[q]{x^p}$, которые даны в следующей таблице:

p	q	Область определения	Пример
I. Положительное нечётное	Положительное чётное	$[0, +\infty)$	$\sqrt{x}$
II. Отрицательное нечётное	Положительное чётное	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
III. Положительное	Положительное нечётное	$(-\infty, +\infty)$	$\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$
IV. Отрицательное	Положительное нечётное	$(-\infty, 0)\,(0, +\infty)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Функция $y = \sqrt[q]{x^p}$ вида I — возрастающая; точка $x = 0$ — точка локального минимума. Функция $y = \sqrt[q]{x^p}$ вида II — убывающая.



Черт. 225.

Функция $y = \sqrt[q]{x^p}$ вида III — возрастающая, если p — нечётное; если p — чётное, то эта функция убывает на полуинтервале $(-\infty, 0]$ и возрастает на полуинтервале $[0, +\infty)$; точка $x = 0$ — точка локального минимума. Функция $y = \sqrt[q]{x^p}$ вида IV — убывает в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, если p — нечётное, а если p — чётное, то эта функция возрастает в интервале $(-\infty,\ 0)$ и убывает в интервале $(0,\ +\infty)$. Функции III и IV при чётном p — чётные и при нечётном p — нечётные.

Все указанные свойства устанавливаются несложными рассуждениями и доказательства предлагается провести читателю.

Значительно сложнее установить следующие свойства, доказательства которых мы также приводить не будем: если для функции вида I дробь $\frac{p}{q}$ меньше 1, то функция имеет отрицательную выпуклость (как, например, функция $\sqrt{x}$), а если $\frac{p}{q}>1$, то положительную (как, например, функция $\sqrt{x^3}$).

Функции вида II имеют положительную выпуклость $\left(\text{например, функция } y=\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Функция вида III имеет отрицательную выпуклость, если $0<\frac{p}{q}<1$ и p — чётное, и положительную, если $\frac{p}{q}>1$, а p — чётное. Если же $0<\frac{p}{q}<1$, p — нечётное, то функция $y=x^{\frac{p}{q}}$ имеет положительную выпуклость на полуинтервале $(-\infty,\ 0]$ и отрицательную выпуклость на полуинтервале $[0,\ +\infty)$. Если $\frac{p}{q}>1$, p — нечётное, то на полуинтервале $(-\infty,\ 0]$ функция $y=x^{\frac{p}{q}}$ имеет отрицательную выпуклость, а на полуинтервале $[0,\ +\infty)$ — положительную.

Функция вида IV имеет отрицательную выпуклость на полуинтервале $(-\infty,\ 0]$ и положительную выпуклость на полуинтервале $[0,+\infty)$, если p — нечётное (и отрицательное). Если p — чётное, отрицательное, то на полуинтервалах $(-\infty,0]$ и $[0,\ +\infty)$ функция вида IV имеет положительную выпуклость (черт. 226).

Докажем, например, что функция

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

имеет положительную выпуклость.

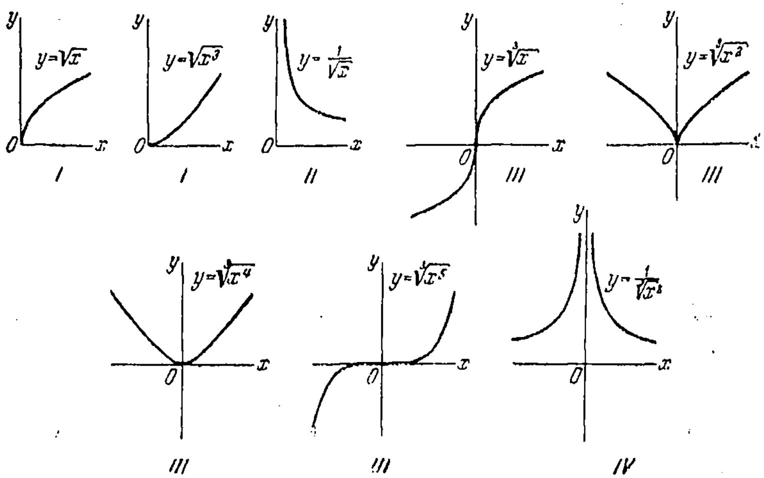
Имеем:

$$\begin{vmatrix} x_1 & \frac{1}{\sqrt{x_1}} & 1 \\ x_2 & \frac{1}{\sqrt{x_2}} & 1 \\ x_3 & \frac{1}{\sqrt{x_3}} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x_1x_2x_3}} \begin{vmatrix} (\sqrt{x_1})^3 & 1 & \sqrt{x_1} \\ (\sqrt{x_2})^3 & 1 & \sqrt{x_2} \\ (\sqrt{x_3})^3 & 1 & \sqrt{x^3} \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1^3 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_2^3 & 1 \\ \lambda_3 & \lambda_3^3 & 1 \end{vmatrix},$$

где $\lambda_1 = \sqrt{x_1}$, $\lambda_2 = \sqrt{x_2}$, $\lambda_3 = \sqrt{x_3}$. При условии $0 < x_1 < x_2 < x_3$ мы будем иметь $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, а при этом условии указанный детерминант, как мы показали выше, положителен.

Отметим, что функции вида I и II не ограничены сверху, но ограничены снизу (числом 0).

Функции вида III и IV при нечётном p не ограничены сверху и



Черт. 226.

не ограничены снизу, а при чётном p — ограничены снизу (числом 0), но не ограничены сверху.

Докажем, например, что функция

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

не ограничена снизу. Возьмём любое число N и любое отрицательное число $P < N$.

Найдём x из уравнения $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = P$; $x = \frac{1}{P^3}$. При этом значении x мы будем иметь: $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = P < N$, а это и значит, что функция $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ не ограничена снизу.

Наконец, отметим, что функции вида II и IV обладают тем свойством, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что $|f(x)| < \varepsilon$ при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$.

Например, для функции $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ неравенство $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, будет выполнено, если $|x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^3}}$.

Геометрически это означает, что ординаты графика при всех достаточно больших x (по модулю) будут меньше любого наперёд заданного положительного числа ε.

Всё сказанное о свойствах функции $\sqrt[q]{x^p}$ даёт вместе с тем и достаточно ясное представление о её графике при различных p и q. Ряд таких графиков дан на чертеже 226.

3. Функция $y = \sin x$

Эта функция достаточно полно исследуется в курсах тригонометрии для средней школы. Мы здесь ограничимся лишь перечислением её свойств и укажем дополнительно одно из свойств, не излагаемое обычно в элементарных курсах.

1) Областью определения функции $\sin x$ является множество всех действительных чисел.

2) Функция $\sin x$ — нечётная:

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

3) Функция $\sin x$ — периодическая с наименьшим периодом 2π:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

4) Функция $\sin x$ на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ возрастающая, на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ убывающая, на сегменте $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ возрастающая.

5) Для всех x из области определения функции $\sin x$ имеем:

$$|\sin x| \leqslant 1,$$

т. е. эта функция ограниченная.

6) Точки $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (k — любое целое число) являются точками локальных максимумов, а точки $x_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ — точками локальных минимумов.

Все эти свойства читателю известны.

7) Отметим ещё, что на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin x$ имеет отрицательную выпуклость. Для доказательства нужно установить неравенство

$$\begin{vmatrix} x_1 & \sin x_1 & 1 \\ x_2 & \sin x_2 & 1 \\ x_3 & \sin x_3 & 1 \end{vmatrix} < 0$$

при всех x_1, x_2, x_3, удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Это — достаточно трудная задача и её решение мы приводить не будем. Отметим только, что указанное неравенство эквивалентно следующему:

$$\begin{vmatrix} x_2 \sin x_2 \\ x_3 \sin x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 \sin x_3 \\ x_1 \sin x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 \sin x_1 \\ x_2 \sin x_2 \end{vmatrix} < 0.$$

Можно доказать, что каждое из написанных слагаемых отрицательно $\left(\text{при условии } 0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Например,

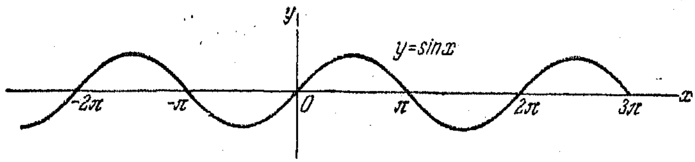
$$\begin{vmatrix} x_1 \sin x_1 \\ x_2 \sin x_2 \end{vmatrix} < 0, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Это неравенство можно переписать и так:

$$\frac{\sin x_2}{x_2} < \frac{\sin x_1}{x_1},$$

и таким образом вопрос сводится к доказательству того, что функция $\frac{\sin x}{x}$ — убывающая на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Это можно доказать элементарно, но доказательство технически сложно, и мы его приводить не будем.

Все данные дают представление и о графике синусоиды (черт. 227). Для более точного вычерчивания её графика следует построить



Черт. 227.

ряд точек, придавая x произвольные значения и вычисляя соответствующие значения $\sin x$.

В силу свойств функции $\sin x$ построение достаточно провести на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ значения $\sin x$ определятся из соотношения $\sin x = \sin(\pi - x)$, в силу нечётности функции $\sin x$, из соотношения $\sin(-x) = -\sin x$ определятся значения $\sin x$ на сегменте $[-\pi, \pi]$, а в силу периодичности и во всей области определения.

4. Функция $y = \cos x$

Эта функция обладает следующими свойствами:

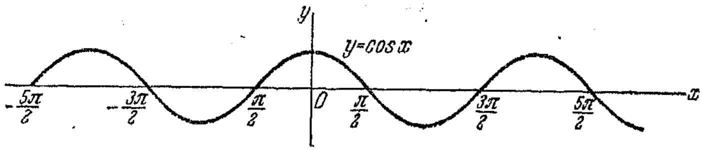
1) Область определения: $(-\infty, +\infty)$.

2) Функция $\cos x$ чётная: $\cos(-x) = \cos x$.

3) Функция $\cos x$ периодическая с наименьшим периодом 2π:

$$\cos(x+2\pi)=\cos x.$$

4) На сегменте $[0, \pi]$ функция $\cos x$ убывает, а на сегменте $[\pi, 2\pi]$ — возрастает.



Черт. 228.

5) $\cos x$ — ограниченная функция: $|\cos x|\leqslant 1$.

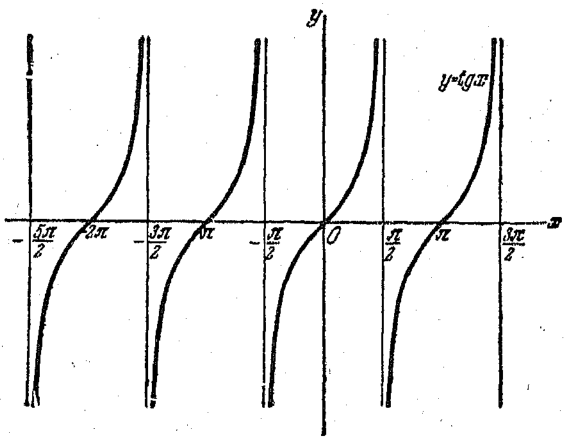
6) Точки $x=2k\pi$ (k — любое целое число) — точки локальных максимумов; точки $x=\pi+2k\pi$ — точки локальных минимумов.

7) На сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\cos x$ имеет отрицательную выпуклость.

График функции $y=\cos x$ изображён на чертеже 228.

5. Функция $y=\operatorname{tg} x$

Эта функция обладает следующими свойствами:



Черт. 229.

1) Область определения — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида: $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число.

2) Функция $\operatorname{tg} x$ — нечётная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

3) Функция $\operatorname{tg} x$ — периодическая с наименьшим периодом π:

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x.$$

4) В интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\operatorname{tg} x$ возрастает.

5) $\operatorname{tg} x$ — функция, не ограниченная сверху и снизу.

В самом деле: если N — любое число, то найдётся угол α, для которого $\operatorname{tg}\alpha = N$.

6) На полуинтервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\operatorname{tg} x$ имеет положительную выпуклость.

График функции $y = \operatorname{tg} x$ (тангенсоида) дан на чертеже 229.

Отметим, что доказательство положительной выпуклости функции $\operatorname{tg} x$ на полуинтервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ сводится к доказательству того, что функция $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ на этом полуинтервале возрастает.

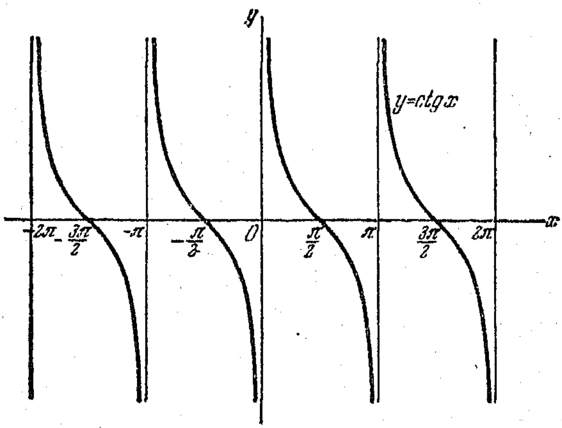
6. Функция $y = \operatorname{ctg} x$

1) Область определения — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида

$$x = k\pi,$$

где k — любое целое число.

2) Функция $\operatorname{ctg} x$ — чётная; $\operatorname{ctg}(-x) = \operatorname{ctg} x$.



Черт. 230.

3) Функция $\operatorname{ctg} x$ — периодическая с наименьшим периодом π.

4) В интервале $(0, \pi)$ функция $\operatorname{ctg} x$ убывает.

5) Функция $\operatorname{ctg} x$ не ограничена сверху и не ограничена снизу.

6) В интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\operatorname{ctg} x$ имеет положительную выпуклость.

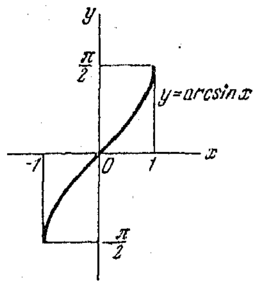
На чертеже 230 изображён график функции $y = \operatorname{ctg} x$ (котангенсоида).

7. Функция $y = \arcsin x$

Определение. *Функцией* $x = \arcsin y$ *называется функция, обратная на сегменте* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *для функции* $y = \sin x$. Отметим, что на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin x$ нечётная, возрастает, взаимнооднозначна и принимает все действительные значения из сегмента $[-1, 1]$. Значит, обратная функция $x = \arcsin y$ будет определена на сегменте $[-1, 1]$, также нечётная, взаимнооднозначна и возрастающая на этом сегменте.

Точка 1 — точка локального максимума, а точка -1 — локального минимума.

Наконец, на сегменте $[0, 1]$ функция $x = \arcsin y$ имеет положительную выпуклость, так как функция $y = \sin x$ на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает и имеет на этом сегменте отрицательную выпуклость.



Черт. 231.

Если обозначить, как обычно, аргумент функции $x = \arcsin y$ буквой x, а функцию буквой y, то мы получим:

$$y = \arcsin x.$$

Ясно, что график функции $y = \arcsin x$ симметричен относительно биссектрисы координатного угла $y = x$ части графика синусоиды $y = \sin x$, соответствующей сегменту $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (черт. 231).

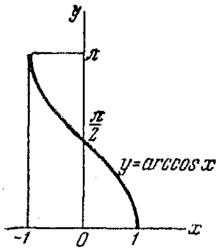
8. Функция $y = \arccos x$

Определение. *Функцией* $x = \arccos y$ *называется функция, обратная на сегменте* $[0, \pi]$ *для функции* $y = \cos x$.

На сегменте $[0, \pi]$ функция $\cos x$ убывающая взаимнооднозначна и принимает все значения из сегмента $[-1, 1]$, значит, обратная функция $x = \arccos y$ на сегменте $[-1, 1]$ убывающая и взаимнооднозначна.

На этом сегменте функция $x = \arccos y$ ограничена. Точка $x = -1$ является точкой локального максимума, а точка $x = +1$ — точкой локального минимума. На сегменте $[0, 1]$ функция $\arccos y$ имеет отрицательную выпуклость, а на сегменте $[-1, 0]$ — положительную.

График функции
$$y = \arc \cos x$$
симметричен части графика косинусоиды $y = \cos x$, соответствующей сегменту $[0, \pi]$ (черт. 232) относительно биссектрисы $y = x$ координатного угла.

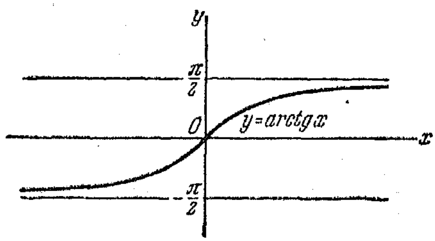


Черт. 232.

9. Функция $y = \operatorname{arc\,tg} x$

Определение. *Функцией $x = \operatorname{arc\,tg} y$ называется функция, обратная в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ для функции*
$$y = \operatorname{tg} x.$$

Отметим, что в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\operatorname{tg} x$ нечётная, взаимнооднозначная и возрастает, принимая все действительные значения. Значит, функция $\operatorname{arc\,tg} y$ определена на множестве всех действительных чисел и также нечётная, взаимнооднозначная и возрастает. Она ограничена сверху и снизу:
$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} y < \frac{\pi}{2}.$$



Черт. 233.

Если обозначить, как обычно, аргумент буквой x, а функцию буквой y, то график функции $y = \operatorname{arc\,tg} x$ симметричен части графика функции $y = \operatorname{tg} x$, соответствующей интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ относительно биссектрисы $y = x$ координатного угла xOy (черт. 233).

На полуинтервале $(-\infty, 0]$ функция $y = \operatorname{arc\,tg} x$ имеет положительную выпуклость, а на полуинтервале $[0, +\infty)$ — отрицательную.

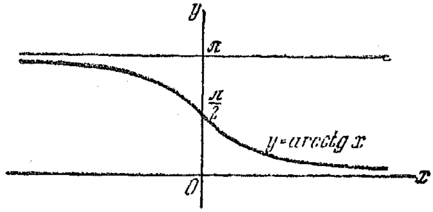
10. Функция $y = \operatorname{arc\,ctg} x$

Определение. *Функцией $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ называется функция, обратная на интервале $(0, \pi)$ для функции $y = \operatorname{ctg} x$.*

Функция $\operatorname{ctg} x$ в интервале $(0, \pi)$ взаимнооднозначна, убывающая и принимает все действительные значения; значит, функция $\operatorname{arc\,ctg} y$ определена на множестве $(-\infty, +\infty)$ всех действительных чисел, взаимнооднозначная и убывающая. Она ограничена и сверху и снизу:
$$0 < \operatorname{arc\,ctg} y < \pi.$$

На полуинтервале $[0, +\infty)$ функция $\operatorname{arc\,ctg} y$ имеет положительную выпуклость, а на полуинтервале $(-\infty, 0]$ — отрицательную.

Обозначим аргумент, как обычно, буквой x, а функцию — буквой y. График функции $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ симметричен части графика функции



Черт. 234.

$y = \operatorname{ctg} x$, соответствующей интервалу $(0, \pi)$ относительно биссектрисы $y = x$ координатного угла xOy (черт. 234).

11. Функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$

Определение. *Функция $y = a^x$, где $a > 0$, определяется так:*
1°. *Если $x = n$ — целое положительное число, то*

$$a^x = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

2°. *Если $x = -n$ — целое отрицательное число, то*

$$a^x = a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

3°. *Если $x = 0$, то $a^x = a^0 = 1$.*

4°. *Если $x = \frac{p}{q}$, где p и q — целые положительные числа, т. е. если x — положительное рациональное число, то a^x — положительное число, определяемое соотношением*

$$a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

5°. *Если $x = -\frac{p}{q}$, где p и q — целые положительные числа, т. е. если x — отрицательное рациональное число, то a^x есть положительное число, определяемое соотношением*

$$a^x = a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}.$$

6°. *Наконец, если x — иррациональное число, то a^x определяется как число, заключённое между a^r и a^R:*

$$a^r < a^x < a^R,$$

если $a>1$, и как число, удовлетворяющее условию

$$a^r > a^x > a^R$$

при

$$0<a<1,$$

где r — любое рациональное число меньшее x, а R — любое рациональное число большее x.

Замечание I. Неравенство $a^r<a^R$ при $a>1$ следует из предыдущих определений и условия $r<R$.

В самом деле: пусть r и R — два рациональных числа, причём $r<R$ и пусть $a>1$. Докажем, что $a^r<a^R$, т. е. что $\frac{a^R}{a^r}>1$ ($a^r>0$, $a^R>0$) или $a^{R-r}>1$. Число $R-r$ — рациональное и положительное. Обозначим его через $\frac{p}{q}$, где p и q — положительные числа; тогда

$$a^{R-r}=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}.$$

Так как $a>1$, то и $a^p>1$ [ибо $a^p-1=(a-1)(a^{p-1}+\ldots+1)$], значит, и $\sqrt[q]{a^p}>1$. Точно так же доказывается, что если $0<a<1$, r и R — два любых рациональных числа и $r<R$, то $a^r>a^R$.

Замечание II. В 6°, определяющем функцию a^x для иррационального показателя x, надо, конечно, доказать, что если r и R — два любых рациональных приближения числа x, то существует, и притом только одно, число a^x, которое удовлетворяет неравенствам

$$a^r<a^x<a^R \text{ (или } a^r>a^x>a^R).$$

Это доказательство мы опускаем (см., например, Новоселов С. И., Учебник алгебры для учительских институтов). Отметим некоторые свойства функции

$$y=a^x,$$

вытекающие из её определения:

1) Эта функция определена на множестве $(-\infty, +\infty)$ всех действительных чисел.

2) Функция a^x положительна: $a^x>0$ при всех x.

Следовательно, функция a^x ограничена снизу.

3) Функция a^x возрастающая при $a>1$ и убывающая при $a<1$.

В самом деле: выше было показано, что эта функция возрастает на множестве рациональных чисел, в силу 6° эта функция возрастающая и во всей своей области определения, т. е. на множестве всех действительных чисел (при $a>1$).

4) Функция a^x не ограничена сверху. Докажем это для случая $a>1$. Пусть N — любое число. Рассмотрим число a^n, где n —

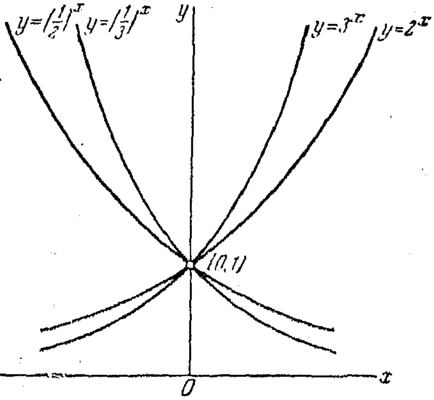
целое положительное число. Имеем:

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1) > (a-1)\,n,$$

так как

$$a^{n-1} > 1, \quad a^{n-2} > 1, \ldots$$

Возьмём любое положительное число $Q > N$; неравенство $(a-1)n > Q$ будет выполнено, если $n > \frac{Q}{a-1}$; тогда и подавно $a^n - 1 > Q$, значит, $a^n > Q+1 > N$. Отметим, что неравенство $a^x > N$ будет выполнено при всех $x > \frac{Q}{a-1}$ в силу того, что функция a^x при $a > 1$ возрастающая. Если же $a < 1$, то можно утверждать, что для любого числа N найдётся такое число P, что при всех $x < P$ мы будем иметь $a^x > N$. Доказательство аналогично.



Черт. 235.

5) Если $0 < b < a$, то $a^x > b^x$ при $x > 0$ и $a^x < b^x$ при $x < 0$.

6) Если $a > 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N, что $a^x < \varepsilon$ при всех $x < N$.

В самом деле: возьмём целое отрицательное число $-n$; тогда неравенство

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^n - 1} = \frac{1}{(a-1)(a^{n-1} + \ldots + 1)} < \frac{1}{(a-1)n} < \varepsilon$$

будет выполнено, если $n > \frac{1}{\varepsilon(a-1)}$. Вместе с тем будет выполнено и неравенство $a^x < \varepsilon$ при всех $x < -n$ в силу того, что функция a^x $(a > 1)$ — возрастающая.

Если $a < 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N, что $a^x < \varepsilon$ при всех $x > N$. Доказательство аналогично.

7) Наконец, отметим без доказательства, что функция $y = a^x$ имеет положительную выпуклость.

Все эти данные дают вместе с тем достаточно ясное представление и о графике функции $y = a^x$. На чертеже 235 изображено несколько графиков функции $y = a^x$, соответствующих различным значениям a.

12. Функция $y = \lg_a x$, где $a > 0$, $a = 1$

Определение. *Функцией $x = \lg_a y$ называется функция, обратная для функции $y = a^x$ $(a > 0$ и $a \neq 1)$.*

1. Так как функция $y = a^x$ определена на множестве всех действительных чисел и принимает все действительные положи-

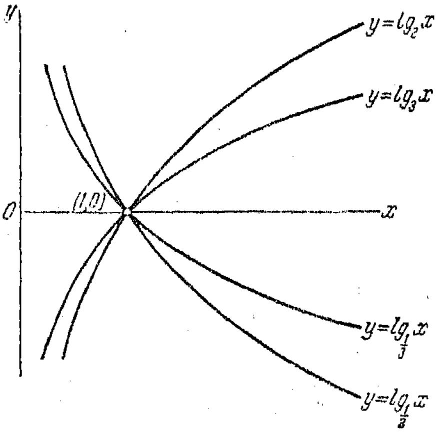
тельные значения, то функция $x=\lg_a y$ определена на множестве всех положительных чисел, т. е. в интервале $(0, +\infty)$, и её областью значений является множество всех действительных чисел.

2. Если $a>1$, то функция $y=a^x$ возрастающая, значит, и обратная для неё функция $x=\lg_a y$ также возрастающая.

3. Если $0<a<1$, то функция $y=a^x$ убывающая, значит, и обратная для неё функция $x=\lg_a y$ также убывающая.

4. Если $a>1$, то для любого N найдётся такое число P, что $\lg_a y>N$ при всех $x>P$, и для любого числа M найдётся такое число $\delta>0$, что $\lg_a y<M$ при всех y, удовлетворяющих неравенству $0<y<\delta$.

(Как видоизменятся эти заключения, если $0<a<1$?)



Черт. 236.

Эти свойства функции $x=\lg_a y$ вытекают из соответствующих свойств функции $y=a^x$ и того, что функция $x=\lg_a y$ обратная для функции $y=a^x$.

5. Наконец, отметим, что при $a>1$ функция $x=\lg_a y$ имеет отрицательную выпуклость, а при $0<a<1$ — положительную.

Обозначим аргумент, как обычно, буквой x, а функцию буквой y. График функции

$$y=\lg_a x$$

симметричен графику функции $y=a^x$ относительно биссектрисы координатного угла $y=x$.

На чертеже 236 построено несколько графиков функции $y=\lg_a x$ для различных значений a.

§ 95. Элементарные функции и их графики

В настоящем параграфе мы рассмотрим несколько примеров и покажем, что целый ряд свойств элементарных функций, достаточно полно характеризующих её график, можно получить элементарными средствами *).

*) Такие исследования элементарных функций очень полезно проводить с учащимися средней школы, так как примеры, подобные тем, какие мы рассмотрим ниже, потребуют от учащихся применения самых разнообразных отделов школьного курса математики (геометрии, алгебры и тригонометрии), а в целом ряде случаев и немалой изобретательности.

Достаточно широко распространённое построение графиков «по точкам» с научной точки зрения не выдерживает никакой критики: сколько бы точек графика ни было построено, мы никогда не будем иметь о нём полного представления, ибо нельзя делать никакого заключения о свойствах функции по её значениям в конечном (пусть даже очень большом) числе точек. После рассмотрения примеров в этом параграфе мы отметим также ряд положений, которые иногда помогают легко построить график элементарной функции, считая, что известны графики основных элементарных функций.

Пример 1. $y=3x-x^3$.

1°. Область определения этой функции — множество $(-\infty, +\infty)$ всех действительных чисел.

2°. Исследуем функцию $3x-x^3$ на возрастание и убывание.

Имеем:

$$f(x_1)=3x_1-x_1^3, \quad f(x_2)=3x_2-x_2^3,$$

откуда

$$f(x_1)-f(x_2)=3x_1-x_1^3-(3x_2-x_2^3)=(x_1-x_2)(3-x_1^2-x_1x_2-x_2^2).$$

Если $x_1<x_2$, то $x_1-x_2<0$ и знак разности $f(x_1)-f(x_2)$ определяется знаком числа

$$3-x_1^2-x_1x_2-x_2^2.$$

Ясно, что на полуинтервалах $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ (т. е. если $x_1\geqslant 1$, $x_2>1$ или $x_1<-1$, $x_2\leqslant -1$) мы имеем:

$$3-x_1^2-x_1x_2-x_2^2<0,$$

т. е. на этих интервалах функция убывающая. На сегменте $[-1, 1]$ имеем:

$$3-x_1^2-x_1x_2-x_2^2>0,$$

значит на этом сегменте $f(x_1)-f(x_2)<0$, т. е. функция $f(x)$ — возрастающая.

Найдём значения функции $y=3x-x^3$ в точках $x=-1$ (локальный минимум) и $x=1$ (локальный максимум):

$$f(-1)=-2, \quad f(1)=2.$$

3°. Функция $3x-x^3$ — нечётная, значит её график симметричен относительно начала координат.

4°. Исследуем эту функцию на положительную и отрицательную выпуклость. Имеем:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 3x_1-x_1^3 & 1 \\ x_2 & 3x_2-x_2^3 & 1 \\ x_3 & 3x_3-x_3^3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & -x_1^3 & 1 \\ x_2 & -x_2^3 & 1 \\ x_3 & -x_3^3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^3 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^3-x_3^3 & x_1-x_3 & 0 \\ x_2^3-x_3^3 & x_2-x_3 & 0 \\ x_3^3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^3-x_3^3 & x_1-x_3 \\ x_2^3-x_3^3 & x_2-x_3 \end{vmatrix} =$$

$$=(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_1-x_2)(x_1+x_2+x_3).$$

Отсюда ясно, что в полуинтервале $(-\infty, 0]$ функция имеет положительную выпуклость, а в полуинтервале $[0, +\infty)$ — отрицательную.

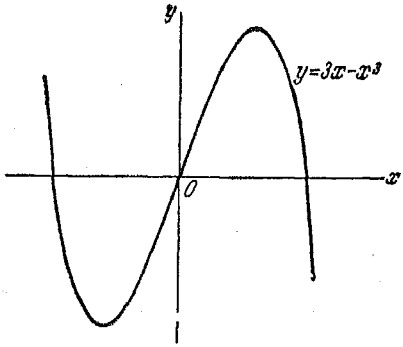
5°. Найдём точки пересечения графика с осью Ox; полагая $y=0$, находим:

$$x_1=-\sqrt{3},\quad x_2=0,\quad x_3=\sqrt{3};$$

значит на оси Ox имеются три точки графика:

$$(-\sqrt{3},\ 0),\quad (0,\ 0),\quad (\sqrt{3},\ 0).$$

Все эти исследования дают ясное представление о графике функции. Для более точного вычерчивания графика полезно построить ряд точек графика, придавая x произвольные значения и определяя соответствующие значения y (черт. 237).



Черт. 237.

Пример 2. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

1°. Область определения — множество $(-\infty,\ +\infty)$ всех действительных чисел.

2°. Исследуем функцию на возрастание и убывание; пусть $x_1<x_2$; находим:

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1^2}-\frac{x_2}{1+x_2^2}=$$
$$=\frac{(1-x_1x_2)(x_1-x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}.$$

Отсюда ясно, что в полуинтервалах

$$(-\infty,\ -1]\ \text{и}\ [1,\ +\infty)$$

функция $\dfrac{x}{1+x^2}$ убывает, а на сегменте $[-1, 1]$ — возрастает. В самом деле: если $x_1<x_2$ и $|x_1|\leqslant 1$, $|x_2|\leqslant 1$, то $1-x_1x_2>0$, $x_1-x_2<0$ и значит $f(x_1)-f(x_2)<0$. Найдём значение данной функции в точках $x=-1$ (локальный минимум) и $x=1$ (локальный максимум):

$$f(-1)=-\frac{1}{2},\quad f(1)=\frac{1}{2}.$$

3°. Данная функция нечётная, значит её график симметричен относительно начала координат.

4°. Исследуем функцию на положительную и отрицательную выпуклость. Имеем:

$$\begin{vmatrix} x_1 & \dfrac{x_1}{1+x_1^2} & 1 \\ x_2 & \dfrac{x_2}{1+x_2^2} & 1 \\ x_3 & \dfrac{x_3}{1+x_3^2} & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1-x_3 & \dfrac{x_1}{1+x_1^2}-\dfrac{x_3}{1+x_3^2} \\ x_2-x_3 & \dfrac{x_2}{1+x_2^2}-\dfrac{x_3}{1+x_3^2} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x_1-x_3 & \dfrac{(x_1-x_3)(1-x_1x_3)}{(1+x_1^2)(1+x_3^2)} \\ x_2-x_3 & \dfrac{(x_2-x_3)(1-x_2x_3)}{(1+x_2^2)(1+x_3^2)} \end{vmatrix}=\frac{(x_1-x_3)(x_2-x_3)}{1+x_3^2}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1-x_1x_3}{1+x_1^2} \\ 1 & \dfrac{1-x_2x_3}{1+x_2^2} \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)(1+x_3^2)}x_1x_2x_3\left(\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}-1\right).$$

Ясно, что выражение

$$\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}-1$$

будет положительно, если

$$\frac{1}{x_1}>\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{x_2}>\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{x_3}>\frac{1}{\sqrt{3}},$$

так как в этом случае

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_3}>1.$$

Значит на сегменте $[0, \sqrt{3}]$ функция $\frac{x}{1+x^2}$ имеет отрицательную выпуклость; на полуинтервале $[\sqrt{3}, +\infty)$ эта функция имеет положительную выпуклость, так как, если $\sqrt{3}\leqslant x_1<x_2<x_3$, то

$$\frac{1}{x_1}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{x_2}<\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{x_3}<\frac{1}{\sqrt{3}};$$

следовательно,

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_3}<1.$$

Данная функция нечётная, а потому в полуинтервале $(-\infty, -\sqrt{3}]$ функция имеет отрицательную выпуклость, а на сегменте $[-\sqrt{3}, 0]$ — положительную.

5°. Найдём точки пересечения графика с осью Ox. Полагая $y=0$, т. е. $\frac{x}{1+x^2}=0$, находим $x=0$, т. е. на оси Ox есть только одна точка графика, а именно — начало координат.

6°. Пусть дано любое, сколь угодно малое положительное число ε. Докажем, что *найдётся такое положительное число N, что будет выполнено неравенство*

$$\frac{x}{1+x^2}<\varepsilon$$

при всех $x>N$.

В самом деле:

$$\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{\frac{1}{x}+x}<\frac{1}{x},\quad \text{если } x>0,$$

значит, если взять $\frac{1}{x}<\varepsilon$ или $x>\frac{1}{\varepsilon}$, то и подавно $\frac{x}{1+x^2}<\varepsilon$. Всё это даёт уже ясное представление о графике функции $y=\frac{x}{1+x^2}$ (черт. 238).

Пример 3. $y=\frac{1}{1-x^2}$.

1°. *Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел, за исключением двух чисел:*

$$x=-1 \text{ и } x=1,$$

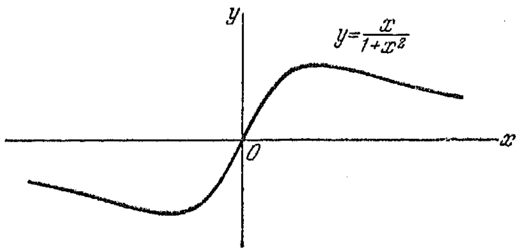
иначе говоря, область определения данной функции состоит из трёх интервалов:

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, +\infty).$$

2°. Пусть $x_1 < x_2$; находим:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{1-x_1^2} - \frac{1}{1-x_2^2} = \frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}.$$

Отсюда ясно, что в интервале $(-\infty, -1)$ функция убывающая, в полуинтервале $(-1, 0]$ убывающая, в полуинтервале $[0, 1)$ и в интервале $(1, +\infty)$



Черт. 238.

эта функция возрастающая. Значит, в точке $x=0$ имеем локальный минимум:

$$f(0) = 1.$$

3°. Данная функция чётная и, следовательно, её график симметричен относительно оси Oy.

4°. Исследуем функцию на положительную и отрицательную выпуклость. Преобразуя выражение

$$\begin{vmatrix} x_1 & \frac{1}{1-x_1^2} & 1 \\ x_2 & \frac{1}{1-x_2^2} & 1 \\ x_3 & \frac{1}{1-x_3^2} & 1 \end{vmatrix},$$

мы приведём его к виду:

$$\frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1)}{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}(1+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3),$$

причём

$$x_1 < x_2 < x_3.$$

Отсюда видно, что в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ функция имеет отрицательную выпуклость. В интервале $(-1, 1)$ функция имеет положительную выпуклость. Доказательство сводится к тому, чтобы установить неравенство

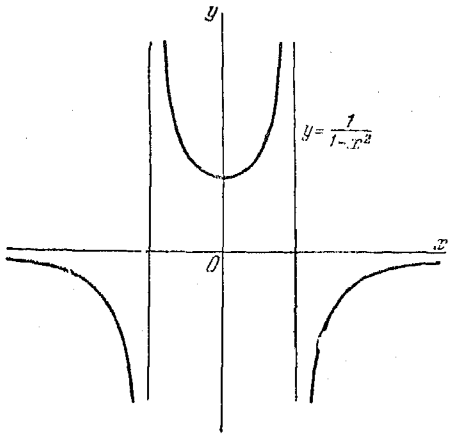
$$1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 > 0$$

в случае, если x_1, x_2, x_3 входят в интервал $(-1, 1)$. Доказательство предоставляем читателю.

5°. Отметим, что, каково бы ни было отрицательное число λ, можно найти число N, такое, что $0 > \frac{1}{1-x^2} > \lambda$ при всех $x < N$ (докажите!).

6°. Если N — любое положительное число, то можно найти такое положительное число ε, что $\frac{1}{1-x^2} > N$ при всех x, удовлетворяющих неравенствам $1-\varepsilon < x < 1$, и каково бы ни было отрицательное число N, можно найти такое положительное число ε, что $\frac{1}{1-x^2} < N$ при всех x, удовлетворяющих неравенствам $1 < x < 1+\varepsilon$.

Все эти данные дают ясное представление о виде графика (черт. 239).

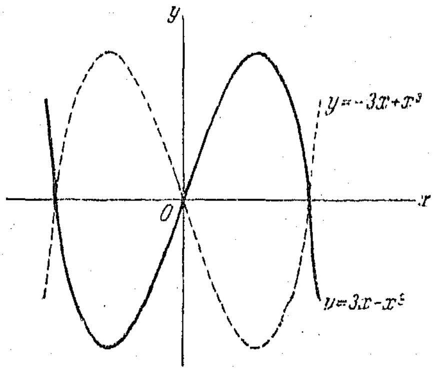


Черт. 239.

На трёх разобранных примерах мы видим, как сложно исследовать свойства элементарных функций, связанные с графиком, даже в случае самых простых элементарных функций (полином $3x-x^3$ или рациональные функции $\frac{x}{1+x^2}$, $\frac{1}{1-x^2}$).

Ещё бо́льшие трудности возникают при усложнении аналитических выражений.

Ниже мы дадим более простые методы, основанные на дифференциальном исчислении.



Черт. 240.

Отметим ещё ряд соображений, помогающих иногда построить график функции:

А. Если известен график функции $y=f(x)$, то график функции $y=f(-x)$ симметричен графику функции $f(x)$ относительно оси Oy; на чертеже 240 изображены графики функций

$$y=3x-x^3 \text{ и } y=-3x+x^3.$$

В. Если известен график функции $y=f(x)$, то график функции $y=f(x+c)$ получается переносом графика функции $y=f(x)$ по направлению оси Ox на расстояние $|c|$ вправо, если $c<0$, и влево, если $c>0$ (почему?).

Так, например, график косинусоиды $y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ может быть получен переносом влево на $\frac{\pi}{2}$ графика синусоиды $y=\sin x$ (черт. 241).

C. Графики функции $y=f(x)$ и $y=-f(x)$ симметричны относительно оси Ox (черт. 242).

D. График функции $y=f(x)+C$ получается переносом графика функции $y=f(x)$ вверх, если $C>0$, и вниз, если $C<0$.

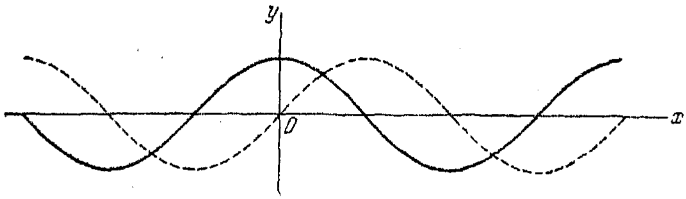
Пример:

$$y=\frac{2x+3}{1-x}=\frac{2x-2+5}{1-x}=-2+\frac{5}{1-x}=-2-\frac{5}{x-1}.$$

Значит, если мы построим гиперболу $y=-\frac{5}{x}$ (черт. 243), то график данной функции

$$y=\frac{2x+3}{1-x}$$

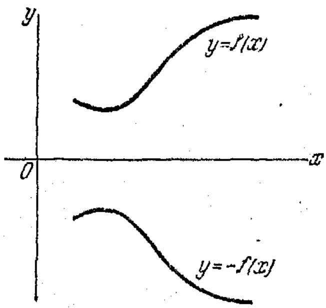
будет также гиперболой, полученной из данной переносом вправо



Черт. 241.

на 1 и вниз на -2, т. е. это будет гипербола с центром в точке $(1, -2)$: если за оси координат принять асимптоты, то её уравнение запишется так:

$$Y=-\frac{5}{X}.$$

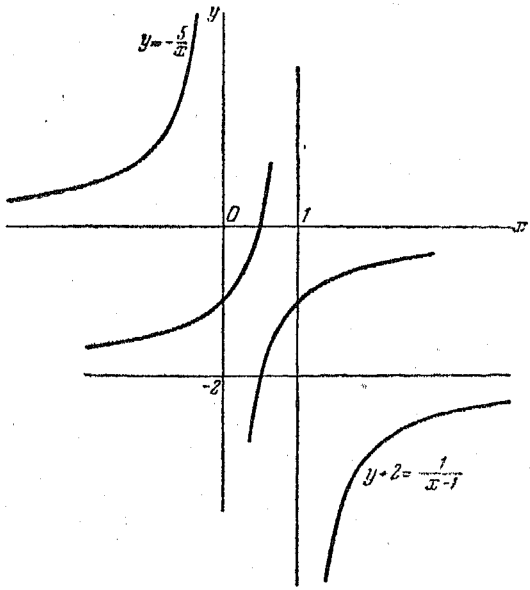


Черт. 242.

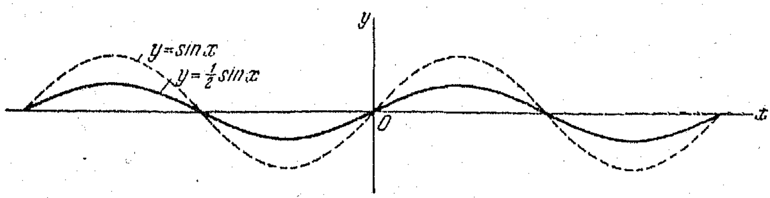
E. График функции $y=Cf(x)$ получим, если умножить на C все ординаты графика функции $y=f(x)$, т. е. произвести аффинное сжатие графика $y=f(x)$ к оси Ox. На чертеже 244 изображена синусоида $y=\sin x$ и линия $y=\frac{1}{2}\sin x$, полученная из неё сжатием к оси Ox с коэффициентом сжатия $\frac{1}{2}$.

F. График функции $y=f(kx)$ из графика функции $y=f(x)$ получается аффинным сжатием последнего к оси Oy с коэффициентом сжатия $\frac{1}{k}$.

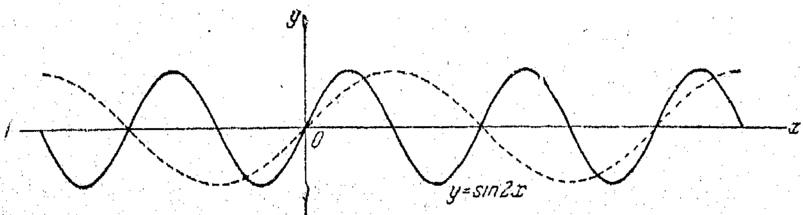
На чертеже 245 изображена синусоида $y=\sin x$ и линия $y=\sin 2x$, полученная сжатием синусоиды к оси Oy с коэффициентом сжатия $\frac{1}{2}$.



Черт. 243.



Черт. 244.



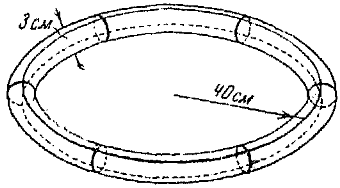
Черт. 245.

Наконец, в каждом конкретном примере можно применять и другие, самые разнообразные приёмы, перечислить которые, конечно, не представляется возможным ввиду их большого разнообразия.

§ 96. Непрерывные функции

Непрерывные функции составляют важнейший класс функций. Вместе с тем понятие непрерывности является одним из сложных. Предварительно рассмотрим следующий пример.

Предположим, что надо вычислить объём велосипедной камеры, «толщина» которой равна $a = 3$ *см*, а расстояние от центра симметрии O до «осевой окружности» равно $b = 40$ *см* (черт. 246). Объём вычисляется по формуле



Черт. 246.

$$v = 2\pi^2 ba^2.$$

Подставляя в эту формулу числовые данные, получим:

$$v = 720\,\pi^2 \text{ см}^3.$$

Однако на таком решении мы вряд ли остановимся. Мы заменим число π его приближённым значением: $\pi \approx 3$ или $\pi \approx 3{,}1$, или $\pi \approx 3{,}14$ и т. д. и, подставляя вместо π его приближённое значение в формулу $v = 720\,\pi^2$, найдём приближённые значения для объёма v: $v = 6480$ *см*^{3}, $v = 6919{,}2$ *см*^{3}, $v = 7098{,}912$ *см*^{3} и т. д. При этом мы уверены в том, что ошибка будет сколь угодно малой, т. е. приближение будет сколь угодно хорошим, при всех достаточно хороших приближениях числа π; эти соображения позволяют назвать функцию $v = 720\,x^2$ (при $x = \pi$) «непрерывной» (точное определение — см. ниже).

Возьмём ещё в качестве примера функцию Дирихле $\chi(x)$ и рассмотрим её значение при $x = \sqrt{2}$; по определению этой функции имеем:

$$\chi(\sqrt{2}) = 0.$$

Однако если возьмём приближённое значение для $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1{,}4; \quad \sqrt{2} = 1{,}41; \quad \sqrt{2} = 1{,}414; \ldots,$$

то будем иметь:

$$\chi(1{,}4) = 1, \quad \chi(1{,}41) = 1, \quad \chi(1{,}414) = 1, \ldots,$$

т. е. как бы мы ни улучшали приближение для x (речь идёт о десятичных приближениях!), мы будем в значении функции Дирихле при $x = \sqrt{2}$ допускать одну и ту же погрешность, равную 1. Здесь нельзя сказать, что ошибка в значении функции будет сколь угодно малой при всех достаточно точных приближениях аргумента; здесь мы имеем «разрывную» функцию. Точное определение непрерывности функции при значении аргумента $x=a$ таково:

Определение. *Функция $f(x)$ называется непрерывной при значении аргумента $x=a$, входящем в область её определения, если, каково бы ни было положительное число ε, найдётся такое положительное число δ, что при всех значениях аргумента, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству*

$$|x-a|<\delta,$$

имеет место неравенство

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Если число $|f(x)-f(a)|$ назвать «ошибкой» значения функции, а x назвать приближённым (к a) значением аргумента, то становится ясным, что в этом определении как раз и утверждается (в точных математических понятиях), что ошибка значения функции $f(x)$ будет сколь угодно малой (т. е. $<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$) при всех достаточно хороших приближениях аргумента x из области определения функции $f(x)$ ($|x-a|<\delta$).

Разрывность функции $f(x)$ при $x=a$ формулируется так: *функция $f(x)$ разрывна при значении аргумента $x=a$, входящем в область её определения, если существует такое положительное число ε, что, каково бы ни было положительное число δ, найдётся такое значение x_0 из области определения функции $f(x)$, что $|x_0-a|<\delta$, но*

$$|f(x_0)-f(a)|\geqslant\varepsilon.$$

Грубо говоря, функция $f(x)$ называется разрывной при $x=a$, если найдётся такое положительное число ε, что среди всех значений x (из области определения функции $f(x)$), сколь угодно близких к a, найдутся такие значения x_0, которые будут давать приближения к функции $f(x)$ с ошибкой, большей или равной ε.

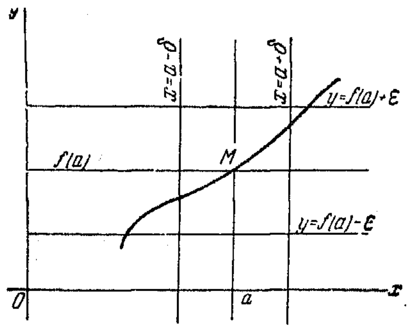
Определение непрерывности геометрически означает, что если провести две л ю б ы е параллельные оси Ox прямые на равных расстояниях от точки M (на расстояниях, равных ε), то найдётся такая пара прямых, параллельных оси Oy и также равноотстоящих от точки M (на расстояниях, равных δ), что все точки графика, расположенные между этими двумя прямыми, расположены и между двумя первыми параллелями (черт. 247).

Если мы уменьшим расстояние между первой парой прямых, то возможно, что придётся уменьшить расстояние и между прямыми второй пары.

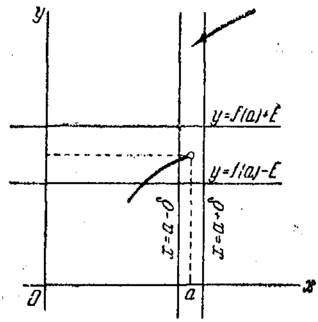
Для «разрывного» графика это условие не выполняется: на чертеже 248 дан график, «разрывный» в точке M. Здесь найдётся такая пара прямых, параллельных оси Ox и равноотстоящих от точки

M, что, какова бы ни была пара прямых, параллельных оси Oy и равноотстоящих от точки M, всегда найдётся точка графика, лежащая вне полосы, ограниченной первыми двумя параллелями (черт. 248).

Теорема. *Если абсолютную величину разности между $f(x)$ и $f(a)$, т. е. $|f(x)-f(a)|$, можно представить в виде $|x-a|\,|\varphi(x)|$, где $\varphi(x)$ — функция, ограниченная в окрестности точки $x=a$, то функция $f(x)$ непрерывна при $x=a$.*



Черт. 247.



Черт. 248.

В самом деле: существует такое число $\delta_1>0$ и такое число $K>0$, что при всех x из области определения функции $f(x)$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta_1$, будем иметь:

$$|\varphi(x)|<K.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Обозначим через δ наименьшее из двух чисел

$$\delta_1 \text{ и } \frac{\varepsilon}{K}.$$

Тогда при

$$|x-a|<\delta$$

получим:

$$|x-a|<\delta_1 \quad \text{и} \quad |x-a|<\frac{\varepsilon}{K};$$

но при $|x-a|<\delta_1$ имеем $|\varphi(x)|<K$. Перемножая неравенства

$$|x-a|<\frac{\varepsilon}{K},$$

$$|\varphi(x)|<K,$$

получим:

$$|x-a|\,|\varphi(x)|<\varepsilon$$

или

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Пример 1. $y=x^2$.

Докажем, что эта функция непрерывна при любом значении $x=a$. Для этого находим:

$$|f(x)-f(a)|=|x^2-a^2|=|x-a|\cdot|x+a|.$$

Докажем, что функция $x+a$ ограничена в окрестности точки $x=a$ (это и есть функция $\varphi(x)$, о которой упоминалось в теореме). Функция $\varphi(x)$ ограничена в любом интервале $(a-\delta,\ a+\delta)$. Например, возьмём окрестность радиуса 1 числа $x=a$:

$$|x-a|<1.$$

Тогда и подавно

$$\big||x|-|a|\big|<1,$$

откуда

$$|x|<1+|a|$$

и значит

$$|\varphi(x)|=|x+a|\leqslant|x|+|a|<1+2|a|.$$

Если мы возьмём любое положительное число ε и обозначим через δ наименьшее из двух чисел

$$1 \text{ и } \frac{\varepsilon}{1+2|a|},$$

то при

$$|x-a|<\delta$$

будем иметь:

$$|x^2-a^2|<\varepsilon.$$

Пример 2. $y=\sqrt{x}$. Эта функция также непрерывна при любом значении аргумента из области её определения. В самом деле: пусть $x=a$ — любое число, большее или равное нулю. Предположим сначала, что $a>0$. Находим:

$$|f(x)-f(a)|=|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=|x-a|\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}.$$

Теперь достаточно доказать ограниченность функции

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

в окрестности $x=a$, но это очевидно:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Значит, если мы возьмём произвольное положительное число ε, то при всех неотрицательных значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\varepsilon\sqrt{a}$, будем иметь:

$$|x-a|\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\varepsilon\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}$$

или

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon.$$

Если $a=0$, то надо доказать выполнимость неравенства $|\sqrt{x}|<\varepsilon$ или $\sqrt{x}<\varepsilon$ при всех неотрицательных значениях x из некоторой окрестности нуля. Неравенство $\sqrt{x}<\varepsilon$ будет выполнено, если $0<x<\varepsilon^2$, т. е. при неотрицательных значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| < \varepsilon^2$, будем иметь $|\sqrt{x}| < \varepsilon$, так что и при $x = 0$ функция $\sqrt{x}$ непрерывна.

Пример 3. Докажем, что функция $y = \sin x$ непрерывна при любом значении $x = a$.

В самом деле:

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x+a}{2}\right|$$

и так как

$$\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant \frac{|x-a|}{2}, \quad \left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \leqslant 1,$$

то

$$|\sin x - \sin a| \leqslant |x-a|.$$

Поэтому, если взять любое положительное число ε и положить $\delta = \varepsilon$, то из неравенства $|x-a| < \delta$ (т. е. $|x-a| < \varepsilon$) будет следовать неравенство

$$|\sin x - \sin a| < \varepsilon.$$

Пример 4. Докажем, что функция

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

непрерывна при любом значении $x = a$.

Находим:

$$\left|\frac{x}{1+x^2} - \frac{a}{1+a^2}\right| = \frac{|x-a|\,|ax-1|}{(x^2+1)(a^2+1)},$$

и вопрос сводится к доказательству ограниченности функции

$$\frac{ax-1}{(x^2+1)(a^2+1)}$$

в окрестности точки $x = a$. Прежде всего заметим, что

$$\frac{1}{1+x^2} < 1, \quad \frac{1}{a^2+1} < 1,$$

так что

$$\frac{|ax-1|}{(x^2+1)(a^2+1)} < |ax-1|,$$

и если мы докажем, что функция $ax-1$ ограничена в окрестности $x = a$, то будет доказана и ограниченность функции

$$\frac{ax-1}{(x^2+1)\,(a^2+1)}$$

в этой окрестности.

Нетрудно видеть, что функция $ax-1$ ограничена в любой окрестности $x = a$. Возьмём, например, окрестность радиуса 1; если $|x-a| < 1$, то $||x|-|a|| < 1$, значит

$$|x| < 1 + |a|$$

и, следовательно,

$$|ax-1| \leqslant |a| \cdot |x| + 1 < |a|(1+|a|) + 1.$$

Если ε — произвольное положительное число, а δ — наименьшее из двух чисел

$$1 \text{ и } \frac{\varepsilon}{|a|(1+|a|)+1},$$

то из условия $|x-a|<\delta$ будет следовать:

$$\left|\frac{x}{1+x^2}-\frac{a}{1+a^2}\right|<\varepsilon.$$

Пример 5. Докажем, что функция

$$y=\frac{1}{x}$$

непрерывна при любом значении $x=a\neq 0$. Находим:

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=|x-a|\,\frac{1}{|x|\,|a|},$$

и вопрос сводится к доказательству ограниченности функции

$$\frac{1}{|x|\,|a|}$$

в окрестности

$$x=a\neq 0.$$

Для доказательства возьмём окрестность числа a радиуса $\frac{|a|}{2}$:

$$|x-a|<\frac{|a|}{2};$$

тогда и подавно

$$||x|-|a||<\frac{|a|}{2},$$

откуда

$$-\frac{|a|}{2}<|x|-|a|<\frac{|a|}{2}$$

или

$$\frac{|a|}{2}<|x|<\frac{3|a|}{2},$$

значит $\frac{1}{|x|}<\frac{2}{|a|}$ и, следовательно, $\frac{1}{|x|\,|a|}<\frac{2}{|a|^2}$. Итак, если мы возьмём любое положительное число ε и выберем число δ наименьшим из двух чисел

$$\frac{|a|}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\varepsilon a^2}{2},$$

то из неравенства $|x-a|<\delta$ будет следовать:

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|<\varepsilon.$$

Пример 6. Рассмотрим функцию, определяемую так: $f(x)=C$ (C — число) при любом действительном значении x. Графиком этой функции является прямая $y=C$, параллельная оси Ox (если $C\neq 0$) или совпадающая с осью Ox (если $C=0$). Эта функция непрерывна при любом значении $x=a$. В самом деле:

$$f(x)=C,$$
$$f(a)=C,$$
$$|f(x)-f(a)|=0,$$

и значит, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, неравенство

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

будет выполнено при всех x, а значит и при всех x, входящих в любую δ-окрестность точки $a: |x - a| < \delta$, где δ — любое положительное число.

Пример 7. Докажем, что функция

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

разрывна при $x = 0$. Возьмём число $\varepsilon = 1$ и докажем, что в любой δ-окрестности числа $x = 0$ (т. е. при $|x| < \delta$) найдётся значение x_0, такое, что $\left|\frac{1}{x_0}\right| > 1$.

Пусть x_0 — положительное число, меньшее двух положительных чисел δ_0 и 1; тогда $|x_0| < \delta$, $|x_0| < 1$ и значит (из последнего неравенства!) $\left|\frac{1}{x_0}\right| > 1$. Итак, мы нашли значение x_0, такое, что $|x_0| < \delta$, в то время как $\left|\frac{1}{x_0}\right| > 1$.

Пример 8. Докажем, что функция

$$y = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

разрывна при $x = 0$. Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и любое положительное число δ. Заметим, что при значении

$$x = \frac{2}{\pi(2k+1)}$$

(где k — любое целое число) значение $\left|\sin\frac{1}{x}\right|$ равно $+1$, так как при этом значении x имеем:

$$\sin\frac{1}{x} = \sin\frac{\pi(2k+1)}{2} = \pm 1.$$

Возьмём k столь большим, чтобы дробь

$$\frac{2}{\pi(2k+1)}$$

стала меньшей δ:

$$\frac{2}{\pi(2k+1)} < \delta$$

$\left(\text{для этого надо взять } k > \frac{1}{\delta\pi} - \frac{1}{2}\right)$.

При таком значении k будем иметь:

$$|x| < \delta \left(\text{где } x = \frac{2}{\pi(2k+1)}\right);$$

но

$$|f(x)-f(0)|=\left|\sin\frac{1}{x}\right|=1>\frac{1}{2},$$

и значит разрывность данной функции в точке $x=0$ установлена.

Пример 9. Докажем, что функция

$$y=\begin{cases} x, & \text{если } x>0,\\ 2-x, & \text{если } x\leqslant 0,\end{cases}$$

разрывна при $x=0$. Возьмём $\varepsilon=1$ и любое $\delta>0$. При $x=0$ значение функции равно 2:

$$f(0)=2.$$

Имеем:

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)-2|.$$

Возьмём $x=x_0$ равным положительному числу, меньшему чем δ и чем 1:

$$0<x_0<\delta \quad \text{и} \quad 0<x_0<1.$$

Так как $x_0>0$, то

$$|f(x_0)-f(0)|=|f(x_0)-2|=|x_0-2|=|2-x_0|=2-x_0;$$

с другой стороны, из неравенств $0<x_0<1$ следует, что $2-x_0>1$, значит

$$|f(x_0)-f(0)|>1.$$

Итак, мы показали, что каково бы ни было δ, найдётся x_0, такое, что $|x_0|<\delta$, но $|f(x_0)-f(0)|>1$. Этим доказана разрывность функции $f(x)$ при $x=0$.

Замечание. Доказательству разрывности функции иногда помогают геометрические соображения: если удаётся найти такую полосу, ограниченную двумя прямыми, параллельными оси Ox и равноотстоящими от исследуемой точки M графика, из которой будут выходить точки графика, расположенные между двумя любыми прямыми, параллельными оси Oy и равноотстоящими от точки M, то функция $f(x)$ разрывна при рассматриваемом значении x.

Упражнения

218. Доказать непрерывность следующих функций (при значении аргумента, равном любому действительному числу).

1) $y=2x+1$; 2) $y=1-5x$; 3) $y=\cos x$; 4) $y=x^3$; 5) $y=2x-x^2$.

219. Доказать, что функция $\sqrt{1-x^2}$ непрерывна в любой точке сегмента $[-1, 1]$.

220. Доказать, что функция

$$y=E(x) \qquad \text{(см. упражнение 176)}$$

разрывна при значении аргумента, равном целому числу.

221. Доказать, что функция

$$y=\begin{cases} 2x+5, & \text{если } x<1,\\ x^2, & \text{если } x\geqslant 1,\end{cases}$$

разрывна при $x=1$. Построить её график.

222. Доказать, что, каково бы ни было число k, функция

$$y=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ k, & \text{если } x=0,\end{cases}$$

разрывна при $x=0$.

§ 97. Теоремы о непрерывных функциях

Задача о доказательстве непрерывности функции является, вообще говоря, сложной. Она значительно упрощается приводимыми ниже теоремами.

Теорема 1. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке $x=a$, то и их сумма непрерывна в той же точке $x=a$.*

Доказательство. Возьмём любое положительное число ε. Тогда найдётся такое положительное число δ, что будет выполнено неравенство

$$|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta_1;$$

точно так же в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке $x=a$ найдётся такое положительное число δ_2, что будет выполнено неравенство

$$|\varphi(x)-\varphi(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

при всех x, входящих в область определения функции $\varphi(x)$ и удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta_2;$$

значит будет выполнено и неравенство

$$\begin{aligned}|f(x)+\varphi(x)-(f(a)+\varphi(a))|&=\\ =|(f(x)-f(a))+(\varphi(x)-\varphi(a))|&\leqslant\\ \leqslant|f(x)-f(a)|+|\varphi(x)-\varphi(a)|&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

при всех x, входящих в область определения функции $f(x)+\varphi(x)$ и удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta,$$

где δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, то произведение $Cf(x)$, где C — любое число, есть также функция, непрерывная в той же точке $x=a$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $C\neq 0$. Так как

$$|Cf(x)-Cf(a)|=|C||f(x)-f(a)|,$$

то для выполнения неравенства

$$|Cf(x)-Cf(a)|<\varepsilon$$

достаточно, чтобы было выполнено неравенство

$$|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{|C|}.$$

Это неравенство в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке $x=a$ будет выполнено при всех x из области определения функции $f(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta,$$

где δ — некоторое положительное число.

Если $C=0$, то $|Cf(x)-Cf(a)|=0$, и значит неравенство $|Cf(x)-Cf(a)|<\varepsilon$ будет выполнено при всех x из области определения функции $f(x)$, входящих в любую δ-окрестность точки $x=a$: $|x-a|<\delta$, где δ — любое положительное число.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, то она ограничена в окрестности этой точки.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ — любое положительное число. Тогда найдётся такое положительное число δ, что при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta,$$

будем иметь:

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon,$$

$$-\varepsilon<f(x)-f(a)<\varepsilon,$$

или

$$f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon.$$

Теорема 4. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке $x=a$, то и их произведение $f(x)\,\varphi(x)$ есть функция, непрерывная в той же точке $x=a$.*

Доказательство. Рассмотрим следующее соотношение:

$$\begin{aligned}|f(x)\varphi(x)-f(a)\varphi(a)|&=\\ &=|f(x)\varphi(x)-f(x)\varphi(a)+f(x)\varphi(a)-f(a)\varphi(a)|=\\ &=|f(x)[\varphi(x)-\varphi(a)]+\varphi(a)[f(x)-f(a)]|\leqslant\\ &\leqslant|f(x)||\varphi(x)-\varphi(a)|+|\varphi(a)||f(x)-f(a)|.\end{aligned}$$

Функция $f(x)$ ограничена (на основании предыдущей теоремы):

$$|f(x)|<K,$$

в некоторой окрестности

$$|x-a|<\delta_1$$

точки $x=a$. В силу непрерывности функции $\varphi(x)$ найдётся такая окрестность точки $x=a$:

$$|x-a|<\delta_2,$$

в которой выполняется неравенство

$$|\varphi(x)-\varphi(a)|<\frac{\varepsilon}{2K}.$$

Точно так же в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке $x=a$ будет выполнено неравенство

$$|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2|\varphi(a)|}$$

для всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta_3,$$

где δ_3 — некоторое положительное число.

Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_1, δ_2, δ_3, тогда при всех x из области определения функции $f(x)\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta,$$

будут выполнены все предыдущие неравенства, и значит

$$|f(x)\varphi(x)-f(a)\varphi(a)|<K\frac{\varepsilon}{2K}+|\varphi(a)|\frac{\varepsilon}{2|\varphi(a)|}=\varepsilon.$$

Замечание. Если $\varphi(a)=0$, то доказательство упрощается. Достаточно взять выше

$$|\varphi(x)-\varphi(a)|=|\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{K}.$$

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$ и если $f(a)\neq 0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ также непрерывна в точке $x=a$.*

Доказательство. Имеем:

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}\right|=\frac{|f(x)-f(a)|}{|f(x)||f(a)|}.$$

Возьмём положительное число

$$\varepsilon_1=\frac{|f(a)|}{2};$$

так как функция $f(x)$ непрерывна при $x=a$, то найдётся такое положительное число δ_1, что при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta_1,$$

будем иметь:

$$|f(x)-f(a)|<\frac{|f(a)|}{2},$$

откуда

$$\big||f(x)|-|f(a)|\big|<\frac{|f(a)|}{2}$$

или

$$-\frac{|f(a)|}{2} < \Big| |f(x)| - |f(a)| \Big| < \frac{|f(a)|}{2},$$

или

$$\frac{|f(a)|}{2} < |f(x)| < \frac{3|f(a)|}{2}.$$

Пусть ε — произвольное положительное число, тогда найдётся положительное число δ_2, такое, что

$$\Big| f(x) - f(a) \Big| < \frac{\varepsilon}{2} \Big| f(a) \Big|^2$$

при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству

$$|x - a| < \delta_2.$$

Значит, если через δ мы обозначим наименьшее из чисел δ_1 и δ_2, то при всех x, удовлетворяющих неравенству

$$|x - a| < \delta$$

и входящих в область определения функции $\frac{1}{f(x)}$ будем иметь:

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} \right| < \frac{\frac{\varepsilon}{2}|f(a)|^2}{|f(a)| \cdot \frac{|f(a)|}{2}}$$

(мы увеличили дробь: $\frac{|f(x)-f(a)|}{|f(x)|\,|f(a)|}$, подставив в числитель вместо $|f(x)-f(a)|$ большее число $\frac{\varepsilon}{2}\Big|f(a)\Big|^2$, а в знаменатель вместо $|f(x)|$ меньшее число $\frac{1}{2}\Big|f(a)\Big|$).

Теорема 6. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке $x = a$, причём $f(a) \neq 0$, то функция $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ также непрерывна в точке $x = a$.*

Эта теорема является следствием предыдущей теоремы и теоремы о произведении непрерывных функций, так как

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \varphi(x) \frac{1}{f(x)}.$$

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$ и если её значение $f(a)$ в этой точке положительно (отрицательно), то и все значения $f(x)$ в некоторой окрестности точки $x = a$ положительны (отрицательны).*

Доказательство. Предположим, что $f(a) > 0$. В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = a$ найдётся такое положительное число ε, что при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta,$$

будем иметь:

$$\left|f(x)-f(a)\right|<\frac{f(a)}{2}$$

($f(a)>0$, а поэтому $\frac{f(a)}{2}$ — положительное число) или

$$-\frac{f(a)}{2}<f(x)-f(a)<\frac{f(a)}{2},$$

или

$$\frac{f(a)}{2}<f(x)<\frac{3f(a)}{2},$$

т. е. значения функции $f(x)$ заключены между двумя положительными числами

$$\frac{1}{2}f(a) \text{ и } \frac{3}{2}f(a).$$

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$ и если $f(a)>C$ (или $f(a)<C$), то все значения функции в некоторой окрестности точки $x=a$ больше C (меньше C).*

Доказательство этой теоремы сводится к предыдущей, так как функция $f(x)-C$ удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы.

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, то в той же точке непрерывна функция $|f(x)|$.*

Доказательство. Так как $|f(x)-f(a)|\geqslant\left||f(x)|-|f(a)|\right|$, то неравенство $\left||f(x)|-|f(a)|\right|<\varepsilon$ выполняется и подавно, если выполняется неравенство

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Последнее же неравенство будет иметь место при всех x из некоторой окрестности точки $x=a$:

$$|x-a|<\delta,$$

входящих в область определения функции $f(x)$.

Теорема 10. *Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, а функция $z=\varphi(y)$ непрерывна в точке $y=f(a)$, то сложная функция $\varphi[f(x)]$ непрерывна в точке $x=a$* *).

Доказательство. Возьмём любое положительное число $\varepsilon>0$. Тогда найдётся такое число δ_1, что при всех y, входящих в область определения функции $\varphi(y)$ и удовлетворяющих неравенству

$$|y-f(a)|<\delta_1,$$

мы будем иметь:

$$\left|\varphi(y)-\varphi[f(a)]\right|<\varepsilon.$$

---

*) $x=a$ входит в область определения функции $f(x)$, а $y=f(a)$ входит в область определения функции $\varphi(y)$.

В силу же непрерывности функции $f(x)$ в точке $x=a$ найдётся такое положительное число δ_2, что при всех x из области определения функции $f(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta,$$

мы будем иметь:

$$|f(x)-f(a)|<\delta_1,$$

значит при всех x, удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta$$

и входящих в область определения функции $\varphi[f(x)]$, будем иметь:

$$|\varphi[f(x)]-\varphi[f(a)]|<\varepsilon,$$

так как

$$|f(x)-f(a)|<\delta_1.$$

Доказанная теорема называется часто теоремой о непрерывности сложной функции. Она приносит очень большое облегчение в доказательстве непрерывности различных функций (см. примеры ниже).

Пример 1. Функция $y=x^n$, где n — целое положительное число, непрерывна при любом значении $x=a$. В самом деле:

$$|x^n-a^n|=|x-a|\,|x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-1}|,$$

и доказательство сводится к установлению ограниченности функции $x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-1}$ в окрестности точки $x=a$ (доказать!).

Из непрерывности этой функции на основании теорем 1 и 2 следует непрерывность любого полинома

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$$

при любом значении $x=a$.

Пример 2. Функция $y=\sin x$ непрерывна при любом значении $x=a$, значит, например, функция

$$y=\sin(px^2+qx+r)$$

на основании теоремы о непрерывности сложной функции также непрерывна при любом $x=a$.

Пример 3. Отношение двух полиномов

$$f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$$

есть функция непрерывная при любом значении $x=a$, не являющемся корнем знаменателя (теорема 6).

Пример 4. Функция $y=\operatorname{tg} x$ непрерывна при любом $x=a$, входящем в область определения, так как

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},$$

функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны при любом значении $x=a$ и $\cos a\neq 0$ (иначе число a не входило бы в область определения функции $\operatorname{tg} x$).

Пример 5. Функция $y=\sqrt{x}$ непрерывна при любом значении $x=a\geqslant 0$ (доказать!). Функция $\sin x$ непрерывна при любом значении $x=a$. Значит функция $\sqrt{\sin x}$ непрерывна при всех x, для которых $\sin x \geqslant 0$, т. е. эта функция $\sqrt{\sin x}$ непрерывна при любом значении x из области её определения (множество отрезков $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$).

Пример 6. Функция $\cos^2\sqrt{x+x^2}$ непрерывна в любой точке своей области определения, так как её можно рассматривать как сложную функцию

$$y = x + x^2,\ z = \sqrt{y},\ w = \cos z,\ p = w^2;$$

каждая из этих функций непрерывна при любом значении аргумента из области её определения.

Упражнения

223. Доказать, что следующие функции непрерывны при любых значениях x из области определения:

$$1)\ \sin(x^2+1);\quad 2)\ \cos 3x + \operatorname{tg} 5x;\quad 3)\ \frac{x}{1+x^2};$$

$$4)\ \frac{1+x}{1-x};\quad 5)\ \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{\sin 4x}}.$$

224. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ разрывны в точке $x=a$. Может ли быть непрерывной в этой точке их сумма $f(x)+\varphi(x)$?

§ 98. Непрерывность функции справа и слева

В определении непрерывности функции $f(x)$ в точке $x=a$, данном в § 96, имеются в виду все значения аргумента x из области определения этой функции $f(x)$, входящие в некоторую δ-окрестность точки $x=a$. Если же в этом определении иметь в виду значения аргумента x, из области определения функции $f(x)$, входящие в некоторую правую (или левую) δ-окрестность точки $x=a$, то мы приходим к понятиям непрерывности функции в точке $x=a$ справа (или слева). Точные определения таковы:

Определения. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x=a$ справа, если, каково бы ни было положительное число ε, найдётся такое положительное число δ, что при всех x, удовлетворяющих неравенствам*

$$a \leqslant x < a+\delta$$

и входящих в область определения функции $f(x)$, имеет место неравенство

$$|f(x)-f(a)| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x=a$ слева, если, каково бы ни было положительное число ε, найдётся такое положительное число δ, что при всех x, удовлетворяющих неравенствам

$$a-\delta < x \leqslant a$$

и входящих в область определения функции $f(x)$, имеет место неравенство

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, то она непрерывна в этой точке справа и слева.*

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$ справа и слева, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство этих теорем не представляет затруднений, и мы их опускаем.

Пример. Функция

$$y=\begin{cases} x^2, \text{ если } x\geqslant 0, \\ 1-3x, \text{ если } x<0 \end{cases}$$

непрерывна справа в точке $x=0$, но разрывна слева от этой точки (постройте график). В самом деле: если $x\geqslant 0$, то $y=x^2$; далее $|x^2-0^2|=|x^2|$. Пусть ε — любое положительное число. Тогда неравенство $x^2<\varepsilon$ будет выполнено, если $0\leqslant x<\sqrt{\varepsilon}$. Итак, положив $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, мы можем утверждать, что при всех x, удовлетворяющих условию

$$0\leqslant x<\delta,$$

будем иметь $|x^2-0^2|<\varepsilon$, а это и означает, что данная функция непрерывна справа в точке $x=0$. Докажем, что та же функция разрывна слева в точке $x=0$. Возьмём, например, $\varepsilon=1$ и любое $\delta>0$. Возьмём любое число x_0, заключённое между $-\delta$ и 0:

$$-\delta<x_0<0;$$

тогда $f(x_0)=1-3x_0>1$ и так как $f(0)=0$, то и $f(x_0)-f(0)>1$ или $|f(x_0)-f(0)|>1$. Итак в любой левой окрестности $(-\delta, 0)$ точки $x=0$ найдётся число x_0, такое, что $|f(x_0)-f(0)|$ больше выбранного $\varepsilon=1$. Значит, данная функция разрывна слева в точке $x=0$.

Упражнения

225. Доказать, что функция $y=E(x)$ не является непрерывной ни при каком целом значении x, но является непрерывной справа от этих точек. Доказать, что $E(x)$ разрывна слева от этих точек.

226. Исследовать на непрерывность, непрерывность слева и непрерывность справа следующие функции:

1) $y=x-E(x)$ в точках $x=n$, n — любое целое число;

2) $y=\begin{cases} -x, \text{ если } x\leqslant 0 \\ 2x, \text{ если } x>0, \end{cases}$ в точке $x=0$,

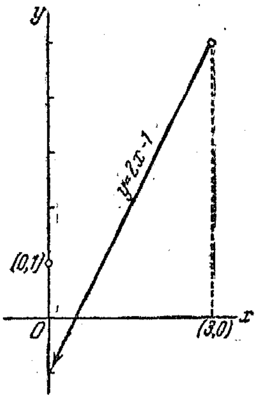
3) $y=\begin{cases} -x, \text{ если } x\leqslant 0, \\ x+1, \text{ если } x>0 \end{cases}$ в точке $x=0$,

4) $y=\begin{cases} x-1, \text{ если } x<1, \\ \frac{1}{2}x+2, \text{ если } x\geqslant 1 \end{cases}$ в точке $x=1$.

§ 99. Непрерывность функции в интервале и на сегменте

Определение. *Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве M, входящем в область её определения, если для любого числа a из множества M выполнено следующее условие: каково бы ни было положительное число ε, найдётся положительное число δ, такое, что будет выполнено неравенство $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ при всех x, входящих в множество M и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$.*

Замечание. В приведённом только что определении можно было не требовать того, чтобы значения аргумента x, удовлетворяющие неравенству $|x-a|<\delta$, входили бы во множество M, а потребовать только того, чтобы они входили в область определения функции $f(x)$. В таком случае естественно было бы сказать, что функция $f(x)$ непрерывна на множестве M относительно своей области определения.



Черт. 249.

В частности: *функция $f(x)$ называется непрерывной в интервале (a, b), если она определена на этом интервале и если она непревывна при любом значении $x=x_0$ из этого интервала.*

Функция $f(x)$ называется непрерывной на сегменте $[a, b]$, если она определена на этом сегменте, если она непрерывна при любом значении $x=x_0$, заключённом между a и b:

$$a<x_0<b,$$

и если она непрерывна в точке $x=a$ справа, а в точке $x=b$ слева.

Пример 1. Функция $y=2x$ непрерывна в любом интервале и на любом сегменте.

Пример 2. Функция

$$y=\begin{cases} 1, & \text{если } x=0, \\ 2x-1, & \text{если } 0\leqslant x<3 \end{cases}$$

непрерывна в интервале $(0, 3)$, но разрывна на сегменте $[0, 3]$, так как она разрывна в точке $x=0$ справа (черт. 249).

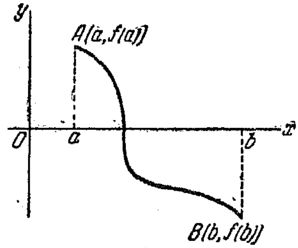
Приведём без доказательства ряд теорем о функциях, непрерывных на сегменте. Доказательства выходят из рамок настоящего курса. Мы дадим лишь ряд разъяснений, поясняющих необходимость тех или иных ограничений на функцию, наложенных в формулировках.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, а числа $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то внутри этого сег-*

мента найдётся по крайней мере одно значение аргумента $x=c$, при котором $f(x)$ обращается в нуль:

$$f(c)=0.$$

Геометрически это значит, что если точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ графика непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ расположены по разные стороны оси Ox, то этот график пересекает ось Ox хотя бы в одной точке (черт. 250).



Черт. 250.

Разъясним, сколь существенно условие непрерывности функции $f(x)$ на сегменте.

Пример 3. Рассмотрим функцию

$$y=\begin{cases} x+1, & \text{если } 1<x\leqslant 2, \\ -2, & \text{если } x=1; \end{cases}$$

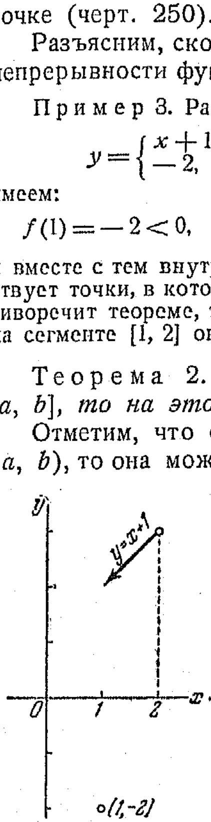
имеем:

$$f(1)=-2<0, \quad f(2)=2+1=3>0,$$

и вместе с тем внутри сегмента $[1, 2]$ не существует точки, в которой функция обращалась бы в нуль. Этот пример не противоречит теореме, так как данная функция непрерывна в интервале $(1, 2)$, но на сегменте $[1, 2]$ она разрывна, а именно, справа в точке $x=1$ (черт. 251).

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то на этом сегменте она ограничена.*

Отметим, что если функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), то она может быть и неограниченной в этом интервале.



Черт. 251.

Пример 4. Функция $y=\frac{1}{x}$ непрерывна в интервале $(0, 1)$. Возьмём любое число K. Пусть Q — положительное число больше чем 1 и чем K. Возьмём $x=\frac{1}{Q}$; тогда

$$y=Q>K, \quad 0<\frac{1}{Q}<1.$$

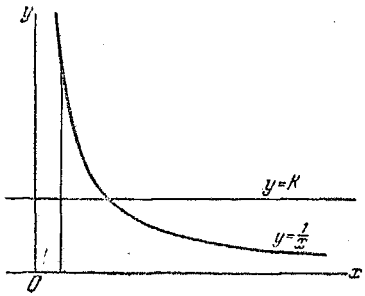
Итак, каково бы ни было число K, найдётся такое значение $x=\frac{1}{Q}$ из интервала $(0, 1)$, при котором значение функции больше K. Это значит, что данная функция неограничена в интервале $(0, 1)$. Геометрически дело заключается здесь в том, что уравнение $y=\frac{1}{x}$ определяет дугу гиперболы между её асимптотой $x=0$ (ось Oy) и прямой $x=1$ (черт. 252). Ясно, что, какое бы число мы ни взяли, мы всегда можем взять x достаточно близким к нулю, чтобы ордината гиперболы $y=\frac{1}{x}$ была бы больше выбранного числа, как бы велико оно ни было.

Теорема 3 (Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то на этом сегменте существуют по крайней* *мере две точки x_1 и x_2, такие, что $f(x_1)$ не меньше, а $f(x_2)$ не больше значений функции во всех точках сегмента, т. е.*

$$f(x_2) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1).$$

Эту теорему можно сформулировать и так: *если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она на этом сегменте имеет наибольшее значение $f(x)_1$ и наименьшее значение $f(x_2)$ в точках x_1 и x_2, принадлежащих сегменту $[a, b]$.*

Пример 5. Функция $y = \sin x$ непрерывна на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; на этом сегменте её наименьшее значение будет при $x = 0$:



Черт. 252.

$$\sin 0 = 0,$$

а наибольшее при $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Пример 6. Та же функция $\sin x$ непрерывна в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, но не имеет на этом интервале ни наименьшего ни наибольшего значения. В самом деле, пусть $x = x_0$ — любое число из этого интервала:

$$0 < x_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Возьмём два числа α и β, таких, что

$$0 < \alpha < x_0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$\sin \alpha < \sin x_0, \quad \sin \beta > \sin x_0,$$

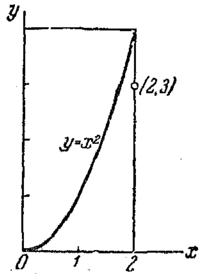
т. е. если мы возьмём из интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ любое число $x = x_0$, то найдутся такие другие значения аргумента α и β из этого интервала, что $\sin x$ при $x = \alpha$ будет меньше чем $\sin x_0$, а при $x = \beta$ больше чем $\sin x_0$. Значит $\sin x_0$ не есть ни наибольшее, ни наименьшее значение, но x_0 была любая точка интервала, значит $\sin x$ в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ не имеет наибольшего и не имеет наименьшего значений. Выше (пример 5), когда мы рассматривали сегмент $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, мы могли брать для аргумента x граничные значения $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$; в этих точках на этом сегменте значения функции $\sin x$ были соответственно наименьшим и наибольшим значениями. Когда же мы рассматриваем интервал $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то значения $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$ из него исключены, и если мы возьмём x_0 сколь угодно близким к левой границе этого интервала (т. е. к 0), то найдётся значение $x = \alpha$, ещё более близкое к 0, и при этом значении аргумента x значение $\sin x$ будет ещё меньше.

Если мы берём значение $x=x_0$ сколь угодно близким к правой границе $\left(\text{т. е. к } \frac{\pi}{2}\right)$, то найдётся значение $x=\beta$, ещё более близкое к $\frac{\pi}{2}$, при котором $\sin x$ будет иметь большее значение. Мы видим из этого примера, сколь существенно в теореме Вейерштрасса условие непрерывности функции на сегменте.

Пример 7. Функция

$$y=\begin{cases} x^2, & \text{если } 0 \leqslant x < 2, \\ 3, & \text{если } x=2 \end{cases}$$

(черт. 253) определена на сегменте $[0, 2]$ и непрерывна в интервале $(0, 2)$. На этом сегменте она не принимает наибольшего значения; как бы близко мы ни взяли точку x_0 к 2, найдётся другая точка, ещё более близкая к точке 2, и в ней значение функции будет ещё больше. В точке же $x=2$ значение функции будет не 4, а 3. В этой точке функция разрывна слева.



Черт. 253.

Теорема 4 (*Дарбу*). *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и в граничных точках $x=a$ и $x=b$ её значения различны:*

$$f(a) \neq f(b),$$

то эта функция на данном сегменте принимает любое промежуточное значение между $f(a)$ и $f(b)$, т. е. если c есть любое число, заключённое между $f(a)$ и $f(b)$, то внутри сегмента $[a, b]$ найдётся хотя бы одна точка $x=\xi$, в которой значение функции $f(x)$ равно c:

$$f(\xi)=c.$$

Доказательство. Предположим, что

$$f(a)<f(b);$$

возьмём любое число c, такое, что

$$f(a)<c<f(b).$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=f(x)-c.$$

Эта функция на сегменте $[a, b]$ непрерывна (почему?), причём в граничных точках её значения противоположных знаков:

$$\varphi(a)=f(a)-c<0,$$
$$\varphi(b)=f(b)-c>0;$$

значит найдётся хотя бы одно значение аргумента $x=\xi$ внутри сегмента $[a, b]$, т. е. $a<\xi<b$, при котором

$$\varphi(\xi)=0 \qquad \text{(см. теорему 1)}$$

или

$$f(\xi)-c=0,$$

или

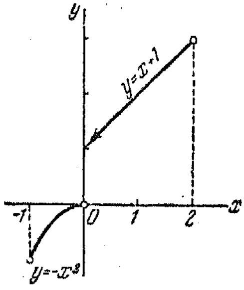
$$f(\xi)=c.$$

Пример 8. Функция $f(x)=x^2$ непрерывна на сегменте $[1, 5]$. В точке $x=1$ её значение равно 1; в точке $x=5$ её значение равно 25. Возьмём какое-нибудь число, заключённое между 1 и 25, например 19. Внутри сегмента $[1, 5]$ найдётся значение аргумента, при котором $f(\xi)=19$. Это значение:

$$\xi=\sqrt{19}.$$

Не все разрывные функции обладают свойством принимать все промежуточные значения.

Пример 9. Функция $\chi(x)$ Дирихле на любом сегменте принимает значения 0 и 1, но нигде не принимает ни одного промежуточного значения.



Черт. 254.

Пример 10. Функция

$$y=\begin{cases} -x^2, & \text{если } -1\leqslant x\leqslant 0, \\ x+1, & \text{если } 0<x\leqslant 2 \end{cases}$$

(черт. 254) на концах сегмента $[-1, 2]$ принимает значения

$$f(-1)=-(-1)^2=-1, \; f(2)=2+1=3.$$

Возьмём, например, $c=\frac{1}{2}$. Ясно, что $f(-1)<c<f(2)$, однако, на сегменте $[-1, 2]$ не найдётся точки ξ, в которой значение функции равно $\frac{1}{2}$. Данная функция разрывна при $x=0$; условие теоремы Дарбу не выполняется.

§ 100. Понятие о равномерной непрерывности

Определение. *Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на множестве M, входящем в область её определения, если, каково бы ни было положительное число ε, найдётся такое положительное число δ, что будет выполнено неравенство $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ для двух любых значений $x=x'$* и *$x=x''$, входящих в множество M и удовлетворяющих неравенству $|x'-x''|<\delta$.* В частности, *если функция $f(x)$ определена на сегменте, то она равномерно непрерывна на этом сегменте $[a, b]$, если, каково бы ни было положительное число ε, найдётся такое положительное число δ, что будет выполнено неравенство*

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon, \quad \textit{если} \quad |x'-x''|<\delta,$$

где x' и x'' — два любых значения аргумента x из сегмента $[a, b]$. Аналогично формулируется определение функции, равномерно непрерывной в интервале или полуинтервале. Ясно, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на сегменте $[a, b]$ или в интервале (a, b) (или полуинтервале $(a, b]$ или $[a, b)$), то она будет непрерывна в каждой точке сегмента $[a, b]$ (или интервала или полуинтервала), так как можно в неравенстве

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

зафиксировать одно из значений аргумента (например, $x''=a$), а другое значение x' брать из некоторой δ-окрестности фиксированного значения $x''=a$.

Обратное же положение верно для сегмента, но неверно для интервала и для полуинтервала, т. е. *если функция непрерывна в интервале, то она может и не быть равномерно непрерывной на этом интервале.*

Пример. Функция $y=\frac{1}{x}$ непрерывна в интервале $(0,1)$. Возьмём число $\varepsilon=1$ и любое число $\delta>0$. Пусть η — положительное число, меньшее чем δ и чем 1. Возьмём два значения для x: $x'=\eta$ и $x''=\frac{\eta}{2}$, тогда $|x'-x''|=\frac{\eta}{2}<\delta$, а с другой стороны, $|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{1}{\eta}-\frac{2}{\eta}\right|=\frac{1}{\eta}>1$, ибо $0<\eta<1$. Итак, мы доказали, что существует такое положительное число ε ($=1$), что, каково бы ни было положительное число δ, найдутся два таких значения $x=x'$ и $x=x''$ из интервала $(0,1)$, что $|f(x')-f(x'')|>\varepsilon$, а это и означает, что функция $f(x)$ не равномерно непрерывна в интервале $(0,1)$.

Для сегмента обратное положение, как мы указали, имеет место и оно составляет содержание теоремы Кантора:

Теорема (*Кантора*). *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте, то она на этом сегменте равномерно непрерывна.*

Иначе говоря, *если функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$, то для любого положительного числа ε найдётся такое положительное число δ, что при всех x' и x'' из сегмента $[a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x'-x''|<\delta$, будет выполнено неравенство*

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Доказательство этой теоремы выходит за рамки настоящего курса.

§ 101. Теорема о непрерывности обратной функции

Теорема. *Если функция $y=f(x)$ определена, непрерывна и возрастает (или убывает) на сегменте $[a, b]$, то обратная для неё функция $x=\varphi(y)$ определена, непрерывна и возрастает (или убывает) на сегменте $[f(a), f(b)]$.*

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ возрастает. Прежде всего заметим, что любое число y из сегмента $[f(a), f(b)]$ входит в область определения функции $x=\varphi(y)$, обратной для функции $f(x)$, так как по теореме Дарбу для любого y из сегмента $[f(a), f(b)]$:

$$f(a)\leqslant y\leqslant f(b),$$

найдётся на сегменте $[a, b]$ такое значение x, что

$$f(x)=y.$$

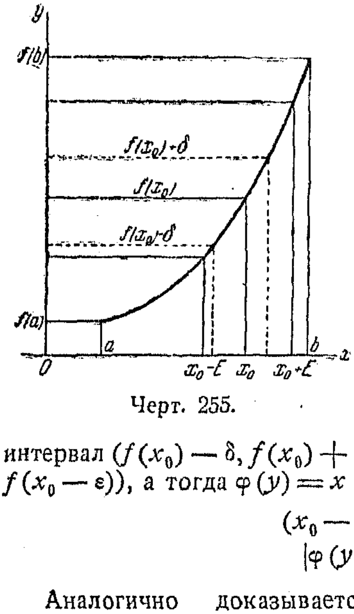
Значение x на сегменте $[a, b]$, при котором $f(x)=y$, единственно, так как $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ возрастает. Итак, возьмём любое число $y=y_0$ из сегмента $[f(a), f(b)]$. Рассмотрим тот случай, когда y_0 больше чем $f(a)$, но меньше чем $f(b)$:

$$f(a)<y_0<f(b).$$

Обозначим через x_0 то значение x из сегмента $[a, b]$, при котором $f(x_0)$ равно y_0:

$$f(x_0)=y_0$$

(такое значение x_0 существует и только одно); при этом $a<x_0<b$.



Черт. 255.

По определению обратной функции

$$x_0=\varphi(y_0).$$

Возьмём любое положительное число ε и рассмотрим два числа *):

$$f(x_0-\varepsilon) \text{ и } f(x_0+\varepsilon);$$

тогда $f(x_0-\varepsilon)<f(x_0)<f(x_0+\varepsilon)$ (почему?). Возьмём интервал $(f(x_0)-\delta, f(x_0)+\delta)$, входящий в интервал $(f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon))$; тогда при всех y, удовлетворяющих неравенству $|y-y_0|<\delta$, мы будем иметь

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon.$$

В самом деле: если $|y-y_0|<\delta$ или $|y-f(x_0)|<\delta$, т. е. число y входит в интервал $(f(x_0)-\delta, f(x_0)+\delta)$, то оно входит и в интервал $(f(x_0+\varepsilon), f(x_0-\varepsilon))$, а тогда $\varphi(y)=x$ входит в интервал

$$(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon), \text{ т. е.}$$

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon.$$

Аналогично доказывается непрерывность обратной функции $x=\varphi(y)$ в точке $y=f(a)$ справа и в точке $y=f(b)$ слева.

Для убывающих функций теорема доказывается аналогично.

На чертеже 255 дана геометрическая интерпретация проведённого доказательства.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y=x^2$ на полусегменте $[0, +\infty)$; обратной для неё на этом полусегменте будет функция $x=\sqrt{y}$, определённая на том же множестве $[0, +\infty)$ значений y. Докажем, что эта функция непрерывна при любом значении y из области её определения. Итак, пусть $y=y_0$ — любое неотрицательное число. Пусть $x=x_0$ — такое неотрицательное число, что $x_0^2=y_0$.

*) Если $x_0-\varepsilon$ или $x_0+\varepsilon$ выходят из рассматриваемого интервала (a, b), то мы возьмём другое $\varepsilon_1<\varepsilon$ столь малым, чтобы $x_0\pm\varepsilon_1$ входили бы в интервал (a, b); дальнейшие рассуждения не изменяются.

Рассмотрим сегмент $[0, N]$, внутри которого заключён x_0. Функция $y = x^2$ на сегменте $[0, N]$ удовлетворяет всем условиям доказанной теоремы, поэтому обратная функция $x = \sqrt{y}$ непрерывна при любом значении y. Сегменту $[0, N]$ значений аргумента x соответствует сегмент $[0, N^2]$ значений аргумента y. Число y_0 войдёт в этот сегмент, так как из соотношений $0 \leqslant x_0 < N$ следует $0 \leqslant x_0^2 < N^2$, т. е.

$$0 \leqslant y_0 < N^2.$$

Пример 2. Функция $\sin x$ возрастает и непрерывна на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Значит обратная для неё функция $x = \arcsin y$ возрастает и непрерывна на сегменте $[-1,1]$.

ГЛАВА XV

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 102. Определение предела функции в точке

Определение. *Пусть M — какое-нибудь множество чисел; число x_0 называется предельной точкой множества M, если в любой окрестности числа x_0 имеется бесконечное множество чисел, входящих в множество M.*

Число l называется пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$, являющейся предельной точкой области определения этой функции, если для любого положительного числа ε найдётся такое положительное число δ, что будет выполнено неравенство

$$|f(x)-l|<\varepsilon$$

при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$ *).

Если l есть предел функции в точке $x=a$, то пишут:

$$\lim_{x=a} f(x)=l.$$

Ясно, что *если предел функции $f(x)$ в точке $x=a$ равен значению функции $f(x)$ в этой точке:*

$$\lim_{x=a} f(x)=f(a),$$

то функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$. Обратно: *если функция $f(x)$ непрерывна в точке a и если эта точка $x=a$ является предельной точкой области определения функции $f(x)$, то предел функции $f(x)$ в точке $x=a$ равен значению функции $f(x)$ в точке $x=a$:*

$$\lim_{x=a} f(x)=f(a).$$

*) Обычно данное определение дополняют ещё условием $x\neq a$. Мы это ограничение снимаем.

Пример.

$$\lim_{x=a} \sin x = \sin a \quad \text{при любом } a,$$

$$\lim_{x=a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}, \quad \text{если} \quad a \neq 0,$$

$$\lim_{x=2} (x^2 + 5x + 6) = 2^2 + 5 \cdot 2 + 6 = 20 \text{ и т. д.}$$

Обращаем внимание читателя на то, что при определении непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = a$, мы требовали, чтобы в этой точке функция $f(x)$ была бы определена, но мы не требовали, чтобы точка $x = a$ была предельной точкой области определения, а при определении предела мы не требуем, чтобы функция $f(x)$ была бы определена при $x = a$, но требуем, чтобы эта точка была бы предельной точкой области определения функции $f(x)$. В дальнейшем мы часто будем встречаться именно с такого рода пределами. В этом случае иногда отысканию предела помогает следующее соображение.

Предположим, что в точке $x = a$ функция $f(x)$ не определена и что эта точка является предельной для области определения функции $f(x)$. Предположим, что можно построить другую функцию $\varphi(x)$, которая определена и непрерывна в точке $x = a$, причём область определения функции $f(x)$ входит в область определения $\varphi(x)$ и при всех x из области определения функции $f(x)$ имеем равенство $f(x) = \varphi(x)$; тогда предел функции $f(x)$ в точке $x = a$ равен значению функции $\varphi(x)$ в этой точке, т. е.

$$\lim_{x=a} f(x) = \varphi(a)$$

или

$$\lim_{x=a} f(x) = \lim_{x=a} \varphi(x).$$

Доказательство. Так как функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x = a$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, что будет выполнено неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon$$

при всех x из области определения функции $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|x - a| < \delta.$$

Значит те же неравенства будут выполнены и при всех x из области определения функции $f(x)$, так как эта область входит в область определения функции $\varphi(x)$. Но для области определения функции $f(x)$ имеем:

$$f(x) = \varphi(x),$$

значит неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon$$

принимает вид:

$$|f(x) - \varphi(a)| < \varepsilon,$$

и теорема доказана.

Пример 2.

$$\lim_{x=0}\frac{x^3}{x}=\lim_{x=0}x^2=0,$$

так как, 1) если $x\neq 0$, то

$$\frac{x^3}{x}=x^2;$$

2) в точке $x=0$ функция x^2 непрерывна и её значение при $x=0$ равно 0;

3) точка $x=0$ — предельная точка для области определения функции $\frac{x^3}{x}$.

Пример 3.

$$\lim_{x=0}\frac{(x+5)\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}=\lim_{x=0}(x+5)=5,$$

так как 1) в точках $x\neq k\pi$ (k — любое целое число) имеет место равенство

$$\frac{(x+5)\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}=x+5;$$

2) в точке $x=0$ функция $x+5$ непрерывна и её значение при $x=0$ равно 5;

3) точка $x=0$ — предельная точка для области определения функции $\frac{(x+5)\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}$.

Пример 4.

$$\lim_{x=0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x=0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x=0}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0,$$

так как 1) в точках $x\neq k\pi$ имеем:

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\operatorname{tg}\frac{x}{2};$$

2) функция $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ непрерывна в точке $x=0$ и её значение при $x=0$ равно 0;

3) точка $x=0$ — предельная для области определения данной функции.

Пример 5.

$$\lim_{x=2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim_{x=2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim_{x=2}(x-3)=-1.$$

Пример 6.

$$\lim_{x=1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x=1}\frac{2x^3-3x^2+1}{(1-x^3)(1-x^2)}=$$
$$=\lim_{x=1}\frac{(1-x)^2(2x+1)}{(1-x)(1+x+x^2)(1-x)(1+x)}=\lim_{x=1}\frac{2x+1}{(1+x+x^2)(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

Пример 7. Докажем, что предел $\lim_{x=0}\sin\frac{1}{x}$ не существует, т. е., каково бы ни было число l, найдётся такое положительное число ε, что для любого положительного числа δ можно указать такое число x_0, что $|x_0|<\delta$, но

$$\left|\sin\frac{1}{x_0}-l\right|\geqslant\varepsilon;$$

В самом деле: предположим сначала, что $l\neq 0$. Положим $\varepsilon=|l|$, возьмём любое число δ и выберем целое положительное число k, такое, чтобы $\frac{1}{k\pi}<\delta$; пусть $x_0=\frac{1}{k\pi}$; тогда $\sin\frac{1}{x_0}=\sin k\pi=0$, и значит

$$\left|\sin\frac{1}{x_0}-l\right|=|l|=\varepsilon.$$

Число 0 также не есть предел функции $\sin\frac{1}{x}$ в точке $x=0$, так как, выбирая $\varepsilon=1$ и $x_0=\frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}<\delta$, мы получим:

$$\left|\sin\frac{1}{x_0}-0\right|=1=\varepsilon.$$

Упражнения

227. Найти следующие пределы:

1) $\lim_{x=3}\frac{1}{x+2}$, 2) $\lim_{x=0}\sin x$, 3) $\lim_{x=\frac{\pi}{2}}\cos x$, 4) $\lim_{x=5}(x^2-5x+6)$.

228. Найти следующие пределы:

1) $\lim_{x=1}\frac{x^3-2x^2+3x-2}{x^2-3x+2}$;

2) $\lim_{h=0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$

(n — целое положительное число);

3) $\lim_{x=0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

4) $\lim_{x=0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{16+x^2}-4}$;

5) $\lim_{x=0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

229. Доказать, что если a — любое число, $\chi(x)$ — функция Дирихле, то

$$\lim_{x=a} \chi(a)$$

не существует.

230. Доказать, что

$$\lim_{x=a} E(x)$$

существует и равен $E(a)$, если a не есть целое число, и этот предел не существует, если a — целое число.

231. Существует ли предел

$$\lim_{x=0} \sqrt{x}\,?$$

232. Доказать, что

$$\lim_{x=0}\left(x \sin \frac{1}{x}\right) = 0.$$

233. Дано: 1) $\lim\limits_{x=a} f(x) = 0$,

2) Функция $\varphi(x)$ ограничена в окрестности точки $x = a$

можно ли утверждать, что

$$\lim_{x=a} [f(x)\varphi(x)] = 0?$$

§ 103. Обобщение понятия предела

В определении предела функции, данном в предыдущем параграфе, мы предполагали, что точка $x = a$ — предельная для области определения функции $f(x)$ и что берутся также все значения x из области определения функции $f(x)$, удовлетворяющие неравенству $|x - a| < \delta$. Вместо области определения можно говорить о произвольном множестве M, входящем в область определения функции $f(x)$, для которого точка $x = a$ — предельная. Тогда мы приходим к понятию предела функции $f(x)$ в точке $x = a$, предельной для множества M относительно этого множества.

Определение. *Число l называется пределом функции $f(x)$ относительно множества M в точке $x = a$, являющейся предельной точкой этого множества M, входящего в область определения функции $f(x)$, если для любого положительного числа ε найдётся такое положительное число δ, что будет выполнено неравенство*

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

при всех x, входящих в множество M и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$.

Например, предел функции Дирихле относительно множества всех рациональных чисел в любой рациональной точке равен 1. Предел функции Дирихле относительно множества всех иррациональных чисел в любой иррациональной точке равен 0.

В частности, если множество M есть интервал $(a, a + \delta)$, то мы приходим к понятию правого, а если M есть интервал $(a - \delta, a)$, то к понятию левого предела. Итак, *если точка $x=a$ — правая предельная точка области определения функции $f(x)$, (т. е. в любой правой окрестности точки $x=a$ имеется бесконечное множество точек из области определения функции $f(x)$), то правым пределом этой функции $f(x)$ в точке $x=a$ называется число l, обладающее следующим свойством: при любом $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$, что будет выполнено неравенство $|f(x)-l|<\varepsilon$ для всех x, входящих в область определения функции и удовлетворяющих неравенствам*

$$a<x<a+\delta.$$

Аналогично даётся определение левой предельной точки множества и левого предела функции.

Правый предел функции $f(x)$ в точке $x=a$ обозначается так:

$$\lim_{x=a+} f(x) \quad \text{или} \quad f(a+0),$$

а левый так:

$$\lim_{x=a-} f(x) \quad \text{или} \quad f(a-0).$$

Пример 1. Функция

$$y=\begin{cases} x, \text{ если } x>0, \\ \sin\frac{1}{x}, \text{ если } x<0 \end{cases}$$

имеет правый предел, равный 0 в точке $x=0$, но не имеет левого предела в той же точке.

Пример 2. Для функции $y=\sqrt{x}$ левый предел в точке $x=0$ не определён, не имеет смысла, так как эта точка не есть левая предельная точка области определения данной функции.

Пример 3. Функция $E(x)$ имеет в любой точке $x=a$ и правый и левый пределы. Если a не есть целое число, то правый предел $E(a+0)$ равен левому: $E(a-0)$, и оба они равны $E(a)$. Если же a — целое число, то правый предел равен a, а левый $a-1$.

§ 104. Бесконечные пределы

Определение. *Будем говорить, что предел функции $f(x)$ в точке $x=a$, предельной для области определения функции $f(x)$, равен $+\infty$, если, каково бы ни было число N, найдётся такое положительное число δ, что $f(x)>N$ при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$:*

$$\lim_{x=a} f(x)=+\infty.$$

Предел функции $f(x)$ в точке $x=a$, предельной для области её определения, равен $-\infty$, если, каково бы ни было число N, найдётся такое положительное число δ, что $f(x)<N$ при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta.$$

Все эти определения можно обобщить на случай произвольного множества M, входящего в область определения функции $f(x)$ и, в частности, ввести понятия правых и левых бесконечных пределов. Эти определения читатель без труда сформулирует самостоятельно.

Пример 1.

$$\lim_{x=0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Доказательство. Пусть N — любое число. Возьмём положительное число $Q > N$; тогда

$$\frac{1}{x^2} > Q,$$

если $x < \frac{1}{\sqrt{Q}}$. Итак, если $|x-0| < \delta$, т. е. $|x| < \frac{1}{\sqrt{Q}}$, то $x^2 < \frac{1}{Q}$, и значит

$$\frac{1}{x^2} > Q > N.$$

Пример 2. $\lim\limits_{x=0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Пример 3. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}} |\operatorname{tg} x| = +\infty$.

В самом деле: возьмём любое число N и положительное число $Q > N$. Ясно, что всегда можно построить такую окрестность числа $x = \frac{\pi}{2}$, что для всех точек этой окрестности (кроме, конечно, $x = \frac{\pi}{2}$, так как в этой точке $\operatorname{tg} x$ не определён) мы будем иметь $|\operatorname{tg} x| > Q > N$. Такую окрестность можно построить так: пусть α — угол первой четверти, для которого $\operatorname{tg}\alpha = Q$; тогда $\delta = \alpha$ и для $x \in \left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ мы будем иметь $|\operatorname{tg} x| > Q > N$.

Пример 4. Правый предел $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x$ равен $+\infty$ (доказать).

Пример 5. Левый предел $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x$ равен $-\infty$ (доказать).

Упражнения

234. Доказать, что $\lim\limits_{x=0} \frac{1}{x^4} = +\infty$.

235. Доказать, что $\lim\limits_{x=3} \frac{x^2+2x+2}{(x-3)^2} = +\infty$.

236. Доказать, что $\lim\limits_{x=0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

§ 105. Предел функции в точках $x=+\infty$ и $x=-\infty$

Определение. *Если область определения функции не ограничена сверху*), то число l называется пределом функции $f(x)$ в точке $+\infty$, если, каково бы ни было положительное число ε, найдётся такое число N, что $|f(x)-l|<\varepsilon$ при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $x>N$. Это мы будем записывать так:*

$$\lim_{x=+\infty} f(x)=l.$$

Если область определения функции $f(x)$ не ограничена снизу, то число l называется пределом функции $f(x)$ в точке $-\infty$, если, каково бы ни было положительное число ε, найдётся такое число N, что $|f(x)-l|<\varepsilon$ при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $x<N$:

$$\lim_{x=-\infty} f(x)=l.$$

Эти определения могут быть обобщены, если говорить не об области определения функции $f(x)$, а о произвольном множестве M (не ограниченном сверху и снизу), входящем в эту область.

Определение. *Если область определения функции $f(x)$ не ограничена сверху, то мы будем говорить, что предел функции $f(x)$ в точке $+\infty$ (или в точке $-\infty$) равен $+\infty$ и писать:*

$$\lim_{x=+\infty} f(x)=+\infty \quad (\text{или } \lim_{x=-\infty} f(x)=+\infty),$$

если, каково бы ни было число N, найдётся такое число P, что будет выполнено неравенство $f(x)>N$ при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $x>P$ (или соответственно $x<P$).

Если область определения функции $f(x)$ не ограничена снизу, то мы будем говорить, что предел функции $f(x)$ в точке $x=+\infty$ (или в точке $-\infty$) равен $-\infty$ и писать:

$$\lim_{x=+\infty} f(x)=-\infty \quad (\text{или } \lim_{x=-\infty} f(x)=-\infty),$$

если, каково бы ни было число N, найдётся такое число P, что будет выполнено неравенство $f(x)<N$ при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $x>P$ (или соответственно $x<P$).

Определения эти могут быть обобщены на случай произвольного множества M, входящего в область определения функции и соответственно не ограниченного сверху или снизу.

---

*) Множество M чисел называется ограниченным сверху, если существует число P, такое, что для всех $x \in M$ имеем: $x<P$. Множество M чисел называется ограниченным снизу, если существует число p, такое, что для всех $x \in M$ имеем: $x>p$. Множество M чисел называется ограниченным, если оно ограничено и сверху и снизу.

Пример 1. Докажем, что
$$\lim_{x=+\infty} \frac{1}{x}=0.$$
Прежде всего заметим, что область определения функции не ограничена сверху. Возьмём любое положительное число ε; тогда неравенство
$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$$
будет выполнено, если взять $x>\frac{1}{\varepsilon}$. Итак, полагая $N=\frac{1}{\varepsilon}$ при $x>N$, будем иметь неравенства $0<\frac{1}{x}<\varepsilon$, т. е. $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$.

Пример 2. Докажем, что
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x+3}=\frac{1}{2}.$$
Прежде всего заметим, что область определения данной функции не ограничена сверху. Далее составим модуль разности
$$\left|\frac{x+1}{2x+3}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2\,|2x+3|};$$
потребуем, чтобы эта дробь была $<\varepsilon$:
$$\frac{1}{2\,|2x+3|}<\varepsilon;$$
будем считать, что $x>0$, тогда $2x+3>0$, и последнее неравенство принимает вид:
$$\frac{1}{2(2x+3)}<\varepsilon,$$
откуда
$$2x+3>\frac{1}{2\varepsilon},\quad x>\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{3}{2}.$$
Итак, если N — наибольшее из двух чисел:
$$0 \text{ и } \frac{1}{4\varepsilon}-\frac{3}{2},$$
то при $x>N$ будут выполнены все предыдущие неравенства.

Пример 3. Докажем, что
$$\lim_{x=+\infty}\frac{10x+1}{x^2+x+1}=0.$$
Надо доказать, что для любого положительного числа ε найдётся такое число N, что
$$\left|\frac{10x+1}{x^2+x+1}\right|<\varepsilon$$
при всех $x>N$ (область определения данной функции — множество всех действительных чисел).

Предположим, что $x>1$; тогда
$$\left|\frac{10x+1}{x^2+x+1}\right|=\frac{10x+1}{x^2+x+1}=\frac{\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}<\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}<\frac{10}{x}+\frac{1}{x}=\frac{11}{x}.$$

Для того чтобы это выражение было $<\varepsilon$:

$$\frac{11}{x}<\varepsilon,$$

надо взять

$$x>\frac{11}{\varepsilon}.$$

Итак, если N — наибольшее из двух чисел 1 и $\frac{11}{\varepsilon}$, то все предыдущие неравенства выполнены при всех $x>N$.

Пример 4. Докажем, что предел

$$\lim_{x=+\infty} \sin x$$

не существует, т. е. что если l и N — любые числа, то найдётся такое положительное число ε и такое $x_0>N$, что

$$|\sin x_0 - l| \geqslant \varepsilon.$$

Предположим сначала, что $l\neq 0$ и возьмём $\varepsilon=|l|$, а x_0 выберем равным $k\pi$ (k — целое число), причём k возьмём столь большим, чтобы было выполнено неравенство $x_0=k\pi>N$, тогда $|\sin x_0 - l|=|\sin k\pi - l|=|l|=\varepsilon$. Если же $l=0$, то мы возьмём $\varepsilon=1$, а $x_0=\frac{2k+1}{2}\pi>N$, и тогда опять $|\sin x_0 - l|=1=\varepsilon$.

Пример 5. Докажем, что $\lim\limits_{x=+\infty} \sin x=0$ относительно множества $\{k\pi\}$ (k — принимает все целые значения).

В самом деле: это множество $\{k\pi\}$ входит в область определения функции $\sin x$ и оно не ограничено сверху. В точках этого множества $\sin x=\sin k\pi=0$, значит, каково бы ни было положительное число ε, неравенство $|\sin x|<\varepsilon$ будет выполнено при всех x, входящих в множество $\{k\pi\}$ и удовлетворяющих неравенству $x>N$, где N — любое число.

В самом деле: в точках множества M имеем:

$$|\sin x|=|\sin k\pi|=0<\varepsilon.$$

Пример 6. Докажем, что

$$\lim_{x=+\infty} \frac{x^2+1}{x}=+\infty,$$

т. е. если N — любое число, то найдётся такое число P, что

$$\frac{x^2+1}{x}>N$$

при всех $x>P$.

Будем считать, что $x>0$; тогда

$$\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}>x.$$

Итак, если мы возьмём число P, равное наибольшему из двух чисел 0 и N, то при $x>P$ мы будем иметь:

$$\frac{x^2+1}{x}>N,$$

т. е.

$$\lim_{x=+\infty} \frac{x^2+1}{x}=+\infty.$$

Пример 7. Докажем, что

$$\lim_{x=+\infty}\left|\frac{x}{\sin x}\right|=+\infty,$$

т. е. что если N — любое число, то найдётся такое число P, что

$$\left|\frac{x}{\sin x}\right|>N$$

при всех x, входящих в область определения функции $\frac{x}{\sin x}$ и удовлетворяющих неравенству $x>P$.

В самом деле:

$$\left|\frac{x}{\sin x}\right|\geqslant x$$

для всех x из области определения функции $\frac{x}{\sin x}$. Возьмём любое положительное число P, большее N, и пусть $x>P$; тогда $\left|\frac{x}{\sin x}\right|>P>N$ при всех x из области определения функции $\frac{x}{\sin x}$.

Упражнения

237. Доказать, что

$$1)\ \lim_{x=-\infty}\frac{x}{x+1}=1;\qquad 2)\ \lim_{x=+\infty}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}.$$

238. Доказать, что пределы

$$\lim_{x=+\infty}\operatorname{tg}x \text{ и } \lim_{x=-\infty}\operatorname{tg}x$$

не существуют.

239. Доказать, что

$$1)\ \lim_{x=-\infty}\frac{x^2+1}{x}=-\infty;\qquad 2)\ \lim_{x=+\infty}\frac{x^2+6x-5}{8x^2+9x+100}=\frac{1}{8};$$

$$3)\ \lim_{x=-\infty}\frac{x^2+1}{x^3+3}=0;\qquad 4)\ \lim_{x=-\infty}\frac{x^4+2}{x-1}=-\infty.$$

240. Найти следующие пределы:

$$1)\ \lim_{x=+\infty}\sin\frac{1}{x};\quad 2)\ \lim_{x=+\infty}\frac{\sin x}{x}.$$

§ 106. Теоремы о пределах

В этом параграфе будут доказаны некоторые теоремы о пределах функций в точке. Мы проведём доказательство только для того случая, когда имеются пределы вида

$$\lim_{x=a}f(x)=l,$$

где a и l — числа. Случаи бесконечных пределов, а также пределов в точках $x=+\infty$ и $x=-\infty$ предлагается читателю разобрать самостоятельно (см. упражнения в конце этого параграфа). Доказательства по существу не меняются, лишь несколько приходится изменить характер рассуждений.

Теорема 1. *Если число l есть предел функции $f(x)$ в точке $x=a$, то любое другое число $c \neq l$ не является пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$* *).

Доказательство. Число c не есть предел функции $f(x)$ в точке $x=a$, если существует такое $\varepsilon>0$, что для любого $\delta>0$ найдётся такое значение x_0, входящее в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющее неравенству $|x_0-a|<\delta$, для которого $|f(x)-c| \geqslant \varepsilon$. Возьмём $\varepsilon>0$ таким, чтобы число l не вошло в интервал $(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon)$, а затем возьмём $\varepsilon'>0$ таким, чтобы интервалы $(l-\varepsilon',\ l+\varepsilon')$ и $(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon)$ не имели бы общих точек. Так как предел функции $f(x)$ в точке $x=a$ равен l, то найдётся такое $\delta'>0$, что при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta'$, мы будем иметь $|f(x)-l|<\varepsilon'$, т. е. все значения функции $f(x)$ попадут в интервал $(l-\varepsilon',\ l+\varepsilon')$, а значит выйдут из интервала $(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon)$, т. е. $|f(x)-c|>\varepsilon$ при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta'$. Если δ — любое положительное число, то, конечно, не для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, мы будем иметь $|f(x)-c|>\varepsilon$, но, конечно, в любой δ-окрестности точки $x=a$ значения $x=x_0$, для которых $|f(x_0)-c|>\varepsilon$, найдутся, ибо $x=a$ — предельная точка области определения функции $f(x)$.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ имеет одно и то же числовое значение:*

$$f(x)=c \quad \textit{при всех } x,$$

то и предел её в любой точке $x=a$ также равен c.

Доказательство. $|f(x)-c|=|c-c|=0$, значит неравенство $|f(x)-c|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, будет выполнено, если $|x-a|<\delta$, где δ — любое положительное число.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ в точке $x=a$ имеет предел, равный l, то её модуль, т. е. $|f(x)|$, в той же точке $x=a$ имеет предел, равный $|l|$:*

$$\textit{если } \lim_{x=a} f(x)=l, \textit{ то } \lim_{x=a} |f(x)|=|l|.$$

Доказательство. Пусть дано любое положительное число ε; тогда найдётся такое положительное число δ, что $|f(x)-l|<\varepsilon$ при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$. Но $||f(x)|-|l|| \leqslant |f(x)-l|$, значит и подавно

$$||f(x)|-|l||<\varepsilon.$$

*) Эту теорему часто формулируют так: функция $f(x)$ в точке $x=a$ не может иметь более одного предела.

Замечание. Обратная теорема не верна.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ -1, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

Здесь $\lim\limits_{x=a} |f(x)| = 1$ (на основании теоремы 2), а $\lim\limits_{x=a} f(x)$ не существует (почему?).

Теорема 4. *Если в точке $x = a$ функция $f(x)$ имеет пределом положительное число l, то все значения функции $f(x)$ в некоторой окрестности числа $x = a$ положительны.*

Доказательство. Пусть $l > 0$. Возьмём $\varepsilon = \frac{l}{2}$. Найдётся такое число $\delta > 0$, что при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, мы будем иметь: $|f(x) - l| < \frac{l}{2}$, или $-\frac{l}{2} < f(x) - l < \frac{l}{2}$, откуда $\frac{l}{2} < f(x) < \frac{3l}{2}$ и так как $l > 0$, то и $f(x) > 0$.

Следствие. Если в точке a предел функции $f(x)$ равен l и если в любой окрестности точки a имеются такие значения x, в которых функция $f(x)$ отрицательна, то $l \leqslant 0$.

В самом деле: предполагая, что $l > 0$, мы на основании доказанной теоремы можем утверждать, что в некоторой окрестности точки $x = a$ все значения функции $f(x)$ положительны, а это противоречит условию.

Теорема 5. *Если в точке $x = a$ функция $f(x)$ имеет пределом отрицательное число l, то все значения функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки $x = a$ отрицательны.*

Эта теорема доказывается аналогично предыдущей.

Следствие. Если в точке $x = a$ предел функции $f(x)$ равен l и если в любой окрестности точки $x = a$ имеются значения x, в которых функция $f(x)$ положительна, то $l \geqslant 0$.

Теорема 6. *Если в точке $x = a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы, соответственно равные l и λ, и если $l < \lambda$, то в некоторой окрестности точки $x = a$ имеет место неравенство*

$$f(x) < \varphi(x)$$

при всех x, входящих в области определения этих функций *).

Доказательство. Возьмём два интервала $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ и $(\lambda - \varepsilon', \lambda + \varepsilon')$ без общих точек. Найдётся такое положительное число δ_1, что при всех x из области определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta_1$ мы будем иметь:

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

*) Таких значений x может и не быть.

и найдётся такое положительное число δ_2, что при всех x, $|x-a|<\delta_2$ из области определения функции $\varphi(x)$ мы будем иметь:

$$|\varphi(x)-\lambda|<\varepsilon'.$$

Пусть теперь δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2; тогда при $|x-a|<\delta$ будут выполнены оба неравенства. Если при этом в δ-окрестности точки $x=a$ есть значения x, принадлежащие областям определения обеих функций, то при любом таком значении x будем иметь:

$$l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon,$$

$$\lambda-\varepsilon'<\varphi(x)<\lambda+\varepsilon',$$

значит

$$f(x)<\varphi(x),$$

(так как $l+\varepsilon<\lambda-\varepsilon'$).

Следствие. Если в точке $x=a$ имеются пределы функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, соответственно равные l и λ, и если в любой окрестности точки $x=a$ найдутся значения x, при которых $f(x)<\varphi(x)$, то $l\leqslant\lambda$.

В самом деле: предполагая, что $l>\lambda$, на основании доказанной теоремы можно утверждать, что в некоторой окрестности точки $x=a$ мы будем иметь $f(x)>\varphi(x)$, что противоречит условию. Это следствие тогда формулируют так: неравенство при переходе к пределу либо сохраняется, либо обращается в равенство.

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ имеет в точке $x=a$ предел, равный числу l, то она в окрестности точки $x=a$ ограничена.*

Доказательство. Возьмём любое число $\varepsilon>0$, например $\varepsilon=1$. Найдём $\delta>0$, такое, что при всех x из области определения функции $f(x)$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, мы будем иметь $|f(x)-l|<1$; тогда

$$l-1<f(x)<l+1.$$

Замечание. Пусть функция $f(x)$ в точке $x=a$ имеет предел, равный числу l. Пусть α и β — числа, ограничивающие функцию $f(x)$ в некоторой окрестности точки $x=a$:

$$\alpha<f(x)<\beta;$$

тогда на основании теорем 2 и 6 имеем:

$$\alpha\leqslant\lim_{x=a}f(x)\leqslant\beta.$$

Теорема 8. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке $x=a$ имеют пределы, соответственно равные l и λ, и если эта точка $x=a$ предельная для области определения суммы $f(x)+\varphi(x)$, то* *в точке* $x=a$ *функция* $f(x)+\varphi(x)$ *имеет предел и этот предел равен* $l+\lambda$:

$$\lim_{x=a}[f(x)+\varphi(x)]=\lim_{x=a}f(x)+\lim_{x=a}\varphi(x)\ ^{*)}.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ — любое число. Найдётся такое положительное число δ_1, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta_1$ и входящих в область определения функции $f(x)$, мы будем иметь:

$$|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2},$$

и точно так же найдётся такое положительное число δ_2, что при всех x, входящих в область определения функции $\varphi(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta_2$, мы будем иметь:

$$|\varphi(x)-\lambda|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

В таком случае, если δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2, то при всех x, входящих в область определения функции $f(x)+\varphi(x)$ и удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, мы будем иметь:

$$|[f(x)+\varphi(x)]-(l+\lambda)|=|[f(x)-l]+[\varphi(x)-\lambda]|\leqslant$$
$$\leqslant|f(x)-l|+|\varphi(x)-\lambda|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Теорема 9. *Если функция* $f(x)$ *в точке* $x=a$ *имеет предел, равный числу* l, *то функция* $cf(x)$ *в той же точке* $x=a$ *имеет предел, равный* cl:

$$\lim_{x=a}[cf(x)]=c\lim_{x=a}f(x)\ ^{**)}.$$

Доказательство теоремы затруднений не вызывает.

Теорема 10. *Если в точке* $x=a$ *функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *имеют пределы, соответственно равные числам* l *и* λ, *и если точка* $x=a$ — *предельная для области определения произведения* $f(x)\varphi(x)$, *то в точке* $x=a$ *функция* $f(x)\varphi(x)$ *имеет предел и этот предел равен* $l\lambda$:

$$\lim_{x=a}[f(x)\varphi(x)]=\lim_{x=a}f(x)\lim_{x=a}\varphi(x)\ ^{***)}.$$

---

*) Эту теорему иногда коротко формулируют так: предел суммы равен сумме пределов.

**) Эту теорему иногда формулируют так: числовой множитель можно выносить за знак предела.

***) Эту теорему иногда формулируют так: предел произведения функций равен произведению их пределов.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — любое число; имеем:

$$\begin{aligned}|f(x)\varphi(x)-\lambda l| &= |f(x)\varphi(x)-\lambda f(x)+\lambda f(x)-\lambda l| = \\ &= |f(x)[\varphi(x)-\lambda]+\lambda[+f(x)-l]| \leqslant \\ &\leqslant |f(x)||\varphi(x)-\lambda|+|\lambda||f(x)-l|.\end{aligned}$$

На основании теоремы 7 функция $f(x)$ в окрестности точки $x=a$ ограничена, т. е. найдётся такое положительное число K, что $|f(x)|<K$ при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta_1$, где δ_1 — некоторое положительное число.

Найдётся такое положительное число δ_2, что при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta_2$, будем иметь:

$$|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2|\lambda|},$$

и найдётся такое положительное число δ_3, что при всех x, входящих в область определения функции $\varphi(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta_3$, будем иметь:

$$|\varphi(x)-\lambda|<\frac{\varepsilon}{2K};$$

значит, если δ — наименьшее из чисел δ_1, δ_2, δ_3, то при всех x из области определения функции $f(x)\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta,$$

будут выполнены все предшествующие неравенства, и значит

$$|f(x)\varphi(x)-l\lambda|<K\frac{\varepsilon}{2K}+|\lambda|\cdot\frac{\varepsilon}{2|\lambda|}=\varepsilon.$$

Если $\lambda=0$, то доказательство упрощается. Надо взять вместо $\frac{\varepsilon}{2K}$ число $\frac{\varepsilon}{K}$, а числа δ_2, соответствующего неравенству

$$|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2|\lambda|},$$

и самого этого неравенства вводить не нужно.

Теорема 11. *Если в точке $x=a$ функция $\varphi(x)$ имеет пределом число $l\neq 0$, то функция $\frac{1}{\varphi(x)}$ имеет в точке $x=a$ предел, равный $\frac{1}{l}$:*

$$\lim_{x=a}\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x=a}\varphi(x)}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что раз $\lim\limits_{x=a}\varphi(x)=l\neq 0$, то в некоторой окрестности точки $x=a$ при всех x, входящих в область определения функции $\varphi(x)$, мы будем иметь $\varphi(x)>0$, если $l>0$, или $\varphi(x)<0$, если $l<0$. Значит точка $x=a$ будет предельной и для области определения функции $\frac{1}{\varphi(x)}$.

Далее находим:

$$\left|\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{l}\right|=\frac{|\varphi(x)-l|}{|\varphi(x)||l|}.$$

Возьмём $\varepsilon=\frac{|l|}{2}$. Тогда найдётся такое число $\delta_1>0$, что при всех x из области определения функции $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta_1$, мы будем иметь:

$$|\varphi(x)-l|<\frac{|l|}{2},$$

и тем более

$$\big||\varphi(x)|-|l|\big|<\frac{|l|}{2}$$

или

$$-\frac{|l|}{2}<|\varphi(x)|<\frac{3|l|}{2},$$

значит

$$\frac{|\varphi(x)-l|}{|l||\varphi(x)|}<\frac{2}{|l|^2}|\varphi(x)-l|.$$

Возьмём теперь такое положительное число δ_2, чтобы при всех x, удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta_2$$

и входящих в область определения функции $\varphi(x)$, было выполнено условие

$$|\varphi(x)-l|<\frac{\varepsilon|l|^2}{2};$$

тогда, если δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2, то при всех x из области определения функции $\frac{1}{\varphi(x)}$, удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta,$$

все предыдущие неравенства будут выполнены, и значит

$$\left|\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{l}\right|<\frac{2}{|l|^2}\cdot\frac{\varepsilon|l|^2}{2}=\varepsilon.$$

Теорема 12. *Если в точке $x=a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы, соответственно равные l и λ, причём $\lambda\neq 0$, и если точка*

$x=a$ является предельной для отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, то в точке $x=a$ функция $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеет предел, равный $\frac{l}{\lambda}$, т. е.

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x=a} f(x)}{\lim\limits_{x=a} \varphi(x)} \text{ *)}.$$

Доказательство. На основании двух предыдущих теорем имеем:

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x=a}\left[f(x)\frac{1}{\varphi(x)}\right]=\lim_{x=a}f(x)\lim_{x=a}\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x=a} f(x)}{\lim\limits_{x=a} \varphi(x)}.$$

Теорема 13. *Если в точке $x=a$, предельной для области определения $f(x)$, функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ имеют один и тот же предел l, если $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$ при всех x из некоторой окрестности точки $x=a$, входящих в область определения функций $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то в точке $x=a$ функция $f(x)$ имеет предел, также равный l.*

Доказательство:

$$\begin{gathered}|f(x)-l|=|f(x)-\varphi(x)+\varphi(x)-l|\leqslant|f(x)-\varphi(x)|+\\+|\varphi(x)-l|=f(x)-\varphi(x)+|\varphi(x)-l|\leqslant\psi(x)-\varphi(x)+\\+|\varphi(x)-l|=|\psi(x)-\varphi(x)|+|\varphi(x)-l|=|\psi(x)-l+\\+l-\varphi(x)|+|\varphi(x)-l|\leqslant|\psi(x)-l|+2|\varphi(x)-l|.\end{gathered}$$

Возьмём любое $\varepsilon>0$ и найдём такое δ, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$ и входящих в область определения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$, были бы выполнены неравенства

$$|\varphi(x)-l|<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$|\psi(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2},$$

тогда

$$|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2}+2\cdot\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

Теорема 14. *Если в точке $x=a$ функция $f(x)$ имеет предел, равный l, а в точке $y=b$ функция $\varphi(y)$ имеет предел, равный λ, и если точка $x=a$ — предельная для области опреде-*

---

*) Эту теорему коротко формулируют так: предел частного двух функций равен частному их пределов, если предел знаменателя не равен нулю.

ления функции $\varphi[f(x)]$, *то функция* $\varphi[f(x)]$ *в точке* $x=a$ *имеет предел, равный* λ, *т. е. если*

$$\lim_{x=a} f(x)=l,$$

$$\lim_{y=b} \varphi(y)=\lambda,$$

то

$$\lim_{x=a} \varphi[f(x)]=\lambda.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ — любое число. Тогда найдётся такое $\delta_1>0$, что при всех y, входящих в область определения функции $\varphi(y)$ и удовлетворяющих неравенству $|y-b|<\delta_1$, мы будем иметь:

$$|\varphi(y)-\lambda|<\varepsilon;$$

с другой стороны, найдётся такое число $\delta>0$, что при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta,$$

мы будем иметь:

$$|f(x)-l|<\delta_1;$$

значит при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$ и входящих в область определения функции $\varphi[f(x)]$, мы будем иметь:

$$|\varphi[f(x)]-\lambda|<\varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim_{x=a} \varphi[f(x)]=\lambda$$

(конечно, надо ещё иметь в виду, что согласно условию теоремы точка $x=a$ — предельная для области определения функции $\varphi[f(x)]$.

Упражнения

241. Рассмотреть в теореме 1 случай $c=+\infty$ и $c=-\infty$. Доказать эту теорему, полагая:

1) $a=+\infty$,
2) $a=-\infty$,
3) $l=+\infty$,
4) $l=-\infty$,
5) $a=+\infty$, $l=+\infty$,
6) $a=+\infty$, $l=-\infty$,
7) $a=-\infty$, $l=+\infty$,
8) $a=-\infty$ $l=-\infty$.

242. Верна ли теорема 2 в случае $a=+\infty$ или $a=-\infty$?

243. Доказать теорему 3 для случаев

1) $a=+\infty$, 2) $a=-\infty$.

Как видоизменяются формулировка и доказательство теоремы в случае, если

$$1)\ l=+\infty,\quad 2)\ l=-\infty?$$

244. Верна ли теорема 4 в случае $l=+\infty$? Как видоизменится её формулировка, если $a=+\infty$ или $a=-\infty$?

245. Верна ли теорема 6 для случая $a=+\infty$ или $a=-\infty$? Верна ли будет теорема в случае $\lambda=+\infty$? В случае $l=-\infty$, а $\lambda=+\infty$?

246. Верна ли теорема 7 в случае $l=+\infty$ или $l=-\infty$? Верна ли теорема 7 в случае $a=+\infty$ или $a=-\infty$ (при этом l — число)? Как провести доказательства?

247. Верна ли теорема 8 в случае $a=+\infty$ или $a=-\infty$?

Как видоизменится формулировка этой теоремы в случае $l=+\infty$ и $\lambda=+\infty$? В случае $l=-\infty$ и $\lambda=-\infty$? Можно ли сказать что-либо о пределе $f(x)+\varphi(x)$, если в точке $x=a$ первое слагаемое имеет пределом $+\infty$, а второе $-\infty$?

248. Как видоизменится доказательство теоремы 10, если $a=+\infty$ или $a=-\infty$?

Как видоизменятся формулировка и доказательство теоремы 10, если $l=+\infty$, $\lambda=0$? Если $l=-\infty$, $\lambda>0$? Если $l=+\infty$, $\lambda<0$? Если $l=-\infty$, $\lambda<0$? Можно ли сказать что-либо о пределе функции $f(x)\varphi(x)$ в точке $x=a$, если первая функция имеет в данной точке бесконечный предел, а вторая — предел, равный нулю?

249. Доказать, что если функция $\varphi(x)$ имеет в точке $x=a$ предел, равный $+\infty$, то функция $\frac{1}{\varphi(x)}$ в той же точке имеет предел, равный нулю.

Как видоизменится доказательство этой теоремы, если $a=+\infty$ или $a=-\infty$?

250. Функция $\varphi(x)$ в точке $x=a$ имеет предел, равный нулю. Можно ли утверждать, что функция $\frac{1}{|\varphi(x)|}$ в той же точке имеет предел, равный $+\infty$?

251. Доказать, что если $\lim\limits_{x=a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x=a}\varphi(x)=0$ и если $x=a$ — предельная точка области определения функции $f(x)+\varphi(x)$, то

$$\lim_{x=a}[f(x)+\varphi(x)]=0.$$

Верна ли эта теорема в случае, если $a=+\infty$ или $a=-\infty$?

252. Доказать, что если в точке $x=a$ функция $f(x)$ имеет предел, равный нулю, в окрестности этой точки функции $\varphi(x)$ ограничена и точка $x=a$, предельная для функции $f(x)\varphi(x)$, то $\lim\limits_{x=a}[f(x)\varphi(x)]=0$.

253. Доказать, что если $\lim\limits_{y=l}\varphi(y)=+\infty$ и $\lim\limits_{x=a}f(x)=l$, то

$$\lim_{x=a}\varphi[f(x)]=+\infty;$$

каковы должны быть ограничения на области определения функций $f(x)$ и $\varphi(y)$?

254. Функция $|f(x)|$ в точке $x=a$ имеет предел, равный нулю. Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ в той же точке имеет предел, равный нулю?

255. Доказать, что если точка $x=a$ предельная для области определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, если

$$|f(x)|\leqslant|\varphi(x)|$$

при всех x из некоторой окрестности точки $x=a$, входящих в область определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, и если

$$\lim_{x=a} \varphi(x)=0,$$

то

$$\lim_{x=a} f(x)=0.$$

Верна ли эта теорема в случае $a=+\infty$ или $a=-\infty$?

256. Доказать теорему: если $\lim\limits_{x=+\infty} f(x)=l$, то

$$\lim_{y=0+} f\left(\frac{1}{y}\right)=l.$$

Рассмотреть случаи $l=+\infty$ и $l=-\infty$.

257. Доказать теорему: если в окрестности точки $x=a$ функция $f(x)$ ограничена снизу положительным числом c, если $\lim\limits_{x=a} \varphi(x)=0$ и если точка $x=a$ предельная для функции $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, то $\lim\limits_{x=a}\left|\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right|=+\infty$. Верна ли теорема в случае $a=+\infty$? $a=-\infty$?

258. Найти следующие пределы:

$$1)\ \lim_{x=+\infty}\frac{2x^2+x+1}{5x^2+6x-2},\quad 2)\ \lim_{x=-\infty}\left|\frac{x^2+x+1}{x}\right|,$$

$$3)\ \lim_{x=-\infty}\frac{x}{x^2+1},\qquad 4)\ \lim_{x=3}\frac{x^2+x+5}{x-5}.$$

§ 107. Общая формулировка понятия предела функции в точке

Введение несобственных чисел $+\infty$ и $-\infty$ вносит большое разнообразие как в формулировки теорем о пределах, так и в доказательство этих теорем. В самом деле: определения символов

$$\lim_{x=a} f(x)=l,\quad \lim_{x=+\infty} f(x)=l,\quad \lim_{x=-\infty} f(x)=l,$$

$$\lim_{x=a} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x=a} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x=+\infty} f(x)=+\infty,$$

$$\lim_{x=+\infty} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x=-\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x=-\infty} f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x=a+} f(x)=l \qquad \text{и т. д.}$$

отличаются друг от друга; в одном случае приходится иметь дело с неравенствами $|x-a|<\delta$, $|f(x)-l|<\varepsilon$, в других случаях с неравенствами $x>N$, $x<N$, $f(x)>P$, $f(x)<P$ и т. д., притом во многих комбинациях. Естественно возникает вопрос: нельзя ли унифицировать так определение предела функции в точке, чтобы все перечисленные случаи были частными случаями такого определения. Оказывается, что можно.

Окрестностью U числа мы называем интервал $(a-\delta,\ a+\delta)$. *Окрестностью U несобственного числа* $+\infty$ называется любой интервал $(N, +\infty)$; окрестностью U несобственного числа $-\infty$ называется любой интервал $(-\infty,\ N)$. Точка $x=a$ называется предельной точкой множества M чисел, если в любой окрестности этой точки имеется бесконечное множество чисел, входящих во множество M (a может быть $+\infty$ или $-\infty$). Понятие окрестности и позволяет унифицировать определение понятия предела функции в точке: *l называется пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$, если точка $x=a$ есть предельная точка для области определения функ-*

ции $f(x)$ *и если для любой окрестности* $U(l)$ *точки* l *найдётся окрестность* $U(a)$ *точки* a *такая, что если* x *— любое значение аргумента, входящее в область определения функции* $f(x)$ *и в окрестность* $U(a)$, *то* $f(x)\in U(l)$. Весьма существенным обстоятельством является и то, что помимо унификации формулировки понятия предела мы получаем возможность легко обобщить ряд теорем § 104, которые были доказаны нами в частных случаях. При доказательстве придётся использовать следующие свойства окрестностей, которые предполагается установить читателю самостоятельно:

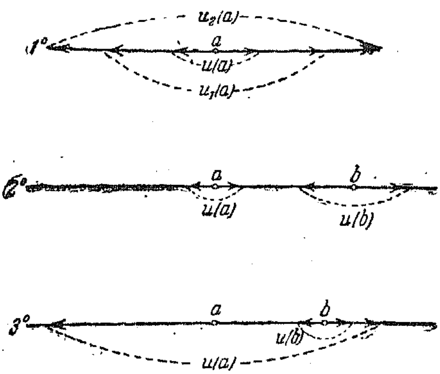
1. Если $U_1(a)$ и $U_2(a)$ — две любые окрестности точки a, то найдётся третья окрестность $U(a)$ той же точки, которая содержится в первых двух:

$$U(a)\subset U_1(a),\quad U(a)\subset U_2(a).$$

2. Если a и b два различные числа (одно из них или оба могут быть и несобственные), то всегда можно найти окрестности $U(a)$ и $U(b)$ этих чисел, которые не имеют общих точек.

3. Если точка $x=b$ входит в окрестность $U(a)$ точки $x=a$, то существует окрестность $U(b)$ точки b, входящая в окрестность $U(a)$ точки a:

$$U(b)\subset U(a).$$



Черт. 256.

На чертеже 256 иллюстрированы эти положения для случая, когда a и b — числа. Читателю предлагается иллюстрировать эти положения для тех случаев, когда числа a и b (одно или оба) — несобственные.

Докажем, например, теорему 1, § 106, допуская, что a и l могут быть и несобственными числами.

Итак: пусть $\lim\limits_{x=a} f(x)=l$. Докажем, что если $c\neq l$, то c не есть предел функции $f(x)$ в точке $x=a$, т. е. что найдётся такая окрестность $U(c)$ точки c, что какова бы ни была окрестность $U(a)$ точки a, найдётся x_0 такое, что $x_0\in U(a)$, но $f(x_0)\,\overline{\in}\,U(c)$. В самом деле: так как $c\neq l$, то найдутся окрестности $U_1(c)$ и $U(l)$ без общих точек (см. 2°). Так как $\lim\limits_{x=a} f(x)=l$, то найдётся окрестность $U_1(a)$ такая, что при всех x из области определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих условию $x\in U_1(a)$ мы будем иметь $f(x)\in U(l)$. Пусть $U(a)$ — любая окрестность точки a и пусть $U_2(a)$ — окрестность, входящая в $U(a)$ и $U_1(a)$. Так как точка $x=a$ предельная для области определения функции $f(x)$, то в окрестности $U_2(a)$ найдётся x_0, входящий в область определения функции $f(x)$. Но $U_2(a)\subset U_1(a)$, следовательно, $x_0\in U_1(a)$, значит $f(x_0)\in U(l)$, а потому $f(x_0)\,\overline{\in}\,U(c)$, ч. т. д.

Аналогично могут быть сокращены доказательства других теорем § 106, если допускать в формулировках их условий несобственные числа (см. также упражнения к § 106).

§ 108. Предел последовательности. Число e

Определение предела последовательности совпадает с определением предела функции $f(x)$ в точке $x=+\infty$; *число* l *называется пределом последовательности*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ *найдётся* N *такое, что*

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

при всех $n > N$.

Последовательность

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \dots, \ a_n, \dots$$

имеет предел, равный $+\infty$, *если для любого числа* N *найдётся такое число* P, *что*

$$a_n > N$$

при всех $n > P$.

Последовательность

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \dots, a_n, \dots$$

имеет предел, равный $-\infty$, *если для любого числа* N *найдётся такое число* P, *что*

$$a_n < N$$

при всех $n > P$.

Если последовательность имеет предел, равный числу l или она имеет предел, равный $+\infty$ или $-\infty$, то говорят также, что эта последовательность сходится к числу l, расходится к $+\infty$ и расходится к $-\infty$. Так как в понятии предела последовательности имеется в виду всегда предел в точке $n = +\infty$, то это обстоятельство иногда в обозначении предела не отмечают и пишут

$$\lim a_n$$

вместо

$$\lim_{n=+\infty} a_n.$$

Если последовательность

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \dots, \ a_n, \dots$$

не имеет предела, то она называется расходящейся.

Приведём примеры пределов последовательностей из школьного курса математики: предел n-го члена бесконечно убывающей геометрической прогрессии (этот предел равен нулю), предел суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (этот предел равен $\frac{a}{1-q}$, где a — первый член, а q — знаменатель прогрессии), предел периметра правильного n-угольника, вписанного в окружность при неограниченном возрастании n (длина окружности), предел последовательности площадей правильных n-угольников, вписанных в окружность (площадь круга), и т. д.

Теорема. *Всякая возрастающая (или убывающая) последовательность, ограниченная сверху* (снизу), *имеет пределом некоторое число* l. Доказательство этой теоремы по существу дано в курсе алгебры для учительских институтов С. И. Новосёлова, а именно: пределом возрастающей последовательности $\{a_n\}$, ограниченной сверху, является наименьшее число l, ограничивающее все члены a_n последовательности. В самом деле, если $a_n \leqslant l$ при всех n и если $a_n' > l - \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ при всех $n > N$, то $|a_n - l| < \varepsilon$ при всех $n > N$, т. е. $\lim a_n = l$. С применением этой теоремы мы неоднократно встречаемся в школьном курсе математики, например, когда речь идёт о длине окружности. При этом проводятся следующие рассуждения: пусть P_1 — периметр правильного вписанного треугольника, P_2 — правильного вписанного шестиугольника и т. д., P_n — периметр правильного $3 \cdot 2^n$-угольника.

Рассмотрим последовательность

$$P_1,\ P_2,\ P_3, \ldots,\ P_n, \ldots$$

Эта последовательность возрастает, так как:

$$P_1 < P_2 < P_3 < \ldots < P_n < \ldots;$$

пусть A — периметр некоторого многоугольника, охватывающего окружность, например — описанного около неё. Тогда $P_n < A$ при любом n. Окончательно имеем возрастающую последовательность, ограниченную сверху. Такая последовательность сходится к некоторому числу. Это число мы и называем длиной окружности.

Приведём ещё один пример, имеющий важное значение.

Рассмотрим последовательность

$$a_1 = (1+1)^1, \quad a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \quad a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots,$$
$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

Докажем, что эта последовательность возрастающая и ограниченная сверху, а значит имеет пределом некоторое число. Имеем:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} +$$
$$+ \ldots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{1\cdot 2\cdots(k+1)}\,\frac{1}{n^{k+1}} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$
$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{(k+1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Отсюда видно, что если мы n увеличим на 1, то число слагаемых увеличится на 1, а каждое слагаемое также увеличится; значит,

$$a_n < a_{n+1},$$

т. е. рассматриваемая последовательность — возрастающая. Вместе с тем из последнего выражения ясно, что

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} <$$
$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 3.$$

На основании сформулированной выше теоремы последовательность

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

имеет предел. Этот предел обозначается буквой e (неперово число). Число e иррациональное. Его приближённое значение с 15 десятичными знаками:

$$e = 2{,}718281828459045.$$

Отметим без доказательства, что $\lim\limits_{x=+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, а также что $\lim\limits_{h=0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$.

Рассмотрим ещё следующий пример: пусть сумма в a рублей увеличивается на 100% в год. Во что обратится эта сумма через 1 год?

Ответ на этот вопрос прост: сумма a рубл. удвоится и по прошествии года станет равной $2a$ рубл. Предположим, что начисление производится 2 раза в год. Тогда решение будет таково: через 1-е полугодие сумма в a рубл. обратится в $a + \frac{a}{2} = a\left(1 + \frac{1}{2}\right)$, а по прошествии второго полугодия эта сумма обратится в

$$a\left(1 + \frac{1}{2}\right) + a\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = a\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \text{ рубл.}$$

Если начисления производить 3 раза в год, то сумма в a рубл. к концу года обратится в

$$a\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \text{ рубл. и т. д.}$$

Наконец, если начисление производить n раз в год, то по прошествии 1 года сумма в a рубл. обратится в

$$a\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ рубл.}$$

Теперь ясно, что если мы начисление будем производить «непрерывно», то сумма в a рубл. обратится к концу года в

$$\lim a\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \text{ т. е. в } ae \text{ рубл.}$$

Указанный пример носит несколько искусственный характер, так как практически начисление «непрерывно» никогда не производится. Однако с такого рода ситуацией приходится встречаться и в вопросах чисто практических; в целом ряде вопросов рост какой-нибудь величины (например, рост кристалла в растворе или, наоборот, распадение какого-либо вещества, например радия) пропорционален в каждый момент наличному количеству рассматриваемого вещества, а потому рассмотренный пример с ростом суммы в a рублей фактически ничем не отличается от указанных примеров роста и распада веществ. Во всех таких вопросах мы приходим к пределу указанной последовательности, т. е. к неперову числу.

На понятии предела последовательности можно построить определение предела функции $f(x)$ в точке, предельной для области определения этой функции.

Определение: *l называется пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$, предельной для области определения функции $f(x)$, если, какова бы ни была последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, входящая в область определения функции $f(x)$ и сходящаяся к a, последовательность*

$$f(x_1),\ f(x_2), \ldots,\ f(x_n), \ldots$$

сходится к l.

В этом определении l и a могут быть и несобственными числами ($+\infty$ или $-\infty$). Это определение предела по Гейне эквивалентно определению предела по Коши. Докажем это для того случая, когда a и l — числа.

I. Итак, пусть $x=a$ — предельная точка для области определения функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$ такое, что $|f(x)-l|<\varepsilon$ при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|<\delta.$$

Возьмём любую последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, сходящуюся к a и входящую в область определения функции $f(x)$. Найдётся такое N, что $|x_n-a|<\delta$ при всех $n>N$, а значит $|f(x_n)-l|<\varepsilon$ также при всех $n>N$, следовательно, последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ сходится к l.

II. Обратно: пусть число l есть предел функции $f(x)$ в точке $x=a$ (a — число) по Гейне. Предположим, что l не есть предел функции $f(x)$ в точке $x=a$ по Коши, т. е. найдётся такое $\varepsilon>0$, что для любого $\delta>0$ найдётся такое x_0, входящее в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющее неравенству $|x-a|<\delta$, мы будем иметь

$$|f(x_0)-l|\geqslant\varepsilon.$$

Возьмём последовательность положительных чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, сходящуюся к нулю, и выберем в δ_1 — окрестности точки $x=a$, в δ_2 — окрестности точки $x=a$ и т. д., числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ такие, что

$$|f(x_1)-l|\geqslant\varepsilon,\quad |f(x_2)-l|\geqslant\varepsilon, \ldots,\quad |f(x_n)-l|\geqslant\varepsilon, \ldots$$

Ясно, что последовательность

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n, \ldots$$

сходится к a, а последовательность

$$f(x_1),\quad f(x_2), \ldots,\quad f(x_n), \ldots$$

в силу неравенства

$$|f(x_n)-l|\geqslant\varepsilon$$

не сходится к l; полученное противоречие убеждает нас в том, что функция $f(x)$ в точке $x=a$ имеет предел l и в смысле Коши.

Пример 1. Функция $\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x=0$, так как, выбирая последовательность

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}},\quad \frac{1}{\pi},\quad \frac{1}{\frac{3\pi}{2}},\quad \frac{1}{2\pi},\ldots$$

значений аргумента, сходящуюся к нулю, мы получаем расходящуюся последовательность значений $\sin\frac{1}{x}$

$$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ldots$$

Упражнения

259. Доказать, что последовательность

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ldots,\ \frac{1}{n},\ldots$$

сходится к нулю.

260. Дана последовательность

$$6,\ 2,\ 8,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ldots,0,\ 1,\ldots$$

и окрестность нуля $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$. Начиная с 4-го члена, все члены последовательности оказываются в этой окрестности. Будет ли 0 пределом последовательности?

261. Является ли ограниченность последовательности условием необходимым, достаточным или необходимым и достаточным её сходимости?

262. Может ли последовательность расходиться к $+\infty$, если она ограничена сверху? К $-\infty$, если она ограничена снизу?

263. Дать пример последовательности:

a) Неограниченной сверху и вместе с тем расходящейся к $+\infty$.

b) Неограниченной снизу, но не расходящейся к $-\infty$.

c) Ограниченной и расходящейся.

264. Определить пределы следующих монотонных последовательностей:

a) $0,\ 5,\ 7,\ 7\frac{1}{2},\ 7\frac{2}{3},\ldots,\ 7+\frac{n}{n+1},\ldots$

b) $-20,-10,\ 0,\ 10,\ 10\frac{1}{2},\ 10\frac{1}{4},\ldots,\ 10+\frac{1}{2}n,\ldots$

c) $3,\ 4,\ 8,\ 8,\ 8,\ldots,\ 8,\ldots$

d) $8,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ldots,0,\ldots$

e) $1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2},\ldots,\ \frac{1}{n^2},\ldots$

265. Дана последовательность

$$1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 3,\ \frac{1}{4},\ 4,\ldots,\ \frac{1}{n},\ n,\ldots$$

В любой окрестности точки 0 содержится бесконечное множество членов. Будет ли эта точка пределом последовательности?

266. Дана последовательность:

$$1,\ \frac{1}{2},\ 1\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ 1\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ 1\frac{1}{8},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ 1+\frac{1}{2^n},\ \ldots$$

В любой окрестности как точки 1, так и точки 0 содержится бесконечное множество членов. Можно ли их назвать пределами этой последовательности?

267. Доказать, что если L является пределом последовательности, то L будет пределом другой последовательности, если из данной последовательности отбросить или к ней приписать любое конечное число членов.

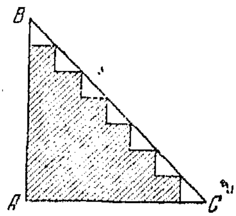
268. В прямоугольный треугольник ABC (черт. 257), основание которого разбито на n равных частей, вписана ступенчатая фигура. Доказать, что предел последовательности площадей ступенчатой фигуры равен площади треугольника ABC.

269. Отрезок длины a разделён на n равных частей. На каждом частичном отрезке, как на диаметре, построена полуокружность. Обозначим через s_n длину линии, составленной из этих полуокружностей. Доказать, что

$$\lim \delta_n = \frac{a\pi}{2}.$$

Найти ошибку в следующем рассуждении: так как построенная линия неограниченно приближается к отрезку, то $\lim\ \delta_n = a$. Следовательно, $a = \frac{a\pi}{2}$, откуда

$$\pi = 2?!$$



Черт. 257.

270. Дан прямоугольный треугольник с катетами a и b. Гипотенуза его разделена на n частей и из точек деления проведены прямые, параллельные катетам так, как показано на чертеже 257. Длина l_n полученной ломаной равна $a+b$ при любом n, следовательно, и $\lim l_n = a+b$. С другой стороны, ломаная «неограниченно приближается» к гипотенузе. Отсюда заключаем, что длина гипотенузы равна сумме длин катетов.

Найти ошибку в этом рассуждении.

271. Найти следующие пределы:

$$1)\ \lim \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2},$$

$$2)\ \lim \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3},$$

$$3)\ \lim \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)}{n^3}.$$

272. Что означает фраза: l не есть предел функции $f(x)$ в точке $x=a$. Дать отрицание предела по Гейне.

§ 109. Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$

Функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ определена для всех значений x, отличных от нуля.

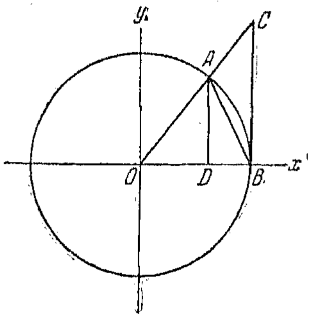
Докажем, что

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Предварительно докажем неравенства

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{x^2}{2},$$

верные для любого $x\neq 0$. Так как в дальнейшем нас будут интересовать значения x в окрестности 0, то с самого начала будем считать, что $|x|<\frac{\pi}{2}$.


Черт. 258.

Сначала докажем неравенства для случая

$$0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Произведя в круге радиуса r построения, показанные на чертеже 258, где величина дуги AB равна x радиан, получим: площадь треугольника AOB меньше площади сектора AOB, а последняя меньше площади треугольника COB; так как площадь сектора $AOB=\frac{1}{2}r^2x$, площадь треугольника $AOB=\frac{1}{2}\ rAD$, а площадь треугольника $COB=\frac{1}{2}rCB$, то

$$\frac{1}{2}r\,AD<\frac{1}{2}r^2x<\frac{1}{2}r\,CB.$$

Деля все части неравенства на $\frac{1}{2}r^2$, получим

$$\frac{AD}{r}<x<\frac{CB}{r}$$

или

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x,$$

откуда

$$\frac{1}{\sin x}>\frac{1}{x}>\frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

или, умножая неравенства на положительное число $\sin x$, получим

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x,$$

$$0>\frac{\sin x}{x}-1>\cos x-1,$$

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x$$

или

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Так как $|\sin\alpha|<\alpha$ при $\alpha\neq 0$, то, заменив $2\sin^2\frac{x}{2}$ большим числом $2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}$, мы лишь усилим неравенство и получим

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{x^2}{2}.$$

Последние неравенства верны и при $-\frac{\pi}{2}<x<0$. В самом деле: если $x<0$, то $-x>0$ и для $-x$ неравенства верны:

$$0<1-\frac{\sin(-x)}{-x}<\frac{(-x)^2}{2}$$

или

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{x^2}{2}.$$

Возьмём любое $\varepsilon>0$. Пусть $\frac{x^2}{2}<\varepsilon$, т. е. $|x|<\sqrt{2\varepsilon}$. Пусть δ — наименьшее из чисел $\sqrt{2\varepsilon}$ и $\frac{\pi}{2}$; тогда при $|x|<\delta$ все предыдущие неравенства будут выполнены и потому

$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<\varepsilon$$

при всех x, входящих в область определения функции $\frac{\sin x}{x}$ и удовлетворяющих неравенству

$$|x|<\delta,$$

а это значит, что

$$\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Пример 1. Найти

$$\lim_{x=0}\frac{\sin 5x}{x}.$$

Положим $5x=y$; тогда $\lim\limits_{x=0} y=0$, и значит на основании теоремы о пределе сложной функции будем иметь:

$$\lim_{x=0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{y=0}\frac{\sin y}{\frac{y}{5}}=5\lim_{y=0}\frac{\sin y}{y}=5.$$

Пример 2.

$$\lim_{x=0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x=0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x=0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

Пример 3.

$$\lim_{x=0}\frac{\arcsin x}{x}=1.$$

Пусть $\arcsin x = y$; тогда $x = \sin y$ и в силу того, что $\lim\limits_{x=0} y = 0$ будем иметь:

$$\lim_{x=0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y=0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y=0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y=0} \frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Упражнения

273. Найти следующие пределы:

$$1)\ \lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{x^2},\quad 2)\ \lim_{x=0} \frac{\sin ax}{x},\quad 3)\ \lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x},$$

$$4)\ \lim_{x=0} \frac{\sin ax}{\sin bx},\quad 5)\ \lim_{x=0} \frac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx},\quad 6)\ \lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x},$$

$$7)\ \lim_{x=\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\pi - 2x},\quad 8)\ \lim_{\alpha=\beta} \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\alpha - \beta},\quad 9)\ \lim_{\alpha=\pi} \frac{\sin \alpha}{1 - \frac{\alpha^2}{\pi^2}},$$

$$10)\ \lim_{\alpha=0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\arcsin x},\quad 11)\ \lim_{x=1} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}},\quad 12)\ \lim_{x=0} \frac{x+\sin x}{x-\sin x},$$

$$13)\ \lim_{x=\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1-\operatorname{tg} x},\quad 14)\ \lim_{z=1} \left[(1-z)\operatorname{tg}\frac{\pi z}{2}\right],\quad 15)\ \lim_{x=a} \left[\sin\frac{x-a}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\right].$$

§ 110. Понятие о функции двух аргументов

Если каждой паре чисел x, y, взятых в определённом порядке из некоторого множества пар чисел, ставится в соответствие одно число z, то мы скажем, что задана функция z от двух аргументов x и y; будем это записывать так:

$$z = f(x, y).$$

Множество всех пар чисел x, y, допустимых для аргументов x и y, называется областью определения функции $z = f(x, y)$. Пару чисел x, y мы будем называть также «точкой».

Если функция z двух аргументов задана формулой, а об области её определения ничего не сказано, то под областью определения понимают множество всех тех пар чисел x и y, при которых данное аналитическое выражение имеет смысл.

Если ввести в пространстве декартову систему координат, то каждой паре чисел x, y, принадлежащей области определения функции $z = f(x, y)$, можно поставить в соответствие точку $P(x, y, 0)$ плоскости xOy, а каждому значению функции

$$z = f(x, y)$$

можно поставить в соответствие точку

$$M(x, y, f(x, y))$$

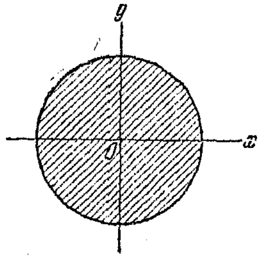
пространства. Таким образом области определения функции $z=f(x,y)$ будет соответствовать некоторое множество точек плоскости xOy, а функции

$$z=f(x,\ y)$$

будет соответствовать множество точек $M(x, y, f(x, y))$ пространства.

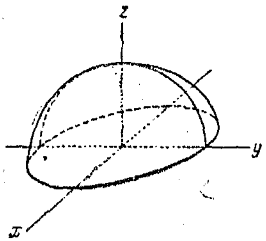
Обратно: если относительно декартовой системы координат в пространстве задано множество точек, обладающих тем свойством, что на любой прямой, коллинеарной оси Oz, лежит не более одной точки из этого множества, то такое множество определяет функцию, если аппликату z точки $M(x,\ y,\ z)$ из этого множества поставить в соответствие её абсциссе и ординате:

$$z=f(x,\ y).$$



Черт. 259а.

Пример 1. $z=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Областью определения этой функции является множество пар чисел x, y, где $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. Геометрически этому множеству соответствует множество всех точек плоскости xOy с положительными координатами, включая положительные полуоси Ox и Oy.



Черт. 259б.

Пример 2. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Область определения $1-x^2-y^2\geqslant 0$ или $x^2+y^2\leqslant 1$, т. е. все точки, расположенные внутри окружности $x^2+y^2=1$ и на её границе. Множество точек $M\left(x,\ y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right)$ образует полусферу

$$x^2+y^2+z^2=1, \qquad z\geqslant 0$$

(черт. 259).

Пример 3. Обычная таблица умножения есть функция $z=xy$ двух аргументов, область определения которой состоит из всех пар целых чисел x, y, где x и y принимают все целые значения от 1 до 9.

Пример 4. Определим функцию $z=f(x,y)$ так: если x и y — рациональные числа, то $f(x,y)=1$, если же хотя бы одно из них иррационально, то $f(x,y)=0$. Например,

$$f(1{,}0)=1,\ f\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{9}\right)=1, \quad f\left(\sqrt{2}, \frac{4}{7}\right)=0, \quad f(\sqrt{2},\ 3\pi)=0 \text{ и т. д.}$$

Область определения — множество всех пар действительных чисел; геометрически — вся плоскость xOy. Графиком этой функции служит множество точек $M(x, y, 0)$, где x и y рациональны и $M(x, y, 1)$, где хотя бы одно из чисел x или y — иррационально.

Упражнения

274. Дана функция $z=f(x, y)=x+y-1$.

Найти область определения этой функции. Какую поверхность определяет эта функция?

Найти

$$f(0,\ 0),\ \ f(2,\ -1),\ \ f(a,\ b^2),\ \ f(x+y,\ y-3),$$
$$f(x,\ y)+2,\ \ f(2x,\ 2y),\ \ 2f(x,\ y).$$

275. Найти области определения следующих функций:

1) $\lg(xy)$, 2) $\lg\frac{x}{y}$, 3) $\frac{1}{x+y}$, 4) $\lg(x+y)$, 5) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, 6) $\sqrt{xy}$,

7) $\sqrt{x+y-1}$, 8) $\sqrt{(x+y-1)(x-y+1)}$, 9) $\sqrt{2x^2+3xy+5y^2}$,

10) $\sqrt{|x|+y}$, 11) $\operatorname{tg}(xy)$, 12) $\lg(|x|-|y|)$.

§ 111. Непрерывность и предел функции двух аргументов

Понятие непрерывности и предела функции одного аргумента легко распространить на функции двух и более аргументов.

Функцию $z=f(x, y)$ мы будем называть непрерывной в точке (a, b), если эта функция $f(x, y)$ определена в точке (a, b) и если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что будет выполнено неравенство $|f(x, y)-f(a, b)|<\varepsilon$ для всех пар x, y, входящих в область определения функции $f(x, y)$, причём $|x-a|<\delta$, $|y-b|<\delta$.

Понятие предела обобщается аналогично.

Прежде всего: точка a, b называется предельной точкой множества M точек x, y, если, каково бы ни было число $\delta>0$, найдётся бесконечное множество точек x, y, входящих во множество M, причём $|x-a|<\delta$ и $|y-b|<\delta$.

Далее: число l называется пределом функции $f(x, y)$ в точке a, b, если точка a, b предельная для области определения функции $f(x, y)$ и если для любого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$, что $|f(x, y)-l|<\varepsilon$ при всех x, y, входящих в область определения функции $f(x, y)$, причём $|x-a|<\delta$, $|y-b|<\delta$.

Наконец, формулировка предела по Гейне здесь принимает вид: если точка a, b предельная для области определения функции $z=f(x, y)$, то l называется пределом функции $f(x, y)$ в точке a, b, если, какова бы ни была последовательность точек a_n, b_n, сходящаяся к a, b (т. е. a_n сходится к a, b_n — сходится к b), причём все точки a_n, b_n входят в область определения функции $f(x, y)$, последовательность $f(a_n, b_n)$ сходится к l. В этом определении среди чисел a, b, l часть или все могут быть несобственными.

Теоремы о непрерывных функциях и о пределах обобщаются на случай функции двух аргументов. На этом мы останавливаться не будем. Аналогично могут быть введены понятия функции 3 или более аргументов и обобщены понятия непрерывности и предела.

Упражнения

276. Доказать, что функция $z=2x-3y+1$ непрерывна в любой точке $P(a, b)$.

Какую поверхность определяет эта функция?

Тот же вопрос для функции $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)-1$.

277. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна при $x=a$, а функция $\varphi(y)$ непрерывна при $y=b$, то функция $f(x)+\varphi(y)$ непрерывна в точке (a, b).

ГЛАВА XVI

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 112. Задача о скорости

Пусть тело движется по прямой, причём зависимость пути s от времени t задана функцией

$$s=f(t).$$

Это уравнение, связывающее путь и время, называется уравнением движения или законом движения. В механике ставится вопрос о том, как, зная уравнение движения, найти скорость тела. Эту задачу мы и рассмотрим.

Рассмотрим два момента времени t и $t+\Delta t$; Δt называется приращением времени; мы будем считать, что $\Delta t \neq 0$. За промежуток времени Δt тело пройдёт путь $f(t+\Delta t)-f(t)$, который мы обозначим для краткости так: Δs. Отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ называется средней скоростью за промежуток времени от t до $t+\Delta t$, а предел этого отношения в точке $\Delta t=0$ называется скоростью тела в момент t:

$$v=\lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Пример 1. Путь, пройденный падающим в пустоте телом при начальной скорости, равной нулю, вычисляется по формуле

$$s=\frac{gt^2}{2}.$$

Определим скорость в произвольный момент времени t.

Имеем: в момент времени t путь равен $\frac{1}{2}gt^2$. Пусть время изменилось на Δt. Рассмотрим новый момент времени, равный $t+\Delta t$. Новый путь равен

$$s+\Delta s=\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2.$$

Приращение пути:

$$\Delta s=\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}g(2t\,\Delta t+\Delta t^2).$$

Дробь $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, т. е. средняя скорость за время Δt, равна

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{g(2t\Delta t+\Delta t^2)}{2\Delta t}.$$

Скорость v в момент времени t получим предельным переходом:

$$v=\lim_{\Delta t=0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t=0}\frac{g(2t\Delta t+\Delta t^2)}{2\Delta t}=\lim_{\Delta t=0}\left(gt+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt.$$

Пример 2. Рассмотрим следующий закон движения:

$$s=A\sin t,\ \text{где } A>0.$$

Движение точки, совершаемое по этому закону, носит название гармонического колебательного движения. Число A называется амплитудой колебания, ибо оно характеризует наибольшее уклонение колеблющейся точки от положения равновесия. Действительно, наибольшее уклонение, т. е. наибольшее значение $|s|$ мы получим при $\sin t=1$, а тогда $|s|=A$. Определим скорость в произвольный момент времени t. Имеем последовательно:

$$s=A\sin t,$$

$$s+\Delta s=A\sin(t+\Delta t),$$

$$\Delta s=A[\sin(t+\Delta t)-\sin t]=2A\sin\frac{\Delta t}{2}\cos\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{2A\sin\frac{\Delta t}{2}\cos\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t},$$

$$v=\lim_{\Delta t=0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=A\lim_{\Delta t=0}\frac{\sin\frac{\Delta t}{2}}{\frac{\Delta t}{2}}\lim_{\Delta t=0}\cos\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)=A\cos t,$$

$$v=A\cos t.$$

Из сравнения выражений для s и v мы видим, что наибольшей абсолютной величины скорость тела достигает в те моменты, когда отклонение тела будет наименьшим, и наоборот.

В самом деле: $s=0$ при $\sin t=0$, т. е. при $t=\pi n$. При этом $\cos t=\pm 1$, т. е. $|v|=A$, и наоборот: при $v=0$ имеем $\cos t=0$, $\sin t=\pm 1$ и, значит, $|s|=A$.

Упражнения

278. Найти скорость прямолинейного движения в момент времени $t=t_0$, если уравнение движения выражается равенством:

$$1)\ s=2t-\frac{1}{t},\qquad 2)\ s=\cos 2t,\qquad 3)\ s=2t^2+t-1.$$

279. Дано уравнение прямолинейного движения

$$s=2t^3-15t^2+36t+2.$$

В какие моменты времени скорость равна нулю?

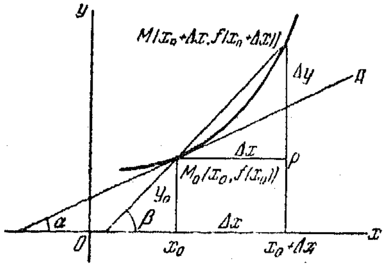
280. Путь s, пройденный телом, пропорционален квадрату времени t; $s=18$ при $t=3$. Определить среднюю скорость $v_{ср}$ за промежуток времени от $t=2$ до $t=10$ и скорость v в моменты времени $t=2$, $t=4$, $t=10$.

281. По прошествии 2 сек. тело находилось на расстоянии 10 *м* от начального положения: $s=10$, а по прошествии 8 сек. на расстоянии $s=52$. Можно ли определить среднюю скорость за первые 2, 5, 8 сек. За промежуток от $t=2$ до $t=8$ сек. Скорость в моменты времени 0, 2, 5, 8 сек.?

§ 113. Задача о касательной к линии

На плоскости xOy дана линия L (черт. 260), причём любая прямая, параллельная оси Oy, либо её не пересекает, либо пересекает в одной точке. Тогда ордината y точки линии является функцией x:

$$y=f(x).$$



Черт. 260.

Функцию $f(x)$ будем считать определённой и непрерывной на отрезке $[a, b]$.

Определение. *Касательной к линии L в точке M_0 называется прямая, проходящая через точку M_0 и образующая с осью Ox угол α, равный пределу в точке $\Delta x=0$ угла β секущей M_0M с осью Ox:*

$$\alpha=\lim_{\Delta x=0}\beta.$$

Коротко это определение формулируется так: *касательная есть предел секущей.* Если существует предел в точке $\Delta x=0$ угла β наклона секущей к оси Ox и этот предел отличен от $\frac{\pi}{2}$, то из соотношения

$$\alpha=\lim_{\Delta x=0}\beta$$

следует

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x=0}\operatorname{tg}\beta,$$

т. е. угловой коэффициент касательной к линии L в точке M_0 равен пределу в точке $\Delta x=0$ углового коэффициента секущей, проходящей через точки $M_0(x, f(x))$ и $M(x, f(x+\Delta x))$, если только касательная не параллельна оси Oy.

Задача о касательной к линии в произвольной её точке $M_0(x_0, y_0)$ привела математиков к понятию производной.

Составим уравнение касательной к линии L в точке $M_0(x_0, y_0)$, предполагая, что в этой точке касательная существует и не коллинеарна оси Oy.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ записывается так:

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

где k — угловой коэффициент этой прямой.

20*

Для составления уравнения касательной надо определить угловой коэффициент касательной.

Возьмём на линии произвольную точку $M(x, y)$. Пусть β — угол от оси Ox до секущей M_0M, а α — угол от оси Ox до касательной AM_0 к линии L в точке M_0. Из чертежа 260 имеем

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{MP}{M_0P} = \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

отсюда

$$k = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Как видно, дело свелось к нахождению предела отношения приращения функции к приращению аргумента в точке $\Delta x = 0$.

Пример 1. Составить уравнение касательной к параболе

$$y = ax^2$$

в точке её с абсциссой $x = x_0$.

Найдём ординату y_0 точки M:

$$y_0 = ax_0^2.$$

Следовательно, уравнение касательной AB будет

$$y - ax_0^2 = k(x - x_0).$$

Остаётся найти $k = \operatorname{tg}\alpha$. Имеем:

$$y_0 = ax_0^2,$$

$$y_0 + \Delta y = a(x_0 + \Delta x)^2,$$

$$\Delta y = a(x_0 + \Delta x)^2 - ax_0^2 = 2ax_0\Delta x + a\Delta x^2,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax_0\Delta x + a\Delta x^2}{\Delta x}$$

и, наконец,

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} (2ax_0 + a\Delta x) = 2ax_0.$$

Окончательно уравнение касательной запишется так:

$$y - ax_0^2 = 2ax_0(x - x_0),$$

или

$$y + ax_0^2 = 2ax_0x,$$

или

$$y + y_0 = 2ax_0x.$$

Если, например, $a = \frac{1}{2}$, $x_0 = 2$, то $y_0 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$, $k = 2$ и уравнение касательной примет вид $y - 2 = 2(x - 2)$ или $2x - y - 2 = 0$.

Упражнения

282. Составить уравнение касательной к параболе

$$y = 2x^2 - x + 1$$

в точке с абсциссой $x = 3$. Сделать чертёж.

283. 1) Составить уравнение касательной к синусоиде

$$y = 2\sin 3x$$

в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{6}$. 2) В каких точках касательная параллельна оси Ox? 3) Образует с осью Ox угол $\frac{\pi}{6}$?

284. В какой точке параболы

$$y = x^2 - 2$$

касательная параллельна оси Ox?

285. Существует ли на линии

$$y = x^3 + 3x$$

точка, в которой касательная параллельна оси Ox?

§ 114. Производная

Рассмотренные выше задачи, различные по своей сущности, оказались с точки зрения математики одинаковыми; они привели к новой для нас операции: нахождению предела отношения приращения Δy функции к приращению Δx аргумента в точке $\Delta x = 0$.

Определение. *Производной от функции $y = f(x)$ при заданном значении x, являющимся предельным числом для области определения функции $f(x)$, называют предел в точке $\Delta x = 0$ отношения приращения функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению аргумента Δx*:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Производная

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

равна угловому коэффициенту касательной к линии $y = f(x)$, т. е. тангенсу угла от оси Ox до касательной к линии $y = f(x)$:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k = tg\,\alpha \qquad \text{(черт. 260).}$$

Производную функции $y = f(x)$ мы будем обозначать так:

$$y' \text{ или } f'(x).$$

Сформулируем правило нахождения производной.

Согласно определению, для нахождения производной необходимо:

1° *Вычислить значение $f(x + \Delta x)$ функции, равное $y + \Delta y$.*

2° *Вычислить приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ функции.*

3° *Найти отношение приращения функции к приращению аргумента*:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

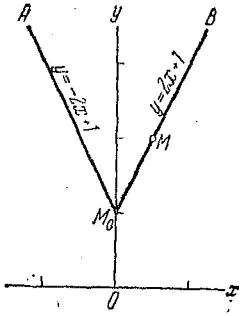
4° *Найти предел полученного частного в точке* $\Delta x = 0$.

Частное $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть функция 2-х аргументов: x и Δx. Каждой паре чисел x и Δx соответствует определённое значение частного. Если зафиксировать x, то частное становится функцией одного аргумента Δx.

После перехода к пределу в точке $\Delta x = 0$, мы получим производную, являющуюся функцией одного аргумента x.

Не всякая функция имеет производную в каждой точке, где она определена. Например, функция

$$y = \begin{cases} -2x + 1 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ 2x + 1 & \text{при} \quad x > 0 \end{cases}$$



Черт. 261.

(черт. 261) определена в точке $x = 0$, но при этом значении x она не имеет производной. Действительно: $f(0) = 1$. Пусть $\Delta x > 0$. Тогда новое значение функции нужно вычислять по формуле $y = 2x + 1$, и мы получим

$$y + \Delta y = 2(0 + \Delta x) + 1 = 2\Delta x + 1,$$

$$\Delta y = 2\Delta x + 1 - 1 = 2\Delta x,$$

$$\lim_{\Delta x = 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0+} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2;$$

это не есть ещё производная, так как мы нашли правый предел дроби $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Пусть $\Delta x < 0$; новое значение функции теперь нужно вычислять по формуле $y = -2x + 1$. Получим:

$$y + \Delta y = -2(0 + \Delta x) + 1,$$

$$\Delta y = -2\Delta x + 1 - 1 = -2\Delta x,$$

$$\lim_{\Delta x = 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0-} \frac{-2\Delta x}{\Delta x} = -2,$$

т. е. левый предел частного $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке $\Delta x = 0$ равен -2. Так как левый предел не равен правому, то производная, т. е. предел дроби $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке $\Delta x = 0$ не существует.

Геометрическая картина здесь следующая: график функции состоит из двух лучей AM_0 и BM_0. Отыскание правого предела дроби $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке $\Delta x = 0$ соответствует нахождению предела углового коэффициента секущей M_0M, в случае, когда точка M находится справа от точки M_0. При этом секущая M_0M совпадает с лучом M_0B и, следовательно, предел углового коэффициента M_0M, т. е. правый предел $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке $\Delta x = 0$ совпадает с угловым коэффициентом луча M_0B, т. е. этот предел равен 2. При $\Delta x < 0$ точка M находится слева от точки M_0, т. е. находится на луче M_0A. Секущая M_0M совпадает с лучом M_0A и предел углового коэффициента секущей, т. е. левый предел равен угловому коэффициенту луча M_0A, т. е. равен -2.

Здесь, как говорят, имеется левая производная и правая производная или геометрически: левая касательная и правая касательная, но они не совпадают, следовательно, касательная не существует так же, как и производная.

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ в точке x имеет производную $f'(x)$, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Имеем

$$\lim_{\Delta x = 0} \Delta y = \lim_{\Delta x = 0} \left(\Delta x \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x = 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \cdot y' = 0.$$

Итак:

$$\lim_{\Delta x = 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{\Delta x = 0} f(x + \Delta x) = f(x),$$

а это значит, что функция $f(x)$ непрерывна при рассматриваемом значении x.

Обратная теорема неверна, т. е. функция может быть непрерывной в точке и вместе с тем не иметь производной в этой точке. Последний пример доказывает это положение: функция

$$y = \begin{cases} -2x + 1 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ 2x + 1 & \text{при} \quad x > 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке $x = 0$, но она в этой точке, как мы показали, не имеет производной.

В более полных курсах анализа даются примеры непрерывных функций, не имеющих производной ни в одной точке своей области определения.

Упражнения

286. Для функции $y = x^2 - 2x$ найти приращение Δy при переходе аргумента от значения -2 к значению 5.

287. Найти приращение Δy функции $y = x^3$ в точке $x = 2$, полагая: 1) $\Delta x = 1$; 2) $\Delta x = 0{,}1$.

288. Найти производные следующих функций:

1) $y = 2x^2 - 4$, 5) $y = (x + 1)(x + 2)$,

2) $y = x^3 + x + 1$, 6) $y = \dfrac{x + 1}{3x - 1}$,

3) $y = \dfrac{3}{x^2}$,

4) $y = \dfrac{1}{x + 1}$, 7) $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$.

289. Найти значение производной от функции

1) $y=x^2+4$ в точке $x=1$,

2) $y=(x+2)^2$ в точке $x=0$,

3) $y=\frac{1}{x-1}$ в точке $x=2$,

4) $y=\sin 2x$ в точке $x=\frac{\pi}{4}$,

5) $y=\cos 2x-x$ в точке $x=\frac{\pi}{6}$.

290. Найти уравнение касательной к линии

1) $y=2-x^3$ в точке с абсциссой $x=1$,

2) $y=x^2-x+1$ в точке с абсциссой $x=2$,

3) $y=\sin 3x$ в точке с абсциссой $x=\frac{\pi}{3}$,

4) $y=\frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x=3$,

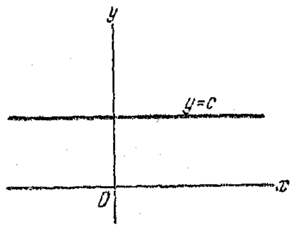
5) $y=\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x=5$.

Проверить результаты, начертив линии и касательные.

§ 115. Производная постоянной функции

В ближайших параграфах мы выведем формулы и докажем теоремы, значительно облегчающие процесс нахождения производных.

Теорема. *Производная постоянной функции равна нулю: если* $y=f(x)=c$ *(c—число), то* $y'=0$.



Черт. 262.

Доказательство:

1° $y=c, \quad y+\Delta y=c$;

2° $\Delta y=0$;

3° $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$;

4° $\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$.

Геометрически этот факт очевиден: график функции $y=c$ представляет прямую, коллинеарную оси Ox (черт. 262). Касательная к ней в любой её точке совпадает с этой прямой и, следовательно, образует с осью Ox угол 0. Тангенс этого угла равен 0, т. е.

$$y'=\operatorname{tg} 0=0.$$

§ 116. Производная функции $y = x$

Теорема. *Производная функции* $y = x$ *равна* 1: $y = x$, $y' = 1$.

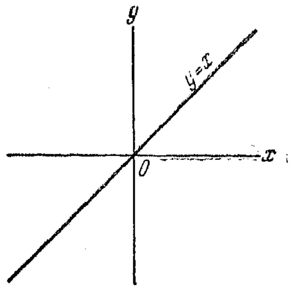
Доказательство.

1° $y = x$, $y + \Delta y = x + \Delta x$,

2° $\Delta y = \Delta x$,

3° $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x}$,

4° $y = \lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$



Черт. 263.

Геометрически картина следующая: график функции $y = x$ представляет биссектрису AB углов первой и третьей четвертей (черт. 263). Касательная к этой биссектрисе в любой её точке M совпадает с ней самой и образует с осью Ox угол $\frac{\pi}{4}$. Тангенс этого угла равен 1, т. е.

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

§ 117. Производная функции $y = \sin x$

Теорема. *Производная функции* $y = \sin x$ *равна* $\cos x$:

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x.$$

Доказательство. Имеем последовательно:

1° $y + \Delta y = \sin (x + \Delta x)$;

2° $\Delta y = \sin (x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \dfrac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$;

3° $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$;

4° $\lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim\limits_{\Delta x = 0} \cos \left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$

§ 118. Производная суммы функций

Теорема (*о производной суммы функций*). *Если в некоторой точке* x *функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *имеют производные и если эта точка* x *является предельной для области определения суммы* $u(x) + v(x)$ *этих функций, то производная от этой суммы в точке* x *существует и равна сумме производных слагаемых*:

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Доказательство. Имеем:

$$y = u + v,$$

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v,$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$y' = u' + v'.$$

Аналогично доказывается теорема для случая любого числа слагаемых.

Пример:
$$y = \sin x + x + 3,$$
$$y' = \cos x + 1.$$

§ 119. Производная функции $y = a^x$

Теорема. *Производная показательной функции a^x равна произведению этой функции на натуральный логарифм её основания:*

$$\text{если } y = a^x, \quad \text{то} \quad y' = a^x \ln a.$$

Доказательство. Имеем:

1° $y = a^x$, $y + \Delta y = a^{x + \Delta x}$;

2° $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$;

3° $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

Произведём в выражении

$$a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

замену

$$a^{\Delta x} - 1 = \alpha,$$

получим

$$\Delta x = \frac{\ln(1+\alpha)}{\ln a},$$

откуда

$$a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a \frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)}.$$

Написанное равенство верно при всех Δx, за исключением $\Delta x = 0$; при $\Delta x = 0$, $\alpha = 0$, а при $\Delta x \neq 0$, $\alpha \neq 0$; значит, на основании теоремы о пределе сложной функции предел функции

$$a^x \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

в точке $\Delta x = 0$ равен пределу функции

$$a^x \ln a \frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)}$$

в точке $\alpha = 0$. Итак,

$$y' = a^x \lim_{\Delta x = 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \lim_{\alpha = 0} \frac{\alpha \ln a}{\ln(1+\alpha)} =$$

$$= a^x \ln a \lim_{\alpha = 0} \frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)} = a^x \ln a \lim_{\alpha = 0} \frac{1}{\ln(1+\alpha)^{1/\alpha}}.$$

Но, в силу непрерывности логарифмической функции, имеем:

$$\lim_{\alpha = 0} \ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \ln e = 1$$

и окончательно:

$$y' = a^x \ln a.$$

В частности, при $a = e$ находим:

$$y = e^x, \quad y' = e^x \ln e = e^x,$$

т. е. функция e^x совпадает со своей производной.

§ 120. Производная произведения функций

Теорема. *Если в точке x функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные и если эта точка x является предельной для произведения $u(x)\,v(x)$ этих функций, то в точке x это произведение имеет производную, которая равна сумме произведений каждой из данных функций на производную другой:*

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

Доказательство. Положим

$$y = uv.$$

Приращению аргумента Δx соответствуют приращения Δu и Δv. Имеем последовательно:

1° $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v);$

2° $\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v;$

3° $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = u\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + (v + \Delta v)\dfrac{\Delta u}{\Delta x};$

4° $\lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = u \lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x = 0}(v + \Delta v) \lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x}.$

Но по определению производной

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v', \quad \lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'.$$

Из того, что функция v имеет производную, следует, что она непрерывна, значит

$$\lim_{\Delta x=0}(v+\Delta v)=v;$$

отсюда

$$y'=u'v+v'u.$$

Эту теорему легко распространить на случай любого числа множителей; например, если $y=uvu$, то

$$y'=u'vw+uv'w+uvw'$$

— штрих как бы поочерёдно «перескакивает» на каждый множитель. Доказательство предлагаем провести самостоятельно.

Пример 1. $y=a^x\sin x$,

$$y'=(a^x)'\sin x+a^x(\sin x)'=a^x\ln a\sin x+a^x\cos x.$$

Следствие. *Числовой множитель можно вынести за знак производной: если $y=cf(x)$, то $y'=cf'(x)$.*

Доказательство. Пусть $y=cf(x)$, где c — число. По теореме о дифференцировании произведения имеем:

$$y'=c'f(x)+cf'(x)=cf'(x),$$

так как $c'=0$.

Пример 2. 1) $y=5\sin x$, $y'=5\cos x$;
2) $y=7x$, $y'=7$.

§ 121. Производная частного двух функций

Теорема. *Пусть в точке x функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные, причём в этой точке функция $v(x)$ отлична от нуля*

$$v(x)\neq 0.$$

Пусть точка x — предельная для области определения частного

$$\frac{u(x)}{v(x)}.$$

Тогда это частное имеет производную в точке x, которая вычисляется по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

Таким образом, при сделанных выше оговорках производная частного равна дроби, знаменатель которой равен квадрату знамена-

теля данной дроби, а числитель равен разности между произведением производной числителя данной дроби на знаменатель и произведением производной знаменателя на числитель.

Доказательство. Приращению аргумента Δx соответствуют приращения функций Δu, Δv, Δy. Имеем последовательно:

$$1^\circ\quad y=\frac{u}{v},\quad y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v};$$

$$2^\circ\quad \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta u}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)};$$

$$3^\circ\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Переходим к пределу в точке $\Delta x=0$. При этом $\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'$, $\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$, $\lim\limits_{\Delta x=0}(v+\Delta v)=v$ — в силу непрерывности функции значит:

$$y'=\frac{vu'-uv'}{v^2}\qquad\text{ч. т. д.}$$

Отметим случай, когда $u=1$. Тогда

$$y=\frac{1}{v},\quad y'=\frac{1'\cdot v-1\cdot v'}{v^2}=-\frac{v'}{v^2}\text{*)}.$$

Примеры:

$$1)\ y=\frac{\sin x}{x},\quad y'=\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2};$$

$$2)\ y=\frac{a^x}{\sin x},\quad y'=\frac{a^x\ln a\cdot\sin x-\cos x\cdot a^x}{\sin^2 x};$$

$$3)\ y=\frac{1}{x},\quad y'=-\frac{1}{x^2};$$

$$4)\ y=\frac{1}{\sin x},\quad y'=\frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

---

*) Начинающие изучать анализ часто применяют следующий неудачный, хотя и верный способ нахождения производной дроби вида $y=\frac{u}{c}$, где u есть функция от x, а c — число.

Неудачный способ:

$$y'=\frac{u'c-uc'}{c^2}=\frac{c\cdot u'-u\cdot 0}{c^2}=\frac{cu'}{c^2}=\frac{u'}{c}.$$

Проще:

$$y=\frac{1}{c}\cdot u,\ y'=\frac{1}{c}u'.$$

Например,

$$y=\frac{\sin x}{10},\quad y'=\frac{\cos x}{10}.$$

§ 122. Производная сложной функции

Теорема (о производной сложной функции). *Если в точке x функция $\varphi(x)$ имеет производную $\varphi'(x)$, а в точке $u=\varphi(x)$ функция $f(u)$ имеет производную $f'(u)$, и если точка x предельная для функции $f[\varphi(x)]$, то производная от функции $f[\varphi(x)]$ в точке x существует и она равна $f'(u)\varphi'(x)$, где $u=\varphi(x)$:*

$$(f[\varphi(x)])'=f'(u)\varphi'(x), \quad \text{где} \quad u=\varphi(x).$$

Доказательство.

Так как

$$f'(u)=\lim_{\Delta u=0}\frac{\Delta f}{\Delta u},$$

то

$$\frac{\Delta f}{\Delta u}=f'(u)+\alpha,$$

где

$$\lim_{\Delta u=0}\alpha=0;$$

отсюда

$$\Delta f=f'(u)\,\Delta u+\alpha\,\Delta u.$$

Заметим, что при некоторых приращениях $\Delta x\neq 0$ приращение Δu может обратиться в нуль. В этих случаях равенство

$$\frac{\Delta f}{\Delta u}=f'(u)+\alpha$$

теряет смысл (деление на 0).

Однако равенство

$$\Delta f=f'(u)\,\Delta u+\alpha\,\Delta u$$

будет иметь смысл, если условиться, что $\alpha=0$ при $\Delta u=0$. Условие $\lim\limits_{\Delta u=0}\alpha=0$ при этом также будет выполняться.

Теперь разделим на Δx обе части равенства

$$\Delta f(u)=f'(u)\,\Delta u+\alpha\,\Delta u;$$

получим

$$\frac{\Delta f(u)}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу, получим:

$$(f[\varphi(x)])'=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta f(u)}{\Delta x}=$$
$$=f'(u)\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x=0}\alpha\cdot\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u)\varphi'(x).$$

Пример. $y=\sin u$, $u=a^x$, т. е. $y=\sin(a^x)$; тогда

$$y'=\cos u\,a^x\ln a=\cos(a^x)\cdot a^x\ln a.$$

Теорема верна и в более сложном случае. Пусть, например,

$$y=f(u), \quad u=\varphi(v), \quad v=\psi(x);$$

тогда

$$[f[\varphi[\psi(x)]]]'=f'(u)\varphi'(v)\psi'(x).$$

Пример

$$y=\sin u, \quad u=a^v, \quad v=x^3,$$

тогда

$$y=\sin(a^{x^3});$$

имеем

$$(\sin(a^{x^3}))'=(\sin u)'(a^v)'(x^3)'=\cos u\, a^v \ln a\, 3x^2=$$
$$=3x^2\ln a a^{x^3}\cos(a^{x^3}).$$

Применяя теорему о дифференцировании сложной функции, читатель должен возможно скорее освободиться от привычки вводить промежуточные функции u, v, w, ... Привычка вводить u, v, w, ... затягивает выкладки и заставляет терять из виду самый ход вычислений. Так, приведённый только что пример короче решается так:

$$\left(\sin a^{x^3}\right)'=\cos\left(a^{x^3}\right)\left(a^{x^3}\right)'=\cos\left(a^{x^3}\right)\cdot a^{x^3}\ln a\,(x^3)'=$$
$$=\cos\left(a^{x^3}\right)a^{x^3}\ln a\cdot 3x^2.$$

После некоторой тренировки читатель должен приучиться к следующей ещё более короткой записи:

$$\left(\sin a^{x^3}\right)'=\cos\left(a^{x^3}\right)a^{x^3}3x^2\cdot\ln a.$$

§ 123. Производная функции $y=\cos x$

Функцию $y=\cos x$ представим так:

$$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \quad \text{или} \quad y=\sin u, \quad \text{где} \quad u=\frac{\pi}{2}+x.$$

При этом

$$f'(u)=\cos u, \quad u'=1.$$

Следовательно,

$$y'=\cos u\cdot 1=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x,$$

т. е. если

$$y=\cos x, \quad \text{то} \quad y'=-\sin x,$$

и мы получили формулу для производной косинуса. Эту формулу можно вывести тем же способом, которым мы вывели формулу для производной от $\sin x$. Предлагаем читателю это сделать самостоятельно.

§ 124. Производные функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$

Пусть

$$y=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Тогда

$$y'=\operatorname{tg}' x=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

т. е. если $y=\operatorname{tg} x$, то $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Для функции $y=\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ получим:

$$f(u)=y=\operatorname{tg} u,\quad u=\frac{\pi}{2}-x,\quad f'(u)=\frac{1}{\cos^2 u},\quad u'=-1,$$

откуда

$$y'=\frac{1}{\cos^2 u}=-\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Если:

$$y=\operatorname{ctg} x,\ \text{то}\ y'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

§ 125. Производная обратной функции

Теорема (о производной обратной функции). *Если монотонная функция $y=f(x)$ имеет в точке x производную $f'(x)$, отличную от нуля, то обратная функция $x=\varphi(y)$ имеет производную в точке y, соответствующей рассматриваемому значению x и*

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна и монотонна, то и обратная ей функция $\varphi(y)$ также непрерывна и монотонна, а значит если $\Delta x\neq 0$, то $\Delta y\neq 0$ и обратно: если $\Delta y\neq 0$, то и $\Delta x\neq 0$.

Так как по условию функция $f(x)$ имеет производную, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha,$$

где

$$\lim_{\Delta x=0}\alpha=0.$$

Из написанного равенства находим (предполагаем, что $\Delta x\neq 0$, значит и $\Delta y\neq 0$):

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{f'(x)+\alpha}=\frac{1}{f'(x)}+\frac{1}{f'(x)+\alpha}-\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(x)}+\frac{-\alpha}{f'(x)[f'(x)+\alpha]}$$

и значит

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}-\frac{1}{f'(x)}\right|=\frac{|\alpha|}{|f'(x)||f'(x)+\alpha|}.$$

По условию $f'(x)\neq 0$. Выберем такое число $\delta_1>0$, что при всех $|\Delta x|<\delta_1$ было бы выполнено неравенство

$$|\alpha|<\frac{1}{2}|f'(x)|.$$

Тогда

$$|f'(x)+\alpha|>\frac{1}{2}|f'(x)|$$

и значит:

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}-\frac{1}{f'(x)}\right|<\frac{2|\alpha|}{(f'(x))^2}.$$

Возьмём ещё число $\delta_2>0$ такое, что при всех $|\Delta x|<\delta_2$ будем иметь:

$$|\alpha|<\frac{1}{2}\varepsilon(f'(x))^2,$$

где ε — произвольное сколь угодно малое положительное число. Тогда, если δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2, то

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}-\frac{1}{f'(x)}\right|<\frac{2|\alpha|}{|f'(x)|^2}<\frac{2}{|f'(x)|^2}\,\frac{(f'(x))^2}{2}\,\varepsilon=\varepsilon$$

при всех $|\Delta x|<\delta$. В силу непрерывности функции $\varphi(y)$ можно всегда найти такое число $\eta>0$, что при $|\Delta y|<\eta$ мы будем иметь $|\Delta x|<\delta$, а следовательно,

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}-\frac{1}{f'(x)}\right|<\varepsilon.$$

Итак: для любого $\varepsilon>0$ можно найти число $\eta>0$, что если $|\Delta y|<\eta$, то

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}-\frac{1}{f'(x)}\right|<\varepsilon,$$

а это значит, что

$$\lim_{\Delta y=0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{f'(x)} \quad \text{или} \quad \varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

§ 126. Производные функций $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$

Теорема 1. *Производная функции* $y=\arcsin x$ *равна*

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

если $y=\arcsin x$, *то* $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доказательство. Для функции $\arcsin x$ обратной является $\sin y$. Имеем: $(\sin y)' = \cos y$, откуда на основании теоремы о производной от обратной функции получим:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y}.$$

Из определения функции $\arcsin x$ следует, что $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$; при этом условии $\cos y \geqslant 0$, значит $\cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$, а потому $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Замечание. Производная y' функции $\arcsin x$ определена для всех x, по модулю меньших 1, т. е. для всех x, лежащих внутри сегмента $[-1, 1]$, на котором определена функция $\arcsin x$. При $x = \pm 1$ функция $\arcsin x$ не имеет производной.

Теорема 2. *Производная функции* $\arccos x$ *равна* $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; *если* $y = \arccos x$, *то* $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доказательство. Функция $x = \cos y$ служит обратной для $y = \arccos x$. Имеем: $(\cos y)' = -\sin y$, значит

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin y};$$

так как $0 \leqslant y \leqslant \pi$, то $\sin y \geqslant 0$, следовательно,

$$\sin y = +\sqrt{1-\cos^2 y} = +\sqrt{1-x^2},$$

а потому

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Замечание. Функция $\arccos x$, как и функция $\arcsin x$, имеет производную только при любом x, по модулю меньшем единицы; при $x = \pm 1$, т. е. на границах сегмента $[-1, 1]$, эта функция не имеет производной.

§ 127. Производные функций $y = \operatorname{arc\,tg} x$ и $y = \operatorname{arc\,ctg} x$

Теорема 1. *Производная функции* $y = \operatorname{arc\,tg} x$ *равна* $\frac{1}{1+x^2}$; *если* $y = \operatorname{arc\,tg} x$, *то* $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

Доказательство. Функция $x = \operatorname{tg} y$ служит обратной для функции $y = \operatorname{arc\,tg} x$; имеем:

$$(\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2,$$

откуда

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Теорема 2. *Производная функции* $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ *равна* $-\frac{1}{1+x^2}$; *если* $y=\operatorname{arc\,ctg} x$, *то* $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Доказательство. Функция $x=\operatorname{ctg} y$ служит обратной для функции $y=\operatorname{arc\,ctg} x$; имеем:

$$(\operatorname{ctg} y)' = -\frac{1}{\sin^2 y} = -(1+\operatorname{ctg}^2 y) = -(1+x^2),$$

откуда

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Замечание. Сравнивая производные функций $\arcsin x$ и $\arccos x$, мы замечаем, что они отличаются знаком. Отсюда

$$(\arcsin x + \arccos x)' = 0.$$

Этот результат объясняется известной из тригонометрии формулой: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ и тем, что производная постоянной функции равна нулю.

Аналогично, так как $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}$, то

$$(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x)' = 0,$$

т. е.

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -(\operatorname{arc\,tg} x)'.$$

§ 128. Производная функции $y=\lg_a x\ (a>0)$

Теорема. *Производная функции* $y=\lg_a x$ *равна* $\frac{1}{x\ln a}$; *если* $y=\ln_a x$, *то* $y'=\frac{1}{x\ln a}$.

Доказательство. Для функции $y=\lg_a x$ обратной служит функция $x=a^y$. Для этой последней имеем

$$(a^y)' = a^y \ln a = x\ln a,$$

откуда

$$y' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{x\ln a}.$$

В частности, если $a=e$, то $y=\ln x$, и мы получим:

$$y' = \frac{1}{x}.$$

Рассмотрим ещё функцию $y=\lg_a|x|$.

При $x>0$ имеем $|x|=x$ и, следовательно,

$$y=\lg_a x.$$

Для этого случая производная уже определена:

$$y'=\frac{1}{x\ln a}.$$

Пусть $x<0$, тогда $|x|=-x$, где $-x>0$. Функцию

$$y=\lg_a|x|=\lg_a(-x)$$

будем рассматривать как сложную:

$$y=\lg_a u, \quad \text{где} \quad u=-x.$$

На основании теоремы о производной сложной функции получим:

$$(\lg_a(-x))'=\frac{1}{(-x)\ln a}\cdot(-1)=\frac{1}{x\ln a};$$

итак, $\frac{1}{x\ln a}$ является производной функции

$$y=\lg_a|x|.$$

В частности, при $a=e$ получим:

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}.$$

Эта формула верна для любого $x\neq 0$.

§ 129. Логарифмическое дифференцирование

Иногда нахождение производной функции $y=f(x)$ упрощается, если её предварительно прологарифмировать. Такой приём отыскания производных называется **логарифмическим дифференцированием**. Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную при некотором значении x и пусть она при этом значении x отлична от нуля. Имеем: $\ln|y|=\ln|f(x)|$ и, применяя правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$(\ln|y|)'=\frac{y'}{y},$$

откуда

$$y'=y(\ln|y|)'.$$

Замечание. Производная $\ln|y|$ равна $\frac{y'}{y}$, т. е. тому же самому выражению, которое мы получим, если опустим знак модуля в выражении $\ln|y|$, т. е. рассмотрим выражение $\ln y$ и возьмём производную от этого логарифма формально; тогда мы получим $\frac{y'}{y}$. Поэтому при отыскании производных указанным приёмом можно формально логарифмировать функцию, не заботясь о том, положительна она или отрицательна, но заботясь лишь о том, чтобы $f(x)$ не обращалась в нуль. Если $f(x)=0$, то логарифмическое дифференцирование незаконно.

Пример 1.

$$y=\sqrt{\frac{x-1}{(x+1)^3}};$$

логарифмируем эту функцию:

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{3}{2}\ln(x+1).$$

Вычислим произвольную от $\ln y$:

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{2(x+1)}=\frac{2-x}{x^2-1},$$

откуда

$$y'=y\frac{2-x}{x^2-1}=\frac{2-x}{x^2-1}\sqrt{\frac{x-1}{(x+1)^3}}.$$

Пример 2. $y=uvw$, где u, v, w — функции от x. Возьмём логарифм функции y:

$$\ln y=\ln u+\ln v+\ln w;$$

отсюда

$$\frac{y'}{y}=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w},$$

$$y'=y\left(\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w}\right)=uvw\left(\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w}\right).$$

Пример 3.

$$y=\frac{u}{v},\text{ где } u \text{ и } v \text{ — функции от } x.$$

Как и раньше, имеем последовательно:

$$\ln y=\ln u-\ln v,$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}=\frac{u'v-v'u}{uv},$$

$$y'=y\frac{u'v-v'u}{uv}=\frac{u}{v}\,\frac{u'v-v'u}{uv}=\frac{u'v-uv'}{v^2},$$

и мы приходим к формуле производной дроби, которая уже была выведена другим способом.

§ 130. Производная функции x^{α}

Теорема. *Производная функции x^{α} равна $\alpha x^{\alpha-1}$; если $y=x^{\alpha}$, то $y'=\alpha x^{\alpha-1}$.*

Доказательство. $\ln y=\alpha\ln x$, откуда

$$y=e^{\alpha\ln x}$$

и значит

$$y' = e^{\alpha \ln x} \,|\, \alpha \ln x \,|\,' = x^{\alpha} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Примеры. 1) $y = x^5$, $y' = 5x^4$;

2) $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, $\quad y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

3) $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $\quad y' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$;

4) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$, $y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$;

5) $y = x^{\sqrt{2}}$, $\quad y' = \sqrt{2}\, x^{\sqrt{2} - 1}$;

6) $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$,

$y' = n a_0 x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$;

7) $(\sin^5 x)' = 5 \sin^4 x \cos x$;

8) $[(\arcsin \sqrt{1 - x^2})^3]' =$

$$= 3(\arcsin \sqrt{1 - x^2})^2 (\arcsin \sqrt{1 - x^2})' =$$

$$= 3 (\arcsin \sqrt{1 - x^2})^2 \frac{1}{\sqrt{1 - 1 + x^2}} (\sqrt{1 - x^2})' =$$

$$= \frac{3 (\arcsin \sqrt{1 - x^2})^2}{|x|} \left((1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{(\arcsin \sqrt{1 - x^2})^2}{|x|} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{3x (\arcsin \sqrt{1 - x^2})^2}{|x| \sqrt{1 - x^2}}.$$

§ 131. Таблица формул для производных

Приведём сводку полученных формул

1. $y = u + v$, $\quad y' = u' + v'$;
2. $y = uv$, $\quad y' = u'v + v'u$.

В частности:

2'. $y = cu$ (c — число); $y' = cu'$.

3. $y = \frac{u}{v}$, $\quad y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

3'. $y = \frac{1}{v}$, $\quad y' = -\frac{v'}{v^2}$.

4. $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, $[f(\varphi(x))]'=f'(u)\,\varphi'(x)$.
5. $y=c$ (c — число), $y'=0$.
6. $y=x^{\alpha}$, $y'=\alpha x^{\alpha-1}$.
6′. $y=x$, $y'=1$.
6″. $y=\sqrt{u}$, $y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
7. $y=a^x$, $y'=a^x\ln a$.
7′. $y=e^x$, $y'=e^x$.
8. $y=\lg|x|$, $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$.
8′. $y=\ln|x|$, $y'=\dfrac{1}{x}$.
9. $y=\sin x$, $y'=\cos x$.
10. $y=\cos x$, $y'=-\sin x$.
11. $y=\operatorname{tg} x$, $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.
12. $y=\operatorname{ctg} x$, $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
13. $y=\arcsin x$, $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $y=\arccos x$, $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
15. $y=\operatorname{arc\,tg} x$, $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$.
16. $y=\operatorname{arc\,ctg} x$, $y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

17. Если $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ взаимно обратные функции, то $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$, если $\varphi'(y)\neq 0$.

Упражнения

291. Вывести формулы для производных $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ непосредственно, т. е. находя последовательно:

$$y+\Delta y,\ \Delta y,\ \frac{\Delta y}{\Delta x}\ \text{ и }\ \lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

292. Найти производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$;
2) $y=2\sin 4x$;
3) $y=\sin x^2$;
4) $y=\sqrt{1-\operatorname{tg} x}$;
5) $y=\sqrt[3]{x^2-1}$;
6) $u=\dfrac{2v^3}{1-v^2}$;
7) $z=(1-y)^{21}$;
8) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;
9) $y=\sin^2\dfrac{x}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;
10) $y=(\arccos x)^3$;
11) $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$;
12) $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$;
13) $y=x\arcsin x$;
14) $y=\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} x\right)$;
15) $y=\lg(x^2+1)$;
16) $y=\sqrt{\ln x}$;

17) $y=x^2\ln x$;
18) $y=\ln(x^2)$;
19) $y=\ln\operatorname{tg}x$;
20) $y=\sin(\ln x)$;
21) $y=\frac{1}{\ln x}$;
22) $y=\ln\ln x$;
23) $y=2^x$;
24) $y=\frac{1}{5^x}$;
25) $y=\cos(3^x)$;
26) $y=\frac{x}{2^x}$;
27) $y=5^{2x-\sqrt{x}}$;
28) $y=\frac{\ln x}{2^x}$;
29) $y=(x^2-1)(x^3+1)(x-1)$;
30) $y=e^x\sin x\ln x$;
31) $y=\sqrt[5]{(x+1)(x-1)}$;
32) $y=\sqrt[3]{\frac{x\sqrt{x+1}}{x^2+1}}$;
33) $y=x^x$;
34) $y=\sqrt{\frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$;
35) $y=\frac{x(x-1)\sin x}{e^x(x^2+1)}$;

36) Из формул $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ вывести дифференцированием формулы, выражающие $\cos 2x$ и $\sin 3x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

293. Исходя из того, что для функции $\arcsin\sqrt{x}$ обратной функцией служит $\sin^2 x$ (докажите!), причём

$$(\sin^2 x)'=\sin 2x,$$

найти производную

$$(\arcsin\sqrt{x})'.$$

294. Исходя из того, что для функции $y=\ln\sqrt{1+x^2}$ обратной функцией является функция $\sqrt{e^{2x}-1}$ (докажите!), причём

$$(\sqrt{e^{2x}-1})'=\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}},$$

найти производную

$$(\ln\sqrt{1+x^2})'.$$

295. Доказать, что производная чётной дифференцируемой функции есть нечётная функция, а производная нечётной функции есть чётная функция.

296. Будет ли функция

$$y=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } =0\end{cases}$$

непрерывна и дифференцируема при $x=0$?

297. Будет ли функция

$$y=\begin{cases} \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0\end{cases}$$

непрерывна и дифференцируема при $x=0$?

Будет ли функция

$$y = \begin{cases} x \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

непрерывна и дифференцируема при $x=0$?

298. Будет ли функция

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

непрерывна и дифференцируема при $x=0$?

§ 132. Производная неявной функции

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0$$

относительно x и y. Такое уравнение имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений. Полагая $x=a$, получим уравнение

$$F(a, y) = 0$$

относительно y. Пусть $y=b$ — его решение*).

Если для значения $x=a$ уравнение $F(a, y)=0$ не имеет решения относительно y, то это значение a мы исключаем из рассмотрения.

Пара чисел

$$x=a, \quad y=b$$

является решением уравнения $F(x, y)=0$. Итак: каждому значению $x=a$ из некоторого множества соответствует значение $y=b$, а это и означает, что y есть функция от x:

$$y=f(x).$$

Если мы в левую часть уравнения подставим $f(x)$ вместо y, то она станет равной правой части уравнения, т. е. равной числу 0.

Функция $y=f(x)$ называется *решением* уравнения $F(x, y)=0$, причём говорят, что функция $f(x)$ задана неявно при помощи уравнения

$$F(x, y) = 0.$$

Замечание. Обращаем внимание на то, что фраза «решение уравнения» $F(x, y)=0$ применялась в двух смыслах:

«решение» в смысле «пара чисел a, b, удовлетворяющих уравнению

$$F(x, y)=0\text{»};$$

*) Если для $x=a$ окажется несколько решений, то выбираем одно из них, любое.

«решение» в смысле «функция $f(x)$, удовлетворяющая тому же уравнению».

Может случиться, что во втором смысле будет только одно решение — одна определённая функция, а решений в первом смысле — бесконечное множество.

Определение. *Функция $f(x)$, заданная уравнением*

$$F(x, y) = 0,$$

не разрешённым относительно y, называется неявной функцией.

Пример 1. Уравнение

$$2x - 3y - 4 = 0$$

определяет неявную функцию; разрешив уравнение относительно y, получим:

$$y = \frac{2x-4}{3};$$

эта функция и является решением уравнения.

Подставив её в левую часть уравнения, получим:

$$2x - 3y - 4 = 2x - 3\,\frac{2x-4}{3} - 4 \equiv 0.$$

Пример 2. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

определяет неявную функцию

$$y = f(x).$$

Разрешив его относительно y, получим функцию:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Подставив это решение в левую часть уравнения, мы действительно убедимся в том, что оно удовлетворяет данному уравнению:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)^2}{b^2} - 1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2(x^2-a^2)}{a^2b^2} - 1 \equiv 0.$$

Из наших рассуждений отнюдь не следовало, что для уравнения $F(x, y) = 0$ существует только одна функция, являющаяся его решением. Вообще говоря, уравнение $F(x, y) = 0$ может иметь несколько решений, даже бесконечное множество, так же как может оказаться, что уравнение не будет иметь ни одного решения. В примере 2 решением будет, например, также функция

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

в чём легко убедиться проверкой.

Пример 3. Уравнение

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

не имеет решения, так как $x^2 + y^2 + 1 > 0$ при любых x и y (действительных).

Далее не всегда можно решение $y = f(x)$ уравнения $F(x, y) = 0$ представить посредством некоторого данного аналитического аппарата; часто это сложно, нежелательно или даже невозможно.

Поставим следующий вопрос: пусть существует функция $f(x)$, являющаяся решением уравнения $F(x, y)=0$, причём эта функция имеет производную *).

Как, не находя функции $f(x)$, найти её производную?

Покажем на примерах, как это делается.

Пример 4. Пусть функция $f(x)$ определяется уравнением

$$2x-3y-4=0.$$

Будем считать, что в левую часть этого уравнения вместо y подставлено решение $f(x)$. Тогда левая часть при любых значениях x, y окажется равной правой, т. е. равной числу 0. Следовательно, производная левой части (равная производной постоянной функции) равна 0. Находим производную от левой части по x, имея в виду, что y есть функция от x (правда, неизвестная нам), и приравниваем полученный результат нулю:

$$2-3y'=0;$$

отсюда

$$y'=\frac{2}{3}.$$

Проверка: функция $y=\frac{2x-4}{3}$ является решением данного уравнения. Найдём её производную:

$$y'=\frac{2}{3}.$$

Пример 5. Функция $f(x)$ определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Как и раньше, считаем, что в левую часть вместо y подставлена функция $f(x)$, являющаяся решением данного уравнения. Тогда левая часть уравнения, т. е. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$, где $y=f(x)$, обращается в нуль при любом значении x.

Приравнивая нулю производную левой части (применяем теорему о производной сложной функции), получим:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0,$$

откуда

$$y'=\frac{-b^2x}{a^2y}.$$

Проверка. Функция

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

является решением данного уравнения (правда, не единственным). Найдём производную этой функции:

$$y'=\frac{b}{a}\,\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-b^2x}{a^2\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)}=\frac{-b^2x}{a^2y}.$$

---

*) Выяснение условий, когда это имеет место, выходит из рамок настоящего курса.

Отметим, что при отыскании производной неявной функции в выражение для производной входит и x и y; при этом нужно помнить, что в этом выражении y означает функцию $f(x)$, являющуюся тем решением (может и неизвестным) уравнения $F(x, y)=0$, производную которого мы ищем.

Если бы мы в последнем примере под буквой y подразумевали функцию $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, то для производной y мы получили такой же по форме ответ: $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$, но теперь y означает фукцию $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, а y' — её производную.

Пример 6. Функция $f(x)$ определяется уравнением:

$$y^2\sin(x+y)+a^y-7y=0.$$

Рассматривая y как функцию от x, получим

$$2yy'\sin(x+y)+y^2\cos(x+y)(1+y')+a^y\ln a y'-7y'=0,$$

откуда

$$y'=\frac{-y^2\cos(x+y)}{2y\sin(x+y)+y^2\cos(x+y)+a^y\ln a-7}.$$

Упражнения

299. Найти производные следующих неявных функций:

1) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$;
2) $x^3+y^3-3axy=0$;
3) $x^y=y^x$;
4) $\rho^2\cos\varphi-a^2\sin 3\varphi=0$, найти ρ';
5) $\ln u=\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}$, найти v'.

300. Равенство $x^2-2x-3=x-3$ верно при $x=3$. Будет ли при том же значении x иметь место равенство $(x^2-2x-3)'=(x-3)'$. Выяснить ответ геометрически.

§ 133. Касательная к линии

Пусть линия L является графиком функции $y=f(x)$ и $M(a, b)$ — любая точка, лежащая на линии.

Мы показали, что уравнение касательной к линии L в точке M имеет вид: $y-b=k(x-a)$, где угловой коэффициент k касательной AB к линии L в точке M определяется равенством

$$k=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}.$$

Этот предел есть значение производной $f'(x)$ в точке $x=a$, т. е.

$$k=f'(a).$$

Итак, уравнение касательной к линии L в точке (a, b) имеет вид:

$$y-b=f'(a)(x-a).$$

Пример 1. Найти уравнение касательной к синусоиде $y=\sin x$ в точке M, абсцисса которой равна $\frac{\pi}{6}$.

Решение. Угловой коэффициент k касательной в точке M равен значению производной при $x=\frac{\pi}{6}$, т. е.

$$k=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

следовательно, уравнение касательной:

$$y-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{или} \quad y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$$

Пример 2. В какой точке касательная к параболе $y=x^2+3x-1$ параллельна прямой $y=4x-1$.

Решение. Угловой коэффициент касательной в произвольной точке параболы равен

$$k=y'=2x+3.$$

По условию

$$2x+3=4,$$

откуда $x=\frac{1}{2}$; далее: $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\frac{1}{2}-1=\frac{3}{4}$. Итак, искомое уравнение имеет вид:

$$y-\frac{3}{4}=4\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

или

$$16x-4y-5=0.$$

Пример 3. Найти уравнение касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в точке эллипса $M_0(x_0, y_0)$.

Решение. Найдём производную функции y, заданной неявно уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Имеем:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0, \quad \text{откуда} \quad y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Следовательно, угловой коэффициент k касательной равен:

$$k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0},$$

и уравнение касательной примет вид:

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0) \quad \text{или} \quad \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}.$$

Так как точка (x_0, y_0) лежит на эллипсе, то её координаты удовлетворяют уравнению эллипса, т. е. $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$. Окончательно получим следующее уравнение касательной:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Это уравнение было получено ранее (см. § 35) иным путём и на основании иного определения касательной.

§ 134. Нормаль к линии

Нормалью к линии L в точке $M(x_0, y_0)$ называется прямая CD, проходящая через точку M и перпендикулярная к касательной AB, проведённой к линии L в точке M. Так как $AB \perp CD$, то $k_{\text{кас}} \cdot k_{\text{норм}} = -1$ или $k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$, если $f'(x_0) \neq 0$ и уравнение нормали к линии L в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Если $f'(x_0) = 0$, то касательная параллельна оси Ox, а следовательно, нормаль параллельна оси Oy и её уравнение

$$x = x_0.$$

Пример 1. Найдём уравнение нормали к параболе

$$y = ax^2 + bx + c$$

в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Имеем последовательно

$$y' = 2ax + b, \quad f'(x_0) = 2ax_0 + b, \quad k_{\text{норм}} = -\frac{1}{2ax_0 + b}$$

и уравнение нормали:

$$y - y_0 = -\frac{1}{2ax_0 + b}(x - x_0).$$

Упражнения

301. Найти уравнение касательной и нормали в заданной точке к каждой из следующих линий:

1) $y = \frac{3x}{x+1}$ в точке $(2, 2)$,
2) $y^2 - 2y + 3x = 8$ в точке $(3, 1)$,
3) $xy = 12$ в точке $(3, 4)$.

302. Найти угол, под которым пересекаются линии

$$y^2 = x^3 - 4, \quad x^2 + y^2 - 6x + y = 0.$$

Указание. Согласно определению две линии пересекаются в точке M под углом α, если касательные (или нормали), проведённые к этим линиям в точке M, образуют угол α.

303. Под каким углом пересекаются линии $y = a^x$ и $y = b^x$, $a \neq b$?

304. К линии $y = \frac{1}{2}e^x + 1$ провести касательную, параллельную прямой $x - 2y + 1 = 0$.

305. Доказать, что эллипс $3x^2 + 4y^2 = 27$ и гипербола $5x^2 - 4y^2 = 5$ пересекаются под прямым углом.

306. Провод высоковольтной линии передачи электрического тока имеет пролёт между опорами 80 *м* и уравнение линии провеса провода $y = 0{,}001x^2$. Найти угол между проводами у каждой опоры.

307. Под каким углом линия $y = \sin x$ пересекает ось Ox?

§ 135. Дифференциал функции

Определение. *Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x, если эта точка предельная для области её определения и если её приращение*

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

может быть представлено в виде суммы линейной функции

$$A\,\Delta x \ (A \text{ — число})$$

относительно Δx и слагаемого $\alpha\,\Delta x$, где предел α в точке $\Delta x = 0$ равен 0:

$$\lim_{\Delta x = 0} \alpha = 0.$$

Например, функция

$$y = x^3$$

дифференцируема при любом значении x, так как

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + \Delta x\,(3x\,\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2 \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где

$$\lim_{\Delta x = 0} \alpha = \lim_{\Delta x = 0} (3x\,\Delta x + \Delta x^2) = 0.$$

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема при некотором значении x, т. е. $\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x = 0} \alpha = 0$, то число A равно значению производной функции $f(x)$ в рассматриваемой точке x.*

Доказательство:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha,$$

откуда

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A \quad \text{или} \quad f'(x) = A.$$

Теорема 2 (*обратная*). *Если при некотором значении x функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$, равную некоторому числу A, то при рассматриваемом значении x функция $f(x)$ дифференцируема.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, где $f'(x)$ — некоторое число, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

где $\lim\limits_{\Delta x = 0} \alpha = 0$. Из последнего соотношения находим:

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x.$$

Определение. *Если функция $f(x)$ дифференцируема при некотором значении x*, т. е.

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha\,\Delta x, \quad \text{где} \quad \lim_{\Delta x = 0} \alpha = 0,$$

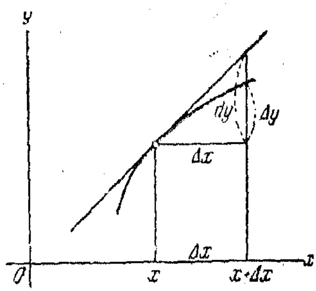
то линейная функция $A\,\Delta x$ приращения функции называется дифференциалом функции $f(x)$ и обозначается через dy:

$$dy = A\,\Delta x.$$

По доказанному $A = f'(x)$, так что

$$dy = f'(x)\,\Delta x,$$

т. е. *дифференциал функции $f(x)$ есть произведение её производной на приращение аргумента x.*



Черт. 264.

Определение. *Дифференциалом dx аргумента x будем называть его приращение:*

$$dx = \Delta x;$$

тогда

$$dy = f'(x)\,dx,$$

т. е. *дифференциал функции равен произведению производной на дифференциал аргумента.* Из последней формулы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

т. е. *производная функция равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента.*

Покажем, в чём геометрический смысл дифференциала.

Пусть $Y - y = f'(x)(X - x)$ — уравнение касательной к линии $y = f(x)$ в точке x. Разность $X - x = \Delta x$ есть приращение аргумента. Значит,

$$Y - y = f'(x)\,\Delta x = dy,$$

т. е. дифференциал функции равен приращению $Y - y$ ординаты касательной к линии $y = f(x)$ в рассматриваемой точке (черт. 264).

Из соотношения

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha\,\Delta x \quad \text{или} \quad \Delta y = dy + \alpha\,\Delta x,$$

связывающего дифференциал функции и приращение функции, следует, что

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \alpha = 0.$$

Предположим, что в рассматриваемой точке производная $f'(x)$ не равна нулю. Тогда

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y-dy}{\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x}=\frac{1}{f'(x)}\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y-dy}{\Delta x}=0,$$

т. е. если в некоторой точке производная $f'(x)$ не равна нулю, то приращение можно приближённо заменить дифференциалом dy со сколь угодно малой относительной погрешностью

$$\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}.$$

Пример 1. Дифференциал функции

$$y=ax^2+bx+c$$

есть

$$dy=(2ax+b)\,dx.$$

Пример 2. Дифференциал функции $y=\sin x$ есть

$$dy=\cos x\,dx.$$

Пример 3. Найти приближённо приращение функции $y=\ln x$, если начальное значение $x=100$, а конечное значение $x=100{,}1$. Имеем

$$\Delta y\approx dy=f'(x)\,\Delta x=f'(100)\cdot 0{,}1=\frac{1}{100}\cdot 0{,}1=0{,}001;$$

фактически $\Delta y-dy=\ln 100{,}1-\ln 100=\ln 1{,}001$.

Пример 4. Пусть дана функция $y=\frac{1}{x}$. Найдём приближённое приращение, если начальное значение $x=1$, а конечное $x=1+\alpha$; имеем последовательно:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2},\quad f'(1)=-1,\quad \Delta x=\alpha;$$

отсюда

$$\Delta y=\frac{1}{1+\alpha}-1\approx dy=f'(1)\,\Delta x=-1\cdot\alpha=-\alpha;$$

$$\text{или}\quad \frac{1}{1+\alpha}-1\approx-\alpha\quad\text{или}\quad\frac{1}{1+\alpha}\approx 1-\alpha.$$

Относительная погрешность этого равенства будет сколь угодно малой при достаточно малом α.

В частности, при $\alpha=0{,}01$ имеем:

$$\frac{1}{1+\alpha}=\frac{1}{1{,}01}=0{,}9901;\quad 1-\alpha=0{,}9900.$$

В приведённых рассуждениях о приближённых равенствах имеется существенный дефект: не дано оценки ошибки, которую мы совершаем, если заменяем приращение Δy дифференциалом dy. Эта сторона вопроса будет рассмотрена в главе о рядах.

Вычислим дифференциал сложной функции:

$$y=f(u),\quad\text{где}\quad u=\varphi(x).$$

По определению имеем:

$$dy = (f[\varphi(x)])'\,dx = f'(u)\,\varphi'(x)\,dx.$$

По определению дифференциала имеем:

$$du = \varphi'(x)\,dx$$

и окончательно для дифференциала dy получим:

$$dy = f'(u)\,du.$$

Отметим, что выражение для дифференциала dy сложной функции получилось такое же, как если бы u было не промежуточной функцией, а аргументом. Этим доказана следующая теорема об инвариантности дифференциала.

Теорема 3. *Дифференциал функции $y = f(u)$ равен произведению функции на дифференциал du аргумента.* Это верно и тогда, когда аргумент в свою очередь является функцией другого аргумента x, т. е. $u = \varphi(x)$.

Например, если

$$y = \operatorname{tg} u + u^2,$$

то

$$dy = \left(\frac{1}{\cos^2 u} + 2u\right) du;$$

если здесь u есть некоторая функция от x, то du означает не приращение Δu, а дифференциал этой функции, т. е. произведение $\varphi'(x)\,\Delta x$ (которое в общем случае не равно приращению Δu аргумента u).

Упражнения

308. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 - x$ при $x = 10$ и $\Delta x = 0{,}1$. Вычислить абсолютную и относительную погрешность при замене приращения дифференциалом; сделать чертёж.

Примечание. Абсолютная ошибка равна $\alpha = |\Delta y - dy|$; относительная:

$$\delta = \frac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|}.$$

309. Сторона квадрата равна 8 *см*. На сколько увеличится его площадь, если каждую сторону увеличить на 1) 0,5 *см*, 2) 1 *см*, 3) 0,1 *см*? Найти дифференциал приращения площади этого квадрата и оценить относительную ошибку при замене приращения дифференциалом.

310. $y = x^4 - 5x^2 + 4x + 2$. Найти приближённо $f(1{,}06)$.

311. Найти приближённо $\operatorname{tg} 45°4'30''$.

312. Найти приближённо $\lg\sin 44°54'$, зная, что $\lg\sin 45° = \bar{1},84949$.

313. Из формулы для площади s круга и длины l окружности:

$$s = \pi r^2, \quad l = 2\pi r$$

следует $\frac{ds}{dr} = l$. Объяснить геометрический смысл этого результата.

314. Из формул для объёма v и поверхности s шара следует $\frac{dv}{dr} = s$. Объяснить геометрический смысл этого результата.

§ 136. Производные высших порядков

Дана функция $f(x)$. Её производная $f'(x)$ в свою очередь является функцией x. Для неё можно найти производную (если она существует).

Эта производная называется производной второго порядка или второй производной от функции $f(x)$ и записывается так: y'' (читается «игрек два штриха от икс») или $f''(x)$, или $\frac{d^2y}{dx^2}$ (читается «дэ два игрек по дэ икс квадрат»).

Пример 1. $y = ax^3 - \sin x,$
$y' = 3ax^2 - \cos x,$
$y'' = 6ax + \sin x.$

Пример 2. $y = e^x - x + \ln x,$
$$y' = e^x - 1 + \frac{1}{x},$$
$$y'' = e^x - \frac{1}{x^2}.$$

Пример 3. Пусть $s = f(t)$ есть уравнение движения тела, движущегося по прямой.

Мы уже выяснили, что скорость v тела есть производная от пути по времени:
$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Отношение приращения $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ скорости к приращению времени t называется средним ускорением a за промежуток времени от t до $t + \Delta t$.

Оно характеризует быстроту изменения скорости за промежуток времени Δt.

Предел среднего ускорения в точке $\Delta t = 0$ называется ускорением в данный момент времени t:
$$a = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

т. е. a есть производная от скорости по времени или вторая производная от пути по времени $a = v' = s''$.

Пример 4. Уравнение колебательного движения:
$$s = A \sin t.$$

Находим скорость:
$$v = A \cos t$$

и ускорение
$$a = -A \sin t.$$

Отметим, что $a = -s$, т. е. в рассматриваемом колебательном движении ускорение a по абсолютной величине равно пути s и отличается от s знаком.

Производная от второй производной называется третьей производной или производной 3-го порядка. Производная от третьей производной называется производной 4-го порядка и т. д.

Определение. *Производной n-го порядка называется производная от производной $n - 1$-го порядка.*

Эти производные обозначают символами

$$y''',\ y^{(4)}, \ldots,\ y^{(n)}$$

или

$$\frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}$$

или

$$f'''(x),\ f^{(4)}(x), \ldots,\ f^{(n)}(x).$$

Пример 5. Если $y=x^m$, то $y'=mx^{m-1}$,

$$y''=m(m-1)x^{m-2}, \ldots,\ y^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

Для натурального числа m производная m-го порядка от функции x^m есть число

$$y^{(m)}=1\cdot 2\cdot 3\cdots m$$

и, значит, $y^{(m+1)}$ и все следующие производные равны нулю:

$$y^{(m+1)}=y^{(m+2)}=\cdots=0.$$

Пример 6. $y=\sin x$,

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$

. . . .

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Пример 7.

$$y=a^x,\quad y'=a^x\ln a,\quad y''=a^x(\ln a)^2, \ldots,\quad y^{(n)}=a^x(\ln a)^n;$$

в частности, если $y=e^x$, то $y'=y''=\cdots=e^x$.

Пример 8. Для функции $y=\ln|x|$ находим:

$$y'=\frac{1}{x}=x^{-1},\quad y''=-x^{-2},\quad y'''=1\cdot 2x^{-3}, \ldots,\quad y^{(n)}=(-1)^{-n}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Пример 9. Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$ для функции y, заданной уравнением

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Решение. Имеем $2b^2x+2a^2yy'=0$,

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$y''=-\frac{b^2}{a^2}\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{y+x\frac{b^2x}{a^2y}}{y^2}=-\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3}=-\frac{b^2a^2b^2}{a^4y^3}=$$

$$=-\frac{b^4}{a^2y^3}=-\frac{b^4}{a^2}y^{-3},$$

$$y'''=\frac{3b^4}{a^2}y^{-4}y'=\frac{3b^4}{a^2y^4}\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)=-\frac{3b^6x}{a^4y^5}.$$

Упражнения

315. $y=x^3-2x^2+4x-1$. Найти y'', y''', $y^{(4)}$.
316. $y=(x-1)^5$. Найти $y^{(4)}$.

317. $y=\frac{a}{x^7}$. Найти $y^{(5)}$.

318. $y=\frac{x}{\sqrt{x+2}}$. Найти y''.

319. Найти y'' для функций, заданных уравнениями:

$$1)\ ax^2+2hxy+by^2=1; \quad 2)\ x+y=e^{x-y}.$$

320. Пользуясь тождеством

$$\frac{4x-11}{x^2-4x+3}=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-8} \quad \text{(проверьте!)},$$

найти

$$\frac{d^5}{dx^5}\left(\frac{2x}{x^2-4x+3}\right).$$

321. $y=e^x\cos x$. Найти $y^{(6)}$.
322. $y=e^x x^3$. Найти $y^{(n)}$.
323. $y=e^x+a^x$. Найти $y^{(n)}$.

§ 137. Теоремы Ролля, Коши, Лагранжа

Теорема 1 (Ролля). *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, имеет производную (конечную или бесконечную) в интервале (a, b) и значения функции в точках a и b равны:*

$$f(a)=f(b),$$

то существует по крайней мере одна точка ξ

$$a<\xi<b,$$

в которой производная функции $f(x)$ равна нулю:

$$f'(\xi)=0.$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то на основании теоремы Вейерштрасса на этом сегменте существует по крайней мере одна точка, в которой функция имеет наибольшее значение M, и по крайней мере одна точка, в которой функция имеет наименьшее значение m. Рассмотрим два возможных случая:

1. $M=m$. Следовательно, функция постоянная:

$$f(x)=C$$

при любом x из сегмента $[a, b]$. Отсюда $f'(x)=0$ при всех x из интервала (a, b). В качестве точки ξ можно взять любую точку интервала (a, b). Для этого случая теорема доказана.

2. $M > m$; тогда, по крайней мере, одно из чисел M или m отлично от $f(a)$; пусть, например, $M \neq f(a)$ (следовательно, $M > f(a)$). Пусть ξ — точка, для которой $f(\xi) = M$. Эта точка ξ не совпадает ни с a ни с b, ибо $f(\xi) = M > f(a) = f(b)$, следовательно, $a < \xi < b$. Докажем, что $f'(\xi) = 0$. В самом деле, так как $f(\xi) \geqslant f(x)$ для любого x (ибо в точке ξ функция имеет наибольшее значение), то $f(x) - f(\xi) \leqslant 0$, т. е. приращение функции $\Delta y = f(x) - f(\xi)$ неположительно: $\Delta y \leqslant 0$. Рассмотрим приращение аргумента $\Delta x = x - \xi$; если $x > \xi$, то $\Delta x > 0$ и, следовательно, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0$. Переходя к левому пределу этой дроби в точке $\Delta x = 0-$, получим

$$\lim_{\Delta x = 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(\xi) \leqslant 0.$$

Если $x < \xi$, то $\Delta x = x - \xi < 0$ и, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Переходя к правому пределу в точке $\Delta x = 0+$, получим:

$$\lim_{\Delta x = 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(\xi) \geqslant 0.$$

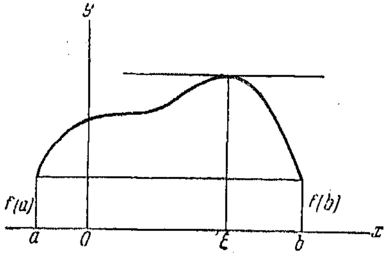
Итак, $f'(\xi) \leqslant 0$ и $f'(\xi) \geqslant 0$; из этих обоих условий следует $f'(\xi) = 0$, ч. т. д.

При доказательстве этой теоремы условия непрерывности на сегменте и существование производной в интервале были существенны; именно: благодаря непрерывности на сегменте мы смогли воспользоваться теоремой Вейерштрасса, что существует точка ξ, в которой функция имеет наибольшее (наименьшее) значение; эта точка оказалась в интервале (a, b). Благодаря существованию производной в интервале мы имели право утверждать, что существуют правый и левый пределы дроби $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и что эти пределы равны $f'(\xi)$.

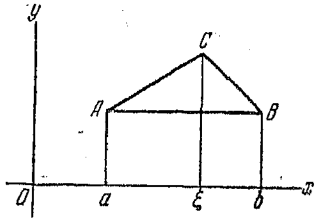
Геометрически теорема Ролля иллюстрируется просто: в точках a и b значения функции одинаковы, т. е. точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ находятся на одинаковом расстоянии от оси Ox и по одну сторону от неё (черт. 265), следовательно, хорда AB коллинеарна оси Ox. Между этими точками существует на линии по крайней мере одна точка $C(\xi, f(\xi))$, в которой касательная коллинеарна оси Ox.

Если ограничения, наложенные на функцию $f(x)$, не выполняются, то и выводы теоремы могут быть нарушены. На чертеже 266 имеем график функции $f(x)$. Хорда AB коллинеарна оси Ox, но вместе с тем не существует точки C в интервале (a, b), в которой касательная была бы коллинеарна хорде AB. Объясняется это тем, что не во всех точках интервала существует производная (не существует производной в точке $x = \xi$).

На чертеже 267 имеем график функции $y=f(x)$. Этот график состоит из отрезка AD, включая точку D, и линии EB, исключая точку E; $f(a)=f(b)=0$, но не существует точки ξ в интервале (a, b), в которой касательная была бы коллинеарна оси Ox. В этом примере функция разрывна в точке $x=\xi$.



Черт. 265.



Черт. 266.

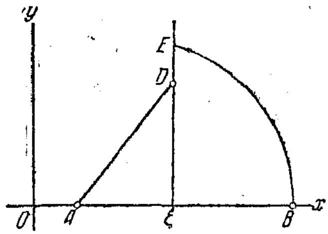
Если, в частности, предположить, что $f(a)=f(b)=0$, то теорему Ролля можно сформулировать так:

Теорема 2. *Между двумя нулями a и b функции $f(x)$ заключается по крайней мере один нуль её производной при условии, что функция непрерывна на сегменте $[a, b]$ и что в интервале (a, b) существует производная.*

Пример 1. Показать, что уравнение $\frac{2}{3}x^3+x-1$ не имеет двух различных действительных корней.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{2}{3}x^3+x-1.$$



Черт. 267.

Если бы данное уравнение имело два действительных различных корня a и b, т. е. $f(a)=0$ и $f(b)=0$, то обязательно существовала бы точка, в которой производная была бы равна нулю (все условия теоремы Ферма выполнены). Но производная $f'(x)=2x^2+1$ всегда положительна. Следовательно, данное уравнение не имеет двух различных действительных корней.

Теорема 3 (о среднем Коши). *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$ и имеют производные в интервале (a, b), причём $\varphi(a)\neq\varphi(b)$, и в интервале (a, b) производные $\varphi'(x)$ и $f'(x)$ одновременно не равны нулю и $+\infty$ (или $-\infty$), то в интервале (a, b) существует по крайней мере одна точка ξ,* для которой

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Доказательство этой теоремы состоит в сведении её к теореме Ферма. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}[\varphi(x)-\varphi(a)]-[f(x)-f(a)].$$

Эта функция непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет производную

$$F'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)-f'(x)$$

в интервале (a, b), так как этим условиям удовлетворяют функции $f(x)$ и $\varphi(x)$. Кроме того, в точках a и b значения этой функции равны:

$$F(a)=F(b)=0.$$

Следовательно, для функции $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ферма, и поэтому в интервале (a, b) существует по крайней мере одна точка ξ, $a<\xi<b$, в которой производная $F'(x)$ равна нулю:

$$F'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(\xi)-f'(\xi)=0;$$

разделив почленно последнее равенство на $\varphi'(\xi)$ ($\varphi'(\xi)\neq 0$ по условию) и перенеся член, зависящий от ξ, вправо, получим требуемое равенство.

Теорема 4. (Теорема о среднем Лагранжа.) *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет производную в интервале (a, b), то в этом интервале существует по крайней мере одна точка ξ, $a<\xi<b$, для которой*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).$$

Эта теорема является следствием из теоремы Коши, именно, положим в теореме Коши $\varphi(x)=x$ *). Тогда $\varphi(a)=a$, $\varphi(b)=b$, $\varphi'(x)=1$, и мы получим:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

Умножив это равенство на $b-a$, приходим к формуле Лагранжа. Формулу Лагранжа можно было вывести самостоятельно, следуя методу, который дан при выводе формулы Коши. Для этого надо рассмотреть вспомогательную функцию

$$F(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-[f(x)-f(a)].$$

Рекомендуем этот вывод провести самостоятельно.

Формула Лагранжа показывает, что отношение приращения функции к приращению аргумента равно производной от этой функции

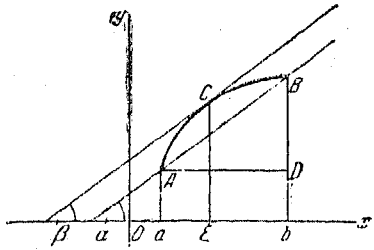
*) Функция $y=x$ удовлетворяет условиям теоремы Коши: $\varphi(x)=x$ непрерывна всюду и её производная $\varphi'(x)=1\neq 0$.

в некоторой точке, заключённой между начальным и конечным значениями аргумента.

Геометрическое содержание теоремы Лагранжа заключается в том, что если в каждой точке дуги AB (черт. 268) существует единственная касательная, то тангенс угла секущей AB:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{BD}{AD}=\operatorname{tg}\beta$$

равен $f'(\xi)$, т. е. тангенсу угла α наклона некоторой касательной, проведённой в точке C дуги AB.

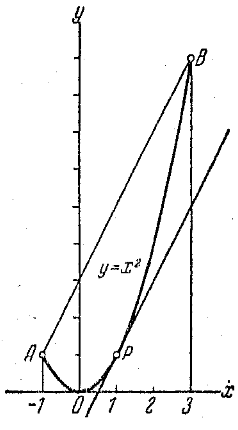


Черт. 268.

Итак: *если в каждой точке дуги графика дифференцируемой функции $y=f(x)$ существует единственная касательная, то на дуге найдётся по крайней мере одна точка, в которой касательная параллельна хорде, стягивающей эту дугу.*

В частности, если $f(a)=f(b)$, то хорда AB и, следовательно, касательная параллельна оси Ox, и мы приходим к теореме Ролля. Правда, мы не имеем права рассматривать здесь теорему Ролля как следствие из теоремы Лагранжа, так как при выводе теоремы Лагранжа мы пользовались теоремой Ролля.

Точка ξ, о которой говорится в теоремах Ролля и Лагранжа, иногда может быть определена довольно просто. Приведём примеры.



Черт. 269.

Пример 2. Для функции $y=x^2$ на сегменте $[-1, 3]$ имеем:

$$f(-1)=1,\quad f(3)=9,\quad f'(x)=2x.$$

Подставив в формулу Лагранжа полученные выражения, будем иметь:

$$9-1=(3+1)\cdot 2\xi,$$

откуда

$$\xi=1,$$

т. е. в точке P с абсциссой $\xi=1$ касательная к параболе AOB параллельна хорде AB (черт. 269).

Пример 3. Рассмотрим функцию $y=\frac{1}{x}$ на сегменте $[1, 2]$. Имеем:

$$f(1)=1,\quad f(2)=\frac{1}{2},\quad f'(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

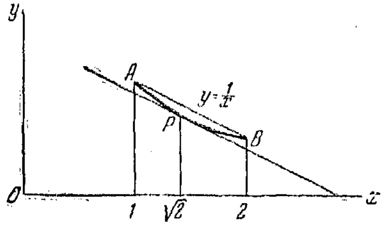
Следовательно, формула Лагранжа примет вид:

$$\frac{1}{2}-1=(2-1)\left(-\frac{1}{\xi^2}\right).$$

Решая полученное уравнение относительно ξ, получим:

$$\xi_1=\sqrt{2},\quad \xi_2=-\sqrt{2}.$$

Корень ξ_2 отбросим, так как в теореме Лагранжа говорится о точке, заключённой в интервале (1, 2). Итак, $\xi=\sqrt{2}$, т. е. касательная MN к гиперболе APB в точке P с абсциссой $\xi=\sqrt{2}$ параллельна хорде AB (черт. 270).



Черт. 270.

Пример 4. Рассмотрим функцию $y=x^3-3x^2+1$ на сегменте $[-1, 3]$. Как и раньше, имеем:

$$f(-1)=-3,\quad f(3)=1,\quad f'(x)=3x^2-6x,$$

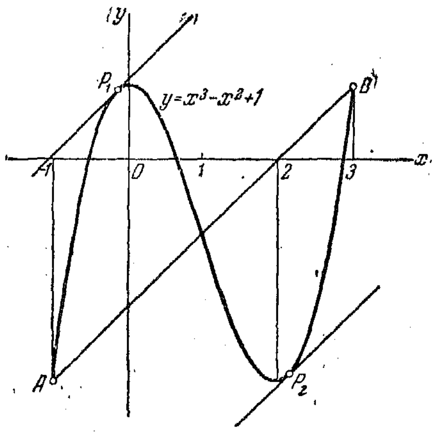
откуда

$$1+3=(3+1)\cdot(3\xi^2-6\xi).$$

Решая это уравнение, получим:

$$\xi_1\approx-\frac{1}{6},\quad \xi_2\approx\frac{13}{6}.$$

Оба корня заключены в интервале $(-1, 3)$; следовательно, оба они удовлетворяют заключению теоремы Лагранжа. Геометрическая картина (черт. 271) следующая: в точках P_1 и P_2 с абсциссами ξ_1 и ξ_2, касательные к кубической параболе $y=x^3-3x^2+1$ параллельны хорде AB.



Черт. 271.

Промежуточное число ξ, $a<\xi<b$ можно представить в форме

$$\xi=a+\theta(b-a),$$

где θ заключено между 0 и 1, т. е. $0<\theta<1$.

В самом деле, так как $a<\xi<b$, то $0<\xi-a<b-a$. Деля полученные неравенства на положительное число $b-a$, получим:

$$0<\frac{\xi-a}{b-a}<1.$$

Обозначим дробь $\frac{\xi-a}{b-a}$ через θ.

Имеем $0<\theta<1$, $\frac{\xi-a}{b-a}=\theta$, откуда $\xi=a+\theta(b-a)$. Теперь теорема Лагранжа запишется так:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'[a+\theta(b-a)],\quad 0<\theta<1.$$

Если обозначить a через x, $b-a$ через Δx, то формула Лагранжа примет вид:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x+\theta\,\Delta x),\quad \text{где } 0<\theta<1.$$

Обозначив в формуле Лагранжа b через x, получим:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a+\theta(x-a))$$

или

$$f(x)=f(a)+(x-a)\,f'[a+\theta(x-a)].$$

При $a=0$ последняя формула принимает вид

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta x),\quad 0<\theta<1.$$

В формуле

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$$

мы считали $b>a$. Однако эта формула верна и при $b<a$. В самом деле, полагая $b<a$, имеем:

$$f(a)-f(b)=(a-b)f'(\xi),\quad \text{где}\quad b<\xi<a$$

или

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).$$

Таким образом, теорему Лагранжа можно обобщить следующим образом: *если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, ограниченном точками $x=a$, $x=b$, и если в каждой точке, заключённой между этими точками, эта функция $f(x)$ имеет производную, то приращение $f(b)-f(a)$ функции равно произведению приращения аргумента $b-a$ на значение производной $f'(\xi)$* в некоторой точке *$x=\xi$, заключённой между a и b.*

Таким образом, формулы

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'[a+\theta(b-a)],\quad 0<\theta<1,$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x f'(x+\theta\Delta x),$$

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta x)$$

верны соответственно и при

$$b<a,$$
$$\Delta x<0,$$
$$x<0.$$

Примечание. Из факта существования производной в интервале следует непрерывность функции в этом интервале.

Следовательно, при формулировке теорем Ролля, Коши и Лагранжа можно было бы требовать существования производной функции $f(x)$ в интервале (a, b) и непрерывности её лишь на концах a и b сегмента $[a, b]$.

Мы знаем, что производная постоянной функции равна нулю. С помощью теоремы Лагранжа докажем обратное положение:

Теорема 5. *Если производная функции $f(x)$ равна нулю в интервале (a, b),* то функция *$f(x)$ в этом интервале постоянна.*

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — произвольные точки интервала (a, b). Докажем, что $f(x_1) = f(x_2)$. В самом деле, по теореме Лагранжа имеем

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(\xi).$$

Так как значение ξ заключено между x_1 и x_2, то ξ заключено в интервале (a, b) и потому, согласно условию, $f'(\xi) = 0$.

Итак, $f(x_1) - f(x_2) = 0$ или $f(x_1) = f(x_2)$, т. е. значения функции равны для любых двух различных значений аргумента x из интервала (a, b), ч. т. д.

Упражнения

324. Доказать, что для функции $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ число ξ в формуле Лагранжа является средним арифметическим чисел a и b:

$$\xi = \frac{a+b}{2}.$$

325. Доказать, что если уравнение

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

имеет положительный корень x_0, то уравнение

$$n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

имеет положительный корень, меньший чем x_0.

326. Для функций $f(x) = x^3$ и $\varphi(x) = x^2 + 1$ найти ξ в формуле Коши для интервала $(1, 2)$.

327. Для функции $y = x^5$ найти ξ в формуле Лагранжа для интервала $(0, a)$.

328. Применить к функции $x^3 - x^2$ на отрезке $[0, 1]$ теорему Ролля; найти ξ.

§ 138. Достаточные признаки возрастания и убывания функций

В настоящем параграфе мы укажем достаточные признаки возрастания и убывания функций, определённых на некотором сегменте $[a, b]$.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$, дифференцируема в интервале (a, b) и непрерывна в точке $x = a$ справа, а в точке $x = b$ слева, причём во всех точках интервала (a, b) её производная положительна, то эта функция на сегменте $[a, b]$ возрастающая.*

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — *произвольные точки сегмента* $[a, b]$ и $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi), \quad \text{где} \quad x_1 < \xi < x_2.$$

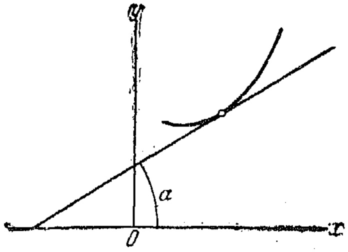
Так как $x_2 - x_1 > 0$ и $f'(\xi) > 0$ (потому что точка ξ лежит в интервале (a, b)), то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или

$$f(x_2) > f(x_1),$$

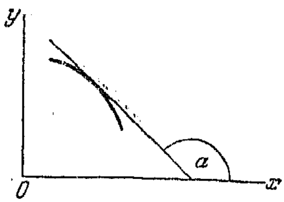
т. е. большему значению аргумента соответствует бо́льшее значение функции $f(x)$, ч. т. д.

Аналогично доказывается и теорема:

Теорема 2. *Если во всех точках интервала (a, b) производная функции, непрерывной на сегменте $[a, b]$, отрицательна $f'(x) < 0$, то функция убывает на сегменте $[a, b]$.*



Черт. 272.



Черт. 273.

Доказательство. Из формулы $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi)$ при $x_2 > x_1$ имеем: $x_2 - x_1 > 0$, $f'(\xi) < 0$, следовательно,

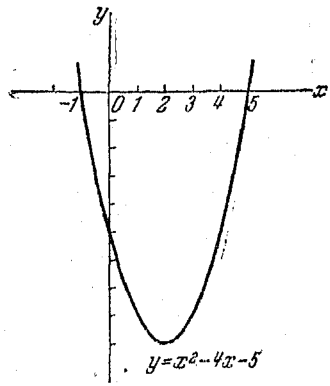
$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \quad \text{или} \quad f(x_2) < f(x_1),$$

т. е. бо́льшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции $f(x)$, ч. т. д.

Геометрически обе теоремы очевидны. Если $f'(x) > 0$, то (черт. 272) угол от оси Ox до касательной к линии в любой точке — острый; ясно, что при этом точка, «движущаяся по линии» вправо, будет «подниматься» вверх. Если же

$$f'(x) < 0, \text{ то } \operatorname{tg} \alpha < 0,$$

и указанный угол — тупой; точка, «движущаяся по кривой» вправо, «будет опускаться вниз» (черт. 273).



Черт. 274.

Пример 1. Для функции $y = x^2 - 4x - 5$ имеем $f'(x) = 2x - 4$. Найдём множество чисел, в которых производная положительна и где она отрицательна. Имеем:

$$f'(x) > 0, \; 2x - 4 > 0, \; x > 2;$$
$$f'(x) < 0, \; 2x - 4 < 0, \; x < 2.$$

Следовательно, в полуинтервале $[2, +\infty)$ функция возрастает, а в полуинтервале $(-\infty, 2]$ функция убывает (черт. 274).

Пример 2. Дана функция $y = \sin x$. Имеем:

$$y' = \cos x.$$

Решая неравенство $\cos x > 0$, получим $-\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \frac{\pi}{2}+2k\pi$, т. е. $\sin x$ возрастает во всех сегментах вида $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$. Решая неравенство $\cos x < 0$, найдём, что $\sin x$ убывает на всех сегментах вида $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$.

Пример 3. $y = ax^3+bx^2+cx+d$. Находим:

$$y' = 3ax^2+2bx+c.$$

Если корни этого трёхчлена действительны, т. е. если

$$b^2-3ac > 0$$

и если $a > 0$, то в интервале

$$\left(-\infty, -\frac{b}{3a}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-3ac}{a^2}}\right)$$

производная $y' > 0$; в интервале

$$\left(-\frac{b}{3a}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-3ac}{a^2}},\ -\frac{b}{3a}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-3ac}{a^2}}\right)$$

она отрицательна; $y' < 0$, а в интервале

$$\left(-\frac{b}{3a}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-3ac}{a^2}},\ +\infty\right)$$

она положительна.

Значит, в полуинтервале

$$\left(-\infty, -\frac{b}{3a}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-3ac}{a^2}}\right)$$

функция ax^3+bx^2+cx+d возрастающая; на сегменте

$$\left[-\frac{b}{3a}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-3ac}{a^2}},\ -\frac{b}{3a}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-3ac}{a^2}}\right]$$

— убывающая и в полуинтервале

$$\left[-\frac{b}{3a}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-3ac}{a^2}},\ +\infty\right]$$

— возрастающая.

Каковы будут заключения при $b^2-3ac > 0$ и $a < 0$? Если $b^2-3ac \leqslant 0$, то y' знака не меняет, обращаясь в нуль только один раз (если $b^2-3ac=0$), значит, функция ax^3+bx^2+cx+d — возрастающая при $a > 0$ и убывающая при $a < 0$.

Упражнения

329. Найти сегменты возрастания и убывания следующих функций. Проверить результаты на чертеже:

1) $y = \frac{1}{12}x^3 - x + 3$,

2) $y = (x-2)^5(2x+1)^4$,

3) $y = a + b\sqrt[3]{(x-c)^2}$, $b > 0$,

4) $y = 2x^2 - \ln x$.

330. Исследовать функцию $1-\cos x-\frac{x^2}{2}$ на возрастание и убывание. Воспользоваться полученным результатом для доказательства неравенства

$$1-\cos x<\frac{x^2}{2}.$$

331. Доказать справедливость неравенств

$$1)\ \sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} \text{ при } x>0,$$

$$2)\ x>\ln(1+x) \qquad \text{при } x>0.$$

332. Показать, что функция $x+\cos x-a$ возрастает. Вывести отсюда, что уравнение $x+\cos x=a$ не имеет положительных корней при $a<1$ и имеет один положительный корень при $a>1$.

333. Показать, что уравнение $xe^x=2$ имеет только один положительный корень, заключённый в интервале $(0, 1)$.

§ 139. Условия существования экстремума функции

Теорема 1 (необходимое условие). *Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x=a$, если эта точка $x=a$ является точкой локального экстремума и если производная функции $f(x)$ в точке $x=a$ существует, то эта производная равна нулю:*

$$f'(x)=0.$$

Доказательство. Пусть $x=a$ есть точка локального минимума; предполагая, что $\Delta x>0$, имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}>0;$$

$\Delta y \geqslant 0$ в силу того, что точка $x=a$ есть точка локального минимума.

Из соотношения

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}>0,$$

верного при $\Delta x>0$, находим

$$\lim_{\Delta x=0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}\geqslant 0, \text{ т. е. } f'(a)\geqslant 0.$$

Если же $\Delta x<0$, то Δy попрежнему >0, значит,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}<0,$$

и, следовательно,

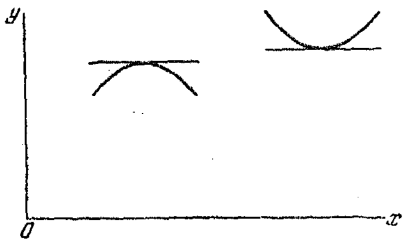
$$\lim_{\Delta x=0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(a)\leqslant 0;$$

из соотношений $f'(a)\geqslant 0$ и $f'(a)\leqslant 0$ следует, что $f'(a)=0$.

Геометрический смысл доказанной теоремы заключается в том, что в точке экстремума касательная к графику параллельна оси Ox (черт. 275).

Выясним теперь достаточные условия существования локального экстремума для некоторых классов функций. Предварительно введём следующее определение:

Определение. *Если при достаточно малом δ функция $\varphi(x)$ положительна в интервале $(a-\delta, a)$ и отрицательна в интервале $(a, a+\delta)$, или наоборот, то условимся говорить, что функция $\varphi(x)$ меняет знак при переходе через значение a.* В этом определении ничего не говорится о значении функции в самой точке $x=a$. Оно может быть положительным, отрицательным, равным нулю, функция в этой точке может быть не определена — всё это роли не играет.



Черт. 275.

Теорема 2 (достаточное условие). *Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки $x=a$, если она непрерывна в точке $x=a$ и если производная её $f'(x)$ меняет знак при переходе через эту точку, то функция имеет экстремум в этой точке $x=a$, причём, если производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то имеем точку максимума, а если с минуса на плюс, то имеем точку минимума.*

Доказательство. Пусть в интервале $(a-\delta, a)$ производная положительна, а в интервале $(a, a+\delta)$ отрицательна. Значит, функция $f(x)$ возрастает на сегменте $[a-\delta, a]$ и убывает на сегменте $[a, a+\delta]$, т. е. при $x<a$ имеем $f(x)<f(a)$, а при $x>a$ также будет $f(x)<f(a)$, т. е. $f(x)$ больше чем $f(a)$ в некоторой окрестности точки $x=a$, а это и означает, что $x=a$ является точкой максимума (локального). Если в интервале $(a-\delta, a)$ производная отрицательна, а в интервале $(a, a+\delta)$ положительна, то на сегменте $[a-\delta, a]$ функция убывает, а на сегменте $[a, a+\delta]$ она возрастает, т. е. при $x<a$ будет $f(x)>f(a)$, а при $x>a$ также будет $f(x)>f(a)$, т. е. $f(a)$ меньше чем $f(x)$ в некоторой окрестности точки $x=a$, а это и означает, что $x=a$ является точкой минимума, ч. т. д.

Примеры исследования функций на экстремум.

Пример 1. Для параболы

$$y=ax^2+bx+c$$

имеем:

$$y'=2ax+b;$$

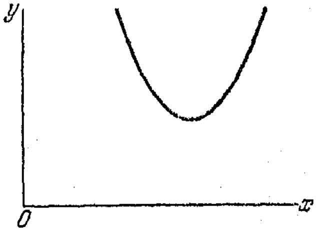
экстремум следует искать лишь в точках, в которых либо производная не существует — такие точки в нашем примере отсутствуют, либо в точках, в которых она обращается в нуль:

$$2ax+b=0,$$

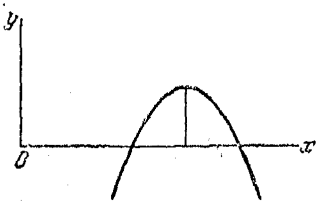
откуда

$$x=-\frac{b}{2a}.$$

Пусть $a>0$. Тогда при $x<-\frac{b}{2a}$ будет $2ax+b<0$, а при $x>-\frac{b}{2a}$ будет $2ax+b>0$, т. е. при переходе через точку $-\frac{b}{2a}$ знак производной меняется



Черт. 276.



Черт. 277.

с минуса на плюс. Следовательно, это — точка минимума. Минимально значение функции равно

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

График данной функции — парабола, ветви которой «уходят вверх» (черт. 276); вершине её M соответствует минимум функции. Координаты вершины:

$$x=-\frac{b}{2a}, \quad y=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Если $a<0$, то $f'(x)>0$ при $x<-\frac{b}{2a}$; $f'(x)<0$ при $x>-\frac{b}{2a}$, т. е. точка $x=-\frac{b}{2a}$ будет точкой максимума. При этом максимальное значение функции равно $\frac{4ac-b^2}{4a}$. График — парабола, ветви которой «уходят вниз» (черт. 277). Вершина M параболы соответствует максимуму функции.

Определение. *Точки, в которых производная равна нулю, будем называть стационарными.*

В предыдущем примере такой точкой была точка $x=-\frac{b}{2a}$.

Пример 2. Для функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ имеем:

$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Производная определена при всех $x \neq 0$ и нигде в нуль не обращается. Исследуем точку $x = 0$:

При $x = 0$ данная функция не дифференцируема, так как, полагая $x = 0$, находим $y = 0$, и далее: для $x = \Delta x$, $y + \Delta y = \sqrt[3]{\Delta x^2}$, откуда

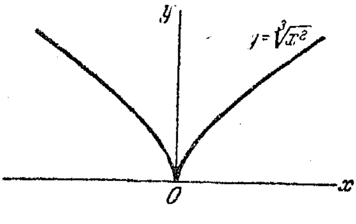
$$\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x^2}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}.$$

Никакое число не является пределом функции $\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$ в точке $\Delta x = 0$.

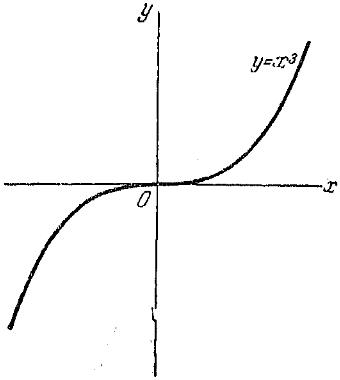
При $x < 0$, $y' < 0$, а при $x > 0$, $y' > 0$, т. е. производная меняет знак с минуса на плюс при переходе через $x = 0$. Следовательно, это — точка минимума. Минимальное значение функции будет $f(0) = 0$. Линия $y = \sqrt[3]{x^2}$ имеет точку заострения в начале координат (черт. 278); ветви её «уходят вверх», и точка заострения — начало координат — соответствует минимуму.

Пример 3. Для функции $y = x^3$ имеем $f'(x) = 3x^2$.

При $x = 0$ будет $f'(0) = 0$; эту точку



Черт. 278.



Черт. 279.

(стационарную) мы и исследуем. При $x < 0$ и при $x > 0$ производная положительна. Следовательно, теорема не даёт возможности решить вопрос. Из условия $f'(x) > 0$ при $x \neq 0$ следует, что функция x^3 в полуинтервалах $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$ — возрастающая.

Итак, значение функции в точке $x = 0$ больше, чем её значение слева, и меньше, чем её значение справа (черт. 279), следовательно, эта точка не является экстремальной.

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию

$$y = (x-1)^2 (x+1)^3.$$

Решение. Находим производную и её корни:

$$y' = 2(x-1)(x+1)^3 + (x-1)^2 3(x+1)^2 = (x-1)(x+1)^2(5x-1), \quad y' = 0;$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{5}, \quad x_3 = 1;$$

полученные стационарные точки, занумерованы в порядке возрастания.

В интервале $(-\infty, -1)$ производная $f'(x)$ положительна; в интервале $\left(-1, \frac{1}{5}\right)$ производная $f'(x)$ положительна; в интервале $\left(\frac{1}{5}, 1\right)$ производная $f'(x)$ отрицательна; в интервале $(1, +\infty)$ производная $f'(x)$ положительна; значит, точка $x=\frac{1}{5}$ есть точка локального максимума, а точка $x=1$ — точка локального минимума.

Соответствующие значения функции:

$$f\left(\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{1}{5}-1\right)^2\left(\frac{1}{5}+1\right)^3=\frac{3456}{3125},$$

$$f(1)=(1-1)^2(1+1)^3=0.$$

График функции $y=(x-1)^2(x+1)^3$ изображён на чертеже 280.

Пример 5. Для функции

$$y=x^3+2x^2-5x-6$$

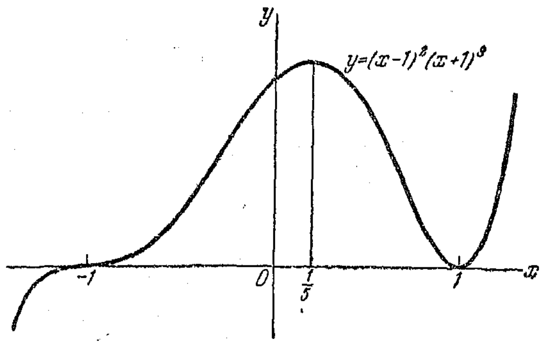
имеем:

$$y'=3x^2+4x-5.$$

Найдём стационарные точки:

$$y'=0,\quad 3x^2+4x-5=0,\quad x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{19}}{3};\quad x_1\approx-2,1,\ x_2\approx0,8.$$

В интервале $(-\infty, x_1)$ имеем $y'>0$, в интервале (x_1, x_2) $y'<0$, в интервале



Черт. 280.

$(x_2, +\infty)$ $y'>0$. Следовательно, x_1 есть точка максимума, а x_2 — минимума. Максимум функции равен

$$f(x_1)\approx(-2,1)^3+2(-2,1)^2-5(-2,1)-6\approx4,06,$$

а минимум равен

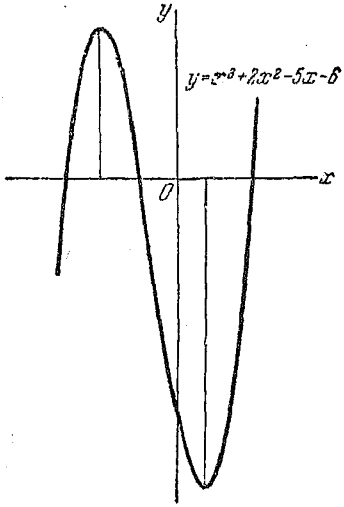
$$f(x_2)\approx0,8^3+2\cdot0,8^2-5\cdot0,8-6\approx-8,21$$

— график функции дан на чертеже 281.

Пример 6. Для функции $y=(x-1)^4$ имеем:

$$y'=4(x-1)^3;$$

точка $x=1$ стационарная. Если $x<1$, то $y'<0$, а если $x>1$, то $y'>0$, значит, точка $x=1$ является точкой локального минимума.



Черт. 281.

Минимальное значение функции равно

$$f(1)=0 \text{ (черт. 282).}$$

П р и м е р 7. Для функции

$$y=3x^4-8x^3+6x^2+12$$

имеем:

$$y'=12x^3-24x^2+12x.$$

Найдём стационарные точки: $x_1=0$, $x_2=1$. В интервале $(-\infty, 0)$ $y'<0$, в интервале $(0, 1)$ $y'>0$, в интервале $(1, +\infty)$ $y'>0$. Следовательно, $x_1=0$ есть точка локального минимума, причём значение функции в этой точке равно

$$f(0)=12 \text{ (черт. 283).}$$

П р и м е р 8. Из прямоугольников с данным периметром $2p$ найти прямоугольник наибольшей площади.

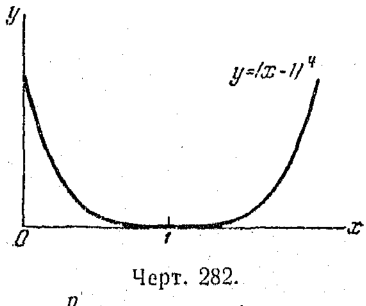
Р е ш е н и е. Обозначим через x длину одной из сторон прямоугольника. Тогда $p-x$ — длина другой стороны. Площадь Q выражается формулой:

$$Q=x(p-x)=px-x^2.$$

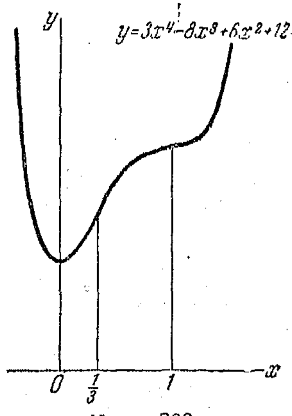
Найдём значение x, при котором Q имеет максимум:

$$Q'=p-2x.$$

Решая уравнение $Q'=0$, т. е. $p-2x=0$, получим $x=\frac{p}{2}$; при $x>\frac{p}{2}$, $Q'<0$, т. е. справа от $\frac{p}{2}$ функция Q убывает. При $x<\frac{p}{2}$, $Q'>0$ — слева от $\frac{p}{2}$ функция Q возрастает; значит, значение этой функции



Черт. 282.



Черт. 283.

при $x=\frac{p}{2}$ является наибольшим не только среди значений x, достаточно близких к $\frac{p}{2}$, но и вообще среди всех значений x, т. е. при $x=\frac{p}{2}$ площадь будет наибольшей.

Вторая сторона прямоугольника максимальной площади равна

$$p-x=p-\frac{p}{2}=\frac{p}{2},$$

т. е. искомый прямоугольник является квадратом.

Пример 9. Из прямых круглых цилиндров данного объёма v найти тот, который имеет наименьшую полную поверхность q.

Решение. Если через r обозначим радиус основания цилиндра, а через h его высоту, то получим

$$q=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi(rh+r^2).$$

Из формулы объёма цилиндра

$$v=\pi r^2 h$$

имеем

$$h=\frac{v}{\pi r^2},$$

откуда

$$q=\frac{2v}{r}+2\pi r^2;$$

найдём стационарные точки:

$$q'=-\frac{2v}{r^2}+4\pi r=0,$$

откуда

$$r=\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}=r_0;$$

исследуем эту точку: если $r<r_0$, то $q'<0$, а если $r>r_0$, то $q'>0$. Следовательно, $r=r_0$ — точка минимума. При $r=\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ будет:

$$h=\frac{v}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{v}{2\pi}\right)^2}}=\sqrt[3]{\frac{4v}{\pi}},$$

т. е. высота h цилиндра равна диаметру основания $2r=\sqrt[3]{\frac{4v}{\pi}}$ (осевое сечение цилиндра — квадрат).

Упражнения

334. Найти экстремумы (локальные) следующих функций:

1) $y=\frac{1}{10}(2x^3-6x^2-18x+15)$,
2) $y=(x-2)^3(2x+1)$,
3) $y=x+\frac{9}{x}$,
4) $y=\frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$,
5) $y=x-\ln(1+x)$,
6) $y=\cos x+\sin x$ (на отрезке $[0, 2\pi]$),
7) $y=bx+\cos ax$.

335. Найти наибольшие и наименьшие значения, т. е. абсолютные экстремумы функций на указанных сегментах:

1) $y=3-2x$ $[3, 7]$,
2) $y=\frac{x-1}{x+1}$ $[0, 4]$,
3) $y=\ln x$ $[0,1]$,
4) $y=\sin 2x-x$ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

336. В трёхчлене x^2+px+q так подобрать коэффициенты p и q, чтобы трёхчлен имел минимум при $x=3$, равный 5. Объяснить геометрический смысл результата.

337. В круг радиуса r вписать прямоугольник, площадь которого была бы наибольшей.

338. В круг радиуса r вписать прямоугольник, периметр которого был бы наибольший.

339. Из всех круговых секторов, имеющих данный периметр, найти тот, который имеет наибольшую площадь.

340. Показать, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.

341. Из всех прямых круговых цилиндров, которые можно вписать в данный прямой круговой конус, найти тот 1) объём которого был бы наибольший; 2) боковая поверхность которого была бы наибольшая.

342. В данный шар вписать круговой конус, имеющий 1) наибольшую боковую поверхность; 2) наибольший объём.

343. Конус описан около шара. Показать, что объём конуса превосходит объём шара не менее, чем в два раза. Для какого конуса отношение его объёма к объёму шара будет наименьшим.

344. Найти размеры конической палатки данной вместимости, требующей наименьшего количества материи.

345. Нужно огородить проволокой в 200 *м* земельную площадь в виде прямоугольника, примыкающего к стене. Найти размеры прямоугольника, чтобы площадь была наибольшей.

346. Через точку $P(a, b)$ провести прямую так, чтобы сумма положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей ($a>0$, $b>0$).

347. Из прямоугольного листа с размерами a и b требуется изготовить коробку наибольшей ёмкости, вырезав по его углам четыре равных квадрата и загнув получающиеся выступы. Найти величины квадратов.

Рассмотреть случай, когда лист имеет форму квадрата.

348. Из круглого листа радиуса r вырезан сектор с центральным углом α. Из сектора сделана коническая воронка. При каком угле α ёмкость воронки будет наибольшей?

349. Из трёх досок одинаковой ширины сколачивается жёлоб. При каком угле наклона боковых стенок к основанию площадь поперечного сечения жёлоба будет наибольшей?

350. От канала шириной a под прямым углом к нему отходит канал шириной b. Оба канала прямолинейны. Найти наибольшую длину l бревна, которое при сплаве из одного канала в другой не застрянет в повороте.

351. На отрезке длиной L, соединяющем два источника света силы I_1 и I_2, найти наименее освещённую точку (освещённость обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света).

352. Над центром круглого стола радиуса R нужно повесить фонарь. На какой высоте нужно это сделать, чтобы крига, лежащая на краях стола, была бы освещена лучше всего (освещение обратно пропорционально квадрату расстояния от источника света и прямо пропорционально косинусу угла падения лучей).

§ 140. Достаточные признаки положительной и отрицательной выпуклости функции

Теорема. *Если функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$, дважды дифференцируема в интервале (a, b), непрерывна в точке a справа, а в точке b слева, и если во всех точках интервала (a, b) её вторая производная положительна:*

$$f''(x)>0, \qquad x\in(a, b),$$

то функция $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ имеет положительную выпуклость, а если $f''(x)<0$ при $x\in(a, b)$, — то отрицательную.

Доказательство. Пусть $a\leqslant x_1<x_2<x_3\leqslant b$, имеем:

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 f(x_1) & 1 \\ x_2 f(x_2) & 1 \\ x_3 f(x_3) & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1-x_2 & f(x_1)-f(x_2) \\ x_2-x_3 & f(x_2)-f(x_3) \end{vmatrix}.$$

Применяя теорему Лагранжа, получим:

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1-x_2 & (x_1-x_2)f'(\xi_1) \\ x_2-x_3 & (x_2-x_3)f'(\xi_2) \end{vmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_2)(f'(\xi_2)-f'(\xi_1)),$$

где

$$a\leqslant x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<x_3\leqslant b.$$

Применяя теорему Лагранжа ещё раз, будем иметь:

$$\Delta=(x_2-x_1)(x_3-x_2)(\xi_2-\xi_1)f''(\xi),$$

где $\xi_1<\xi<\xi_2$, значит, $\xi\in(a, b)$. Отсюда ясно, что если $f''(\xi)>0$, то $\Delta>0$, а если $f''(\xi)<0$, то и $\Delta<0$, ч. т. д.

Примеры исследования функций на выпуклость и вогнутость.

Пример 1. Для функции

$$y=ax^2+bx+c$$

имеем:

$$y'=2ax+b,$$
$$y''=2a.$$

Если $a>0$, то $y''>0$, т. е. линия имеет положительную выпуклость. Если же $a<0$, то $y''<0$, и линия имеет отрицательную выпуклость.

Пример 2. Для функции

$$y=x^3$$

имеем:

$$y'=3x^2, \quad y''=6x.$$

При $x<0$, $y''<0$, при $x>0$, $y''>0$, т. е. линия $y=x^3$ в полуинтервале $(-\infty, 0]$ имеет отрицательную выпуклость, а в полуинтервале $[0, +\infty)$ — положительную (черт. 279).

Пример 3. Для функции

$$y=x^3+2x^2-5x-6$$

имеем:

$$y'=3x^2+4x-5, \quad y''=6x+4;$$

$y''>0$ при $6x+4>0$, т. е. при $x>-\frac{2}{3}$ и $y''<0$ при $6x+4<0$, т. е. при $x<-\frac{2}{3}$. Итак, линия имеет положительную выпуклость в полуинтервале $\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$ и отрицательную — в полуинтервале $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$ (черт. 281).

Пример 4. Для функции

$$y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$$

имеем:

$$y' = 12x^3 - 24x^2 + 12x,$$

$$y'' = 36x^2 - 48x + 12 = 36\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1).$$

Отсюда: $y'' > 0$ в интервалах $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ и $(1, +\infty)$, ибо в каждом из них оба множителя $x - \frac{1}{3}$ и $x - 1$ одного знака. В обоих случаях произведение положительно, т. е. $y'' > 0$. Следовательно, в этих интервалах линия имеет положительную выпуклость. На интервале $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ имеем: $x - \frac{1}{3} > 0$, $x - 1 < 0$, следовательно, $y'' < 0$, и линия на этом интервале имеет отрицательную выпуклость (черт. 283).

Пример 5. Для функции

$$y = a^x, \quad \text{где} \quad a > 0,$$

имеем:

$$y'' = a^x (\ln a)^2 > 0,$$

следовательно, линия $y = a^x$ имеет положительную выпуклость во всём интервале $(-\infty, \infty)$.

Пример 6. Для функции

$$y = \ln x$$

имеем:

$$y'' = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

следовательно, линия $y = \ln x$ имеет отрицательную выпуклость в интервале $(0, \infty)$.

Пример 7. Для функции

$$y = \arcsin x$$

имеем:

$$y'' = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}};$$

так как знаменатель $\sqrt{(1 - x^2)^3}$ положителен при любом значении x, $|x| < 1$, то знак y'' совпадает со знаком числителя, т. е. со знаком x, и значит,

$$y'' > 0 \quad \text{при} \quad x > 0 \quad \text{и} \quad y'' < 0 \quad \text{при} \quad x < 0$$

и так как функция $\arcsin x$ определена на сегменте $[-1, 1]$, то линия $y = \arcsin x$ имеет отрицательную выпуклость на сегменте $[-1, 0]$ и положительную на сегменте $[0, 1]$.

§ 141. Точки перегиба

Определение. *Точка $A(a, f(a))$ непрерывной линии $y = f(x)$ называется точкой перегиба, если в окрестности этой точки слева линия имеет отрицательную выпуклость, а справа — положительную или, наоборот, — слева положительную, а справа — отрицательную.*

Теорема. *Если при переходе через точку $x=a$ вторая производная непрерывной функции $f(x)$ меняет знак, то эта точка является точкой перегиба.*

Доказательство очевидно (см. результат предыдущего § и данное определение).

Практически нахождение точек перегиба сводится к следующему:

1. *Находят те значения x, при которых вторая производная теряет смысл или обращается в нуль.*

2. *Исследуют знак второй производной слева и справа вблизи найденных точек. Если знаки второй производной различны, то имеем точку перегиба.*

Пример 1. Для функции
$$y=x^3$$
имеем
$$y''=6x=0,$$
откуда
$$x=0.$$

Исследуем знаки y'' слева и справа от нуля. Имеем $y''<0$ при $x<0$ и $y''>0$ при $x>0$. Следовательно, при $x=0$ имеем точку перегиба.

Пример 2. Для функции
$$y=x^3+2x^2-5x-6$$
имеем:
$$y''=6x+4=0,$$
откуда
$$x=-\frac{2}{3}.$$

При этом если $x<-\frac{2}{3}$, то $y''<0$, а если $x>-\frac{2}{3}$, то $y''>0$; следовательно, при $x=-\frac{2}{3}$ имеем точку перегиба (черт. 281).

Пример 3. Для функции
$$y=3x^4-8x^3+6x^2+12$$
имеем
$$y''=36\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)=0,$$
откуда
$$x_1=\frac{1}{3}, \quad x_2=1.$$

При этом: если $x<\frac{1}{3}$, то $y''>0$, если $\frac{1}{3}<x<1$, то $y''<0$. Если $x>1$, то $y''>0$. Следовательно, при обоих найденных значениях x имеем точки перегиба. В точке, соответствующей значению $x=\frac{1}{3}$, имеет место переход от положительной выпуклости к отрицательной, а в точке, соответствующей значению $x=1$, — наоборот (черт. 283).

Пример 4. Для функции
$$y=\sin x$$
находим
$$y''=-\sin x=0,$$
откуда
$$x=k\pi \qquad (k \text{ — любое целое число}).$$

При этом: если k — чётное, то при

$$-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<k\pi$$

имеем $y''>0$, а при $k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$, $y''<0$; если k — нечётное, то при $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<k\pi$, $y''<0$, а при

$$k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{2},\quad y''>0,$$

следовательно, для чётных значений k имеем переход от положительной выпуклости к отрицательной, а для нечётных — наоборот.

Упражнения

353. Исследовать на выпуклость и на точки перегиба линии

$$1)\ y=x^3-3x^2-9x+9,$$
$$2)\ y=x^4-12x^3+48x^2-50.$$

354. Выбрать коэффициенты α и β так, чтобы линия $x^2y+\alpha x+\beta y=0$ имела точку $A\,(2;\ 2,5)$ точкой перегиба. Какие ещё точки перегиба будет она иметь?

355. Показать, что у любой дважды дифференцируемой функции между двумя точками экстремума лежит по крайней мере одна точка перегиба.

356. Показать, что линия $y(x^2+a^2)=x$ имеет три точки перегиба, лежащие на прямой $x-4a^2y=0$.

§ 142. Построение графиков функций

Дадим некоторые указания к построению графиков функций. План примерно таков:

Надо:

1° *Выяснить область определения функции. Если функция элементарная, то под областью её определения подразумевается множество всех значений аргумента, при котором формула, определяющая функцию, имеет смысл* (знаменатель не обращается в нуль, под корнем чётной степени неотрицательное число, под знаком логарифма положительное число, арксинус числа по модулю не больше, чем 1 и т. д.).

2° *Выяснить, не является ли функция чётной, нечётной, периодической.*

3° *Найти точки разрыва и исследовать пределы функции в этих точках* (слева и справа).

4° *Найти точки экстремума.*

5° *Исследовать интервалы возрастания и убывания функции.*

6° *Найти точки перегиба.*

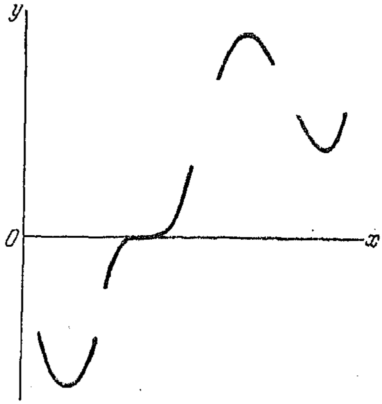
7° *Исследовать линию на положительную и отрицательную выпуклость.*

8° *Исследовать пределы функции в точках* $x=+\infty$ *и* $x=-\infty$.

9° *Найти точки пересечения линии* $y=f(x)$ *с осями координат и т. д.*

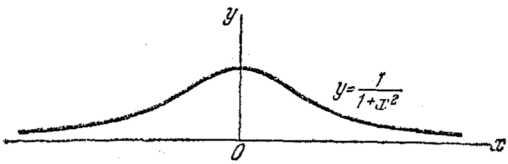
Не бесполезно с самого начала начертить оси координат и по мере накопления материала наносить график схематически (отдельными участками) на чертёж (черт. 284).

Наконец, для большей точности чертежа полезно построить ещё отдельные точки, придавая x ряд значений и вычисляя соответствующие значения y. При этом в «сомнительных» местах чертежа надо строить больше точек.



Черт. 284.

Указанная выше схема построения графиков носит лишь ориентировочный характер. Если заданная функция $y=f(x)$ достаточно проста или нас интересует лишь приблизительный вид её графика, то можно ограничиться и частью из перечисленных выше пунктов. Например: $y=\frac{1}{1+x^2}$; ясно, что при $x=0$ функция имеет максимальное значение, равное 1. Эта функция возрастающая на интервале $(-\infty, 0)$ и убывающая на интервале $(0, +\infty)$. При этом $\lim\limits_{x=\pm\infty} y=0$. Уже такое небольшое исследование даёт представление о графике заданной функции (черт. 285).



Черт. 285.

Для более точного вычерчивания графика следует дополнить проведённое исследование отысканием точек перегиба, исследованием выпуклости и т. д.

Приведём примеры:

Пример 1.

$$y=2x^3+3x^2-6x-4.$$

Областью определения функции служит интервал $(-\infty, +\infty)$.

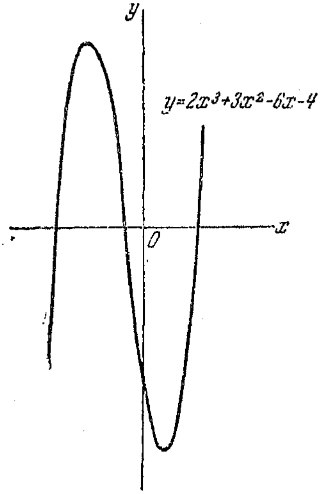
Находим производные:

$$y'=6(x^2+x-1),$$
$$y''=6(2x+1).$$

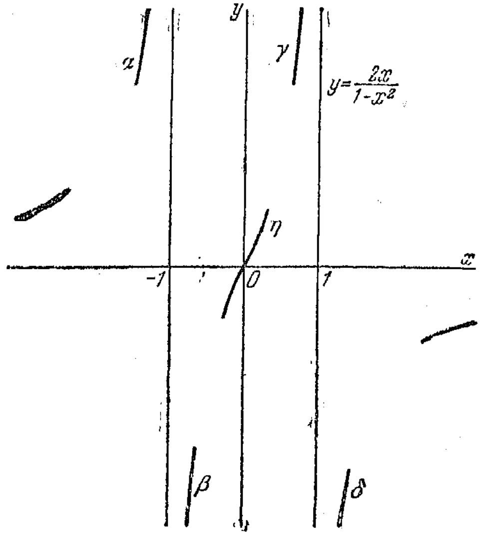
Ищем стационарные точки:

$y'=0,\quad x^2+x-1=0,\quad x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\approx-1,6,\quad x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0,6;$

x_1 есть точка максимума, а x_2 — точка минимума. Ищем точки перегиба:



Черт. 286.



Черт. 287.

$y''=0,\ 2x+1=0,\ x=-\frac{1}{2}$, причём, если $x<-\frac{1}{2}$, то $y''<0$, а если $x>-\frac{1}{2}$, то $y''>0$.

Следовательно, при $x=-\frac{1}{2}$ имеем переход от отрицательной выпуклости к положительной.

Заметим ещё, что

$$\lim_{x=+\infty} y=+\infty,\quad \lim_{x=-\infty} y=-\infty.$$

Найдём значение ординат в точках экстремума и ординату точки перегиба $y_1=2x_1^3+3x_1^2-6x_1-4\approx 5,09$,

$$y_2\approx-6,09,$$
$$y_3\approx-\frac{1}{2}.$$

Найдём точку пересечения линии с осью Oy:

$$y_0=f(0)=-4,\quad (0,-4).$$

Полученные данные достаточны для построения графика (черт. 286).

Пример 2.

$$y=\frac{2x}{1-x^2}.$$

При $x=\pm 1$ функция не определена. Областью определения функции служат интервалы $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$. В точках $x=\pm 1$, имеем:

$$\lim_{x=-1-} y=+\infty, \quad \lim_{x=-1+} y=-\infty,$$

$$\lim_{x=1-} y=+\infty, \quad \lim_{x=1+} y=-\infty.$$

Наносим на чертёж дуги α, β, γ и δ, схематически характеризующие полученные результаты (черт. 287).

Найдём y' и y'':

$$y'=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}, \quad y''=\frac{4x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Стационарные точки отсутствуют, так как первая производная всегда положительна, исключая точек $x=\pm 1$, в которых она теряет смысл; но эти точки с самого начала исключены, так как они не входят в область определения функции.

В интервалах $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ функция возрастает, так как $y'>0$.

Найдём корни второй производной:

$$y''=0, \ x=0.$$

Исследуем полученную точку:

$$\begin{array}{ll} \text{если } -1<x<0, & \text{то } y''<0, \\ \text{если } 0<x<1, & \text{то } y''>0. \end{array}$$

Следовательно, $x=0$ есть точка перегиба, причём в полуинтервале $(-1, 0]$ линия имеет отрицательную выпуклость, а в полуинтервале $[0, 1)$ — положительную.

Так как $y=0$ при $x=0$, то линия проходит через начало координат. Сказанное мы отметим на чертеже дугой η. При $x<-1$ имеем $y''>0$, а при $x>1$, $y''<0$, т. е. слева от точки $x=-1$ линия имеет положительную выпуклость, а справа от точки $x=+1$—отрицательную.

Исследуем пределы функции в точках $x=+\infty$ и $x=-\infty$. Имеем:

$$\lim_{x=-\infty} y=\lim_{x=-\infty}\frac{2x}{1-x^2}=\lim_{x=-\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}-x}=0,$$

$$\lim_{x=+\infty} y=\lim_{x=+\infty}\frac{2x}{1-x^2}=\lim_{x=+\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}-x}=0.$$

Отметим также, что для значений x, достаточно далёких от 0, но отрицательных, $y=\frac{2x}{1-x^2}>0$, так как $2x<0$ и $1-x^2<0$, а для значений x, достаточно далёких от 0, но положительных, $y<0$, так как $2x>0$, а $1-x^2<0$. Следовательно, точка, неограниченно удаляющаяся по графику влево, неограниченно приближается к оси Ox сверху; если же она неограниченно удаляется вправо, то она неограниченно приближается к оси Ox

снизу. Полученное можно символически записать так:

$$\lim_{x=-\infty} y = 0+, \quad \lim_{x=+\infty} y = 0-.$$

Теперь мы можем построить график нашей функции (черт. 288).

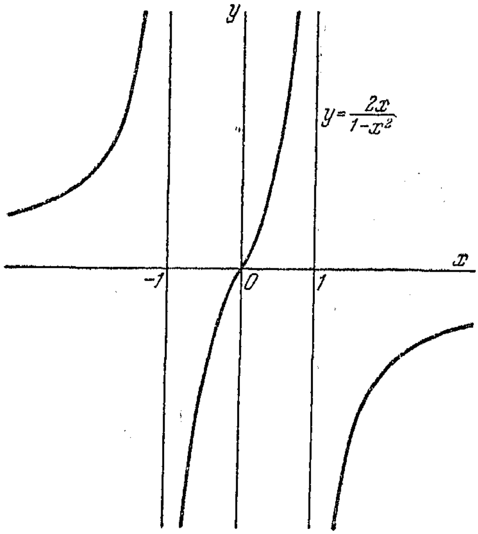
Пример 3.

$$y = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}.$$

Функция определена при

$$\frac{x+2}{x-2} \geqslant 0.$$

Последнее неравенство имеет следующие решения:



Черт. 288.

$x \leqslant -2$, $x > 2$, причём значение $x = -2$ является пулём функции. Кроме того, отметим, что $y \geqslant 0$.

Итак, график функции расположен вне полосы, ограниченной прямыми $x = -2$, $x = 2$.

Рассмотрим пределы функции в точках $x = +\infty$, $x = -\infty$:

$$\lim_{x=\pm\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = \lim_{x=\pm\infty} \sqrt{\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}} = 1;$$

если $x > 2$, то $|x+2| > |x-2|$, $y > 1$, при $x < -2$ будет $|x+2| < |x-2|$ и $y < 1$.

Итак, точка, неограниченно удаляющаяся по линии вправо, неограниченно приближается сверху к прямой $y = 1$, а при удалении влево она неограниченно приближается к той же прямой снизу — это отмечено дугами α и β на черт. 289.

Далее:

$$\lim_{x=2+}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}=+\infty$$

— это мы отметим дугой γ.

Найдём первую производную:

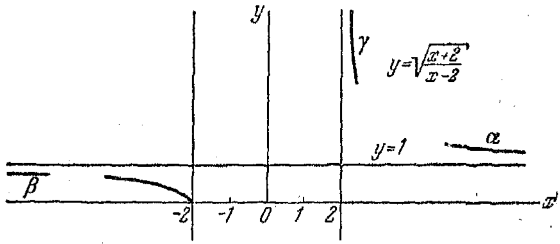
$$y' = -\frac{2}{(x-2)\sqrt{x^2-4}}.$$

Из рассмотрения y' следует, что точки экстремума отсутствуют.

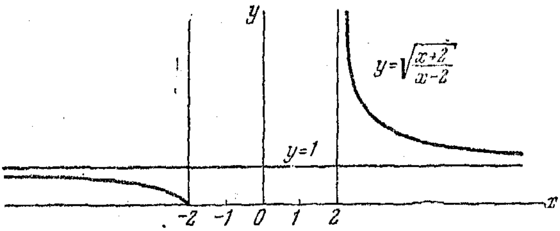
Находим y'':

$$y''=\frac{4(x+1)}{(x-2)^2(x+2)\sqrt{x^2-4}}.$$

Числитель обращается в нуль только в точке $x=-1$, но эта точка не входит в область определения функции. Итак, точки перегиба отсутствуют.



Черт. 289.



Черт. 290.

Кроме того, $y''>0$ при $x>2$ и $y''<0$ при $x<-2$. Следовательно, в интервале $(2,+\infty)$ линия имеет положительную выпуклость, а в полуинтервале $(-\infty,-2]$ — отрицательную.

Полученные данные дают достаточное представление о графике (черт. 290).

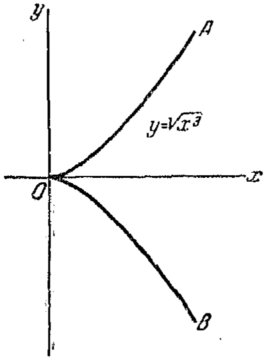
Пример 4.

$$y^2 = x^3;$$

по существу мы здесь имеем две функции:

$$y = \sqrt{x^3} \quad \text{и} \quad y = -\sqrt{x^3},$$

графики которых симметричны относительно оси Ox.



Черт. 291.

Построим график функции $y = \sqrt{x^3}$. Областью её определения служит полуинтервал $[0, +\infty)$.

Находим: $\lim\limits_{x=+\infty} y = +\infty$; далее находим:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x},$$

$$y'' = \frac{3}{4\sqrt{x}};$$

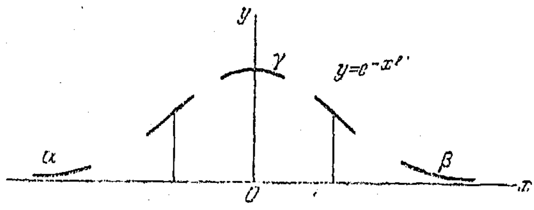
$y' > 0$ и $y'' > 0$ при $x > 0$, т. е. в полуинтервале $[0, +\infty)$ функция $y = \sqrt{x^3}$ возрастает и имеет положительную выпуклость.

Производная y' в точке $x = 0$ равна нулю, а так как линия проходит через начало координат, то ось Ox является касательной к линии.

Сказанное достаточно для построения графика функции (линия OA на черт. 291). График функции $y = -\sqrt{x^3}$ представляет линию OB на том же чертеже.

Линия BOA называется полукубической параболой; она имеет точку заострения в начале координат.

Пример 5. $y = e^{-x^2}$ — линия вероятностей.



Черт. 292.

Областью определения функции является интервал $(-\infty, +\infty)$; функция чётная, следовательно, график её симметричен относительно оси Oy $y > 0$ при любом значении x, т. е. график расположен выше оси Ox. Имеем: $\lim\limits_{x=\pm\infty} y = 0$, что и отмечено дугами α и β на черт. 292. Далее находим:

$$y' = -2xe^{-x^2},$$

$$y'' = 2(2x^2 - 1)\,e^{-x^2}.$$

Отсюда $x = 0$ есть корень y'. Исследуем эту точку на экстремум. Имеем: при $x < 0$, $y' > 0$; при $x > 0$, $y' < 0$. Следовательно, в точке $x = 0$ функция имеет максимум, равный $f(0) = 1$ — дуга γ на черт. 292. Далее $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ —

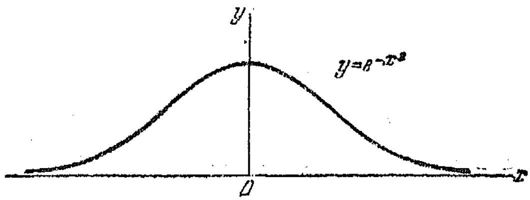
корни y''. Исследуем их. Имеем:

$$\text{если } x < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{то } y'' > 0;$$

$$\text{если } -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ то } y'' < 0;$$

$$\text{если } x > \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{то } y'' > 0;$$

значит, в точке $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ линия переходит от положительной выпу-



Черт. 293.

клости к отрицательной, а в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ — наоборот.

Сказанного достаточно для построения графика (черт. 293).

ГЛАВА XVII

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 143. Понятие неопределённого интеграла

Выше мы рассмотрели задачу нахождения скорости в прямолинейном движении. Рассмотрим обратную задачу.

Пример 1. Скорость v прямолинейного движения выражается формулой:

$$v = 7t,$$

где t — время. Найти уравнение движения.

Решение. Пусть

$$s = f(t)$$

— уравнение движения. Производная пути по времени есть скорость v:

$$s' = f'(t) = v \text{ или } f'(t) = 7t.$$

Следовательно, мы ищем функцию, производная которой равна $7t$. Легко догадаться, что такой функцией является, например, следующая:

$$s = \frac{7t^2}{2},$$

так как $\left(\frac{7t^2}{2}\right)' = 7t$. Такими функциями будут, например, и следующие:

$$\frac{7t^2}{2} + 2, \quad \frac{7t^2}{2} - \sqrt[3]{5}, \quad \frac{7t^2}{2} + 108$$

и т. д.; вообще любая функция

$$\frac{7t^2}{2} + C,$$

где C — произвольное число. В самом деле: для всех таких функций имеем:

$$\left(\frac{7t^2}{2} + C\right)' = 7t.$$

Итак, $s = \frac{7t^2}{2} + C$ было бы решением задачи, если бы мы были гарантированы в том, что $\frac{7t^2}{2} + C$ есть общее выражение функции, производная которой есть $7t$, т. е. гарантированы, что не существует больше никаких других функций кроме функций вида $\frac{7t^2}{2} + C$ (C — число), производные которых также равны $7t$. Ниже будет доказано, что это в действительности так. Таким образом соотношением $s=\frac{7t^2}{2}+C$ даётся полное решение поставленной задачи.

Пусть, например, мы хотим определить путь за промежуток времени от $t=2$ до $t=5$ сек. Имеем: $\frac{7\cdot 5^2}{2}-\frac{7\cdot 2^2}{2}=\frac{147}{2}$ $м=73{,}5$ метра.

Пример 2. Ускорение a прямолинейного движения определяется формулой

$$a=\cos t.$$

Найти скорость v.

Решение. Так как ускорение есть производная скорости по времени

$$a=v',$$

то дело сводится к нахождению функции, производная которой равна $\cos t$. Одной из таких функций является $\sin t$, так как

$$(\sin t)'=\cos t.$$

Решением служит также любая функция

$$v=\sin t+C,$$

где C — произвольное число, так как

$$(\sin t+C)'=\cos t;$$

ниже будет показано, что других решений не существует.

В обоих примерах мы по существу имеем одну задачу: найти функцию $\varphi(x)$, производная которой равна заданной функции $f(x)$.

Определение. *Функция $\varphi(x)$ называется первообразной или примитивной для функции $f(x)$, если производная от $\varphi(x)$ равна $f(x)$*:

$$\varphi'(x)=f(x).$$

Например, для функции $f(x)=7x$ первообразные $\frac{7x^2}{2}, \frac{7x^2}{2}-1, \ldots, \frac{7x^2}{2}+C$, где C — произвольное число. Для функции $\cos x$ первообразные:

$$\sin x,\ \sin x-5,\ \sin x+\sqrt{2},\ \ldots,\ \sin x+C,$$

где C — произвольное число.

Ясно, что если $\varphi(x)$ является первообразной для $f(x)$

$$\varphi'(x)=f(x),$$

то все функции вида

$$\varphi(x)+C$$

— первообразные для функции $f(x)$, так как

$$[\varphi(x)+C]'=f(x).$$

Докажем, что никакие другие функции, кроме $\varphi(x)+C$, не являются первообразными для $f(x)$.

Теорема 1. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются первообразными для $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ или интервале (a, b):*

$$\varphi'(x) = f(x), \quad \psi'(x) = f(x),$$

то они отличаются на число

$$\psi(x) = \varphi(x) + C.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\psi(x) - \varphi(x).$$

Её производная равна нулю во всех точках сегмента $[a, b]$ (интервала (a, b)):

$$[\psi(x) - \varphi(x)]' = \psi'(x) - \varphi'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

следовательно, эта функция является постоянной, т. е.

$$\psi(x) - \varphi(x) = C,$$

откуда

$$\psi(x) = \varphi(x) + C.$$

Итак, найдя одну первообразную $\varphi(x)$ для функции $f(x)$, мы знаем уже всё множество первообразных функций: $\varphi(x) + C$, где C — произвольное число. Это множество первообразных для $f(x)$ называется неопределённым интегралом от $f(x)$ и обозначается так:

$$\int f(x)\,dx,$$

т. е.

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C,$$

где

$$\varphi'(x) = f(x).$$

Символ $\int f(x)\,dx$ читается так: «интеграл эф от икс де икс».

Функция $f(x)$ называется подинтегральной функцией, произведение $f(x)\,dx$ называется подинтегральным выражением, а символ $\int$ — знаком интеграла.

Пример 3. $\int 2x\,dx = x^2 + C,$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

По определению интеграла $\int f(x)\,dx$ имеем:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x),$$

т. е. *производная от неопределённого интеграла равна подинтегральной функции.*

Теорема 2. *Дифференциал от неопределённого интеграла равен подинтегральному выражению.*

Доказательство:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right)=\left[\int f(x)\,dx\right]'dx=f(x)\,dx.$$

Итак, два символа d и $\int$ можно просто зачеркнуть, если они стоят в таком порядке: $d\int$, например,

$$d\int \cos x\,dx=\cos x\,dx.$$

Теорема 3. *Неопределённый интеграл от дифференциала функции $\varphi(x)$ равен $\varphi(x)+C$.*

Доказательство. Пусть $\varphi'(x)=f(x)$, тогда функция $\varphi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ и $d\varphi=f(x)\,dx$, следовательно,

$$\int d\varphi=\int f(x)\,dx.$$

Последний интеграл равен $\varphi(x)+C$, т. е.

$$\int d\varphi=\int f(x)\,dx=\varphi(x)+C, \text{ ч. т. д.}$$

Как видно, зачёркивание символа $\int d$ приводит к добавочному слагаемому C. Это и естественно: операция нахождения дифференциала решается однозначно, а операция нахождения интеграла приводит к бесконечному множеству решений. Следовательно, порядок, в котором эти операции производятся, не безразличен.

§ 144. Таблица интегралов

Из определения неопределённого интеграла и таблицы производных непосредственно находим следующую таблицу основных неопределённых интегралов.

Основные интегралы:

I. $\int u^\alpha\,du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, если $\alpha\neq-1$; II. $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$;

III. $\int a^u\,du=\frac{a^u}{\ln a}+C\ (a>0)$; IV. $\int e^u du=e^u+C$;

V. $\int\sin u\,du=-\cos u+C$; VI. $\int\cos u\,du=\sin u+C$;

VII. $\int\frac{du}{\cos^2 u}=\operatorname{tg} u+C$; VIII. $\int\frac{du}{\sin^2 u}=-\operatorname{ctg} u+C$;

IX. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C;$ X. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C;$

XI. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C;$ XII. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

XIII. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C;$ XIV. $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + C;$

$$\text{XV. } \int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a}\right| + C;$$

$$\text{XVI. } \int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C.$$

Для проверки всех этих формул достаточно показать, что производные правых частей равны подинтегральным функциям или что дифференциалы правых частей равны подинтегральным выражениям. Для примера докажем некоторые из формул таблицы.

Вывод формулы IX:

$$d\left[-\ln|\cos u|\right] = -\frac{d\cos u}{\cos u} = -\frac{-\sin u\, du}{\cos u} = \operatorname{tg} u\, du.$$

Мы получили подинтегральное выражение, стоящее в левой части формулы IX; значит, эта формула верна.

Вывод формулы XI:

$$d\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right|\right] = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{u}{2}}\,\frac{1}{2}\,du = \frac{du}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}} = \frac{du}{\sin u}.$$

Аналогично выводятся и все остальные формулы.

Данная таблица является основной для решения задач, связанных с интегрированием.

Пример 1. $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C.$

Пример 2. $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\,\frac{x}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$$

Пример 3. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\,\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Пример 4. $\int \frac{x\,dx}{x^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+3)}{x^2+3} = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + C.$

Пример 5. $\int \operatorname{tg} x \sec^2 x\, dx = \int \operatorname{tg} x\, d\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C.$

§ 145. Задача Коши. Геометрический смысл неопределённого интеграла

Задача нахождения интеграла данной функции является неопределённой в том смысле, что если данная на сегменте функция имеет хотя бы одну примитивную, то она имеет и бесконечное множество примитивных.

Поэтому интеграл $\int f(x)\,dx$ и называется неопределённым. Эта неопределённость устраняется, если на искомую функцию наложить добавочные условия; именно: пусть дана функция $f(x)$, требуется найти первообразную, обращающуюся в y_0 при $x = x_0$.

Эта задача называется задачей Коши.

Решение задачи основано на следующих соображениях: пусть

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C,$$

где $\varphi(x)$ — некоторая первообразная функция для функции $f(x)$. По условию задачи имеем:

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0,$$

т. е.

$$y_0 = \varphi(x_0) + C,$$

откуда находим

$$C = y_0 - \varphi(x_0),$$

и искомое решение примет вид:

$$\varphi(x) + y_0 - \varphi(x_0).$$

Пример 1. Пусть

$$v = 7t$$

скорость прямолинейно движущегося тела. Найти уравнение движения, если известно, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ путь был равен 10, $s_0 = 10$.

Решение. Имеем:

$$s' = v \text{ или } s' = 7t,$$

откуда

$$s = \int 7t\,dt = \frac{7t^2}{2} + C.$$

Найдём C, исходя из начальных условий:

$$t_0 = 0,\ s_0 = 10,$$

т. е.

$$10 = C + 0,\ C = 10.$$

Окончательно получим:

$$s = \frac{7t^2}{2} + 10.$$

Дадим геометрическую иллюстрацию задачи Коши. Символ $\int f(x)\,dx$ означает множество функций

$$y = \varphi(x) + C,$$

где C — произвольное число. Пусть линия AB является графиком функции $y=\varphi(x)$ (черт. 294). Графики всех функций

$$y=\varphi(x)+C$$

получаются из линии AB, если увеличить на C все ординаты этой линии (перенос). Итак, интеграл $\int f(x)dx$ геометрически изображается множеством линий

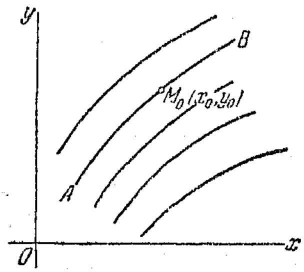
$$y=\varphi(x)+C,$$

полученных из одной всеми её переносами по направлению оси Oy.

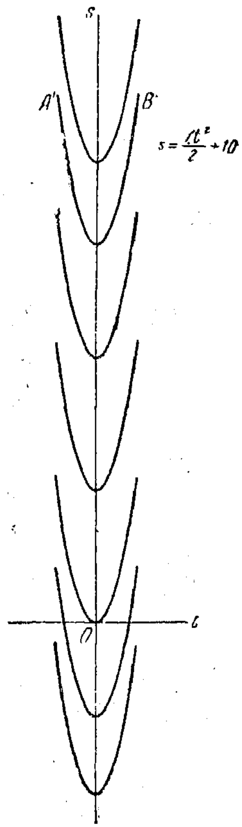
Это множество линий называется семейством интегральных линий. Задача Коши заключается в том, чтобы выбрать из этого семейства линию, проходящую через заданную точку (x_0, y_0). Уравнение этой линии:

$$y=\varphi(x)+y_0-\varphi(x_0).$$

В частности, в примере 1 мы имели семейство парабол $s=\frac{7t^2}{2}+C$



Черт. 294.



Черт. 295.

(черт. 295), и мы из этого семейства выделили параболу $A'B'$, проходящую через точку (0,10).

§ 146. Теорема о существовании первообразной

Возникает следующий вопрос: для всякой ли функции существует первообразная, а следовательно, и интеграл? На этот вопрос приходится дать отрицательный ответ. Приведём пример функции, для которой не существует неопределённого интеграла.

Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{если } x \leqslant 0, \\ 2, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

График её (черт. 296) состоит из двух лучей, параллельных оси Ox: луча AB, включая точку B, и луча KD, исключая точку K. Если существует функция $\varphi(x)$, первообразная для этой функции $f(x)$, то для всех $x<0$ должно быть

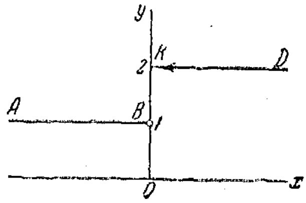
$$\varphi'(x)=f(x)=1,$$

следовательно, $\varphi(x)=x+C$, где $x<0$; для всех $x>0$ должно быть

$$\varphi'(x)=f(x)=2,$$

следовательно,

$$\varphi(x)=2x+C_1, \text{ где } x>0.$$

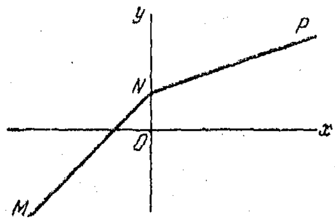


Черт. 296.

Итак, если первообразная функция $\varphi(x)$ для данной функции существует, то

$$\varphi(x)=\begin{cases} x+C, & \text{если } x<0, \\ 2x+C_1, & \text{если } x>0. \end{cases}$$

Докажем, что $C=C_1$. В самом деле, так как функция $\varphi(x)$ дифференцируема (такую функцию мы и ищем), то она непрерывна. Следовательно, левый предел этой функции в точке $x=0$ должен быть равен правому и равен значению функции $\varphi(x)$ в точке $x=0$:



Черт. 297.

$$\varphi(0)=\lim_{x\to 0-}(x+C)=C=$$
$$=\lim_{x\to 0+}(2x+C_1)=C_1,$$

т. е.

$$C=C_1.$$

Итак, если первообразная функция $\varphi(x)$ для данной функции существует, то она имеет вид

$$\varphi(x)=\begin{cases} x+C, & \text{если } x\leqslant 0, \\ 2x+C, & \text{если } x\geqslant 0, \end{cases}$$

где C — число. Независимо от значения C график функции $\varphi(x)$ состоит из двух лучей MN и NP (черт. 297), причём угол от оси Ox до луча MN равен $\alpha=\frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{tg}\alpha=1$, а угол от оси Ox до луча NP равен $\beta=\operatorname{arctg} 2$, так как $\operatorname{tg}\beta=2$. Теперь ясно противоречие, к которому нас привело предположение, что существует первообразная функция для $f(x)$: с одной стороны, существует производная $\varphi'(x)=f(x)$, а с другой стороны — не существует производной от $\varphi(x)$ в точке $x=0$, так как не существует касательной к ломаной MNP в угловой точке N. Следовательно, наше предположение, что первообразная существует, — неверно.

Итак, мы привели пример функции $f(x)$, для которой не существует неопределённого интеграла.

Следующей теоремой интегрального исчисления — теоремой существования интеграла — даётся достаточный признак существования примитивной функции для данной.

Теорема. *Если на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна, то для неё существует первообразная функция $\varphi(x)$, т. е. такая функция $\varphi(x)$, производная которой равна $f(x)$ при всех x из сегмента $[a, b]$.*

Доказательство этой теоремы выходит за рамки нашего курса.

Везде дальше, где нам придётся говорить о первообразных функциях для функции $f(x)$, мы будем предполагать, что в рассматриваемом сегменте функция $f(x)$ непрерывна.

Упражнения

357. Скорость v тела равна

$$v=3t^2.$$

Найти уравнение движения, если известно, что в момент времени $t=2$ путь s был равен 10.

358. Найти скорость тела, если известно его ускорение

$$a=\cos t$$

и начальная скорость $v_0=0$ в момент $t_0=0$.

§ 147. Основные теоремы о неопределённом интеграле

Теорема 1. *Неопределённый интеграл суммы функций, для каждой из которых существует первообразная, равен сумме неопределённых интегралов от этих функций:*

$$\int[f_1(x)+f_2(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx \quad (1).$$

Для доказательства достаточно показать, что производные правой и левой части равны. Имеем:

$$\left[\int[f_1(x)+f_2(x)]\,dx\right]'=f_1(x)+f_2(x)$$

по определению интеграла и

$$\left[\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx\right]'=\left(\int f_1(x)\,dx\right)'+\left(\int f_2(x)\,dx\right)'=f_1(x)+f_2(x);$$

итак,

$$\left[\int[f_1(x)+f_2(x)]\,dx\right]'=\left[\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx\right]'.$$

Примечание. Обращаем внимание читателя на то, как надо понимать равенство $\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$.

Левая часть этого равенства означает множество всех функций, первообразных для функции $f_1(x) + f_2(x)$. В правой части этого равенства имеем сумму двух слагаемых: первое слагаемое даёт множество функций, состоящее из всех первообразных для $f_1(x)$, а второе — множество функций, первообразных для $f_2(x)$. Само равенство означает, что любая функция 1-го множества является суммой двух функций: некоторой первообразной для $f_1(x)$ и некоторой первообразной для $f_2(x)$. Наоборот, взяв сумму любой первообразной функции для $f_1(x)$ и любой первообразной для функции $f_2(x)$, мы получим функцию, являющуюся одной из первообразных для функции $f_1(x) + f_2(x)$.

Иначе говоря: множество функций левой части равенства совпадает со множеством функций правой части.

Аналогичное примечание имеет место и для всех последующих теорем о неопределённом интеграле.

Теорема 2. *Числовой множитель можно вынести за знак неопределённого интеграла:*

$$\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx.$$

Доказательство. Имеем:

$$\left(\int Cf(x)\,dx\right)' = Cf(x),$$

$$\left(C\int f(x)\,dx\right)' = C\left(\int f(x)\,dx\right)' = Cf(x).$$

Пример 1. $\int (2x^5 - 4x + 1 - e^x)\,dx = \int 2x^5\,dx - \int 4x\,dx +$

$$+\int dx - \int e^x dx = \frac{1}{3}x^6 - 2x^2 + x - e^x + C.$$

Теорема 3 (интегрирование подстановкой). *Если заменить x дифференцируемой функцией* $\omega(t)$, имеющей непрерывную производную

$$x = \omega(t),$$

то

$$\int f(x)\,dx = \int f[\omega(t)]\,\omega'(t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ есть первообразная для $f(x)$, т. е. $\varphi'(x) = f(x)$. После замены x функцией $\omega(t)$, функция $\varphi(x)$ становится сложной, именно, $\varphi(x) = \varphi[\omega(t)]$, отсюда $\varphi'_t = \varphi'_x[\omega(t)]\,\omega'(t)$ по теореме о производной сложной функции. Следовательно,

$$\int f(x)\,dx = \int d\varphi = \int d\varphi'[\omega(t)] = \int \varphi'[\omega(t)]\,\omega'(t)\,dt.$$

Пример 2. Найти

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Решение. Здесь полезна подстановка

$$x=a\sin z \quad (\text{или } x=a\cos z).$$

Имеем:

$$dx=a\cos z\,dz,$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 z}=a\cos z.$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int a\cos z\; a\cos z\,dz=a^2\int \cos^2 z\,dz=$$

$$=a^2\int \frac{1+\cos 2z}{2}\,dz=\frac{a^2}{2}\int dz+\frac{a^2}{2}\int \cos 2z\,dz=\frac{a^2 z}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2z+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}(z+\sin z\cos z)+C.$$

Перейдём обратно к аргументу x. Имеем:

$$\sin z=\frac{x}{a}, \quad \cos z=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \quad z=\arcsin\frac{x}{a}$$

и окончательно

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Пример 3. Найти

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}} \quad (a>0).$$

Решение. Здесь полезна подстановка

$$x=a\operatorname{tg} z \quad (\text{или } x=a\operatorname{ctg} z).$$

Имеем:

$$dx=\frac{a\,dz}{\cos^2 z},$$

$$a^2+x^2=a^2\sec^2 z,$$

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{a^6\sec^6 z}}=\frac{\cos^3 z}{a^3}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}=\int \frac{a\,dz}{\cos^2 z}\cdot\frac{\cos^3 z}{a^3}=\frac{1}{a^2}\int \cos z\,dz=\frac{1}{a^2}\sin z+C.$$

Вернёмся к аргументу x. Из равенства $x=a\operatorname{tg} z$ находим:

$$\sin z=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

и окончательно получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C.$$

Пример 4. Найти

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx \quad (a>0).$$

Полагаем:

$$x=\frac{a}{\cos z}\left(\text{или}\quad x=\frac{a}{\sin z}\right),$$

откуда

$$dx=\frac{a\sin z}{\cos^2 z}\,dz,$$

$$\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\frac{\sqrt{\dfrac{a^2}{\cos^2 z}-a^2}}{\dfrac{a}{\cos z}}=\cos\sqrt{\sec^2 z-1}=\cos z\,|\operatorname{tg} z|.$$

Если $\operatorname{tg} z>0$, то $|\operatorname{tg} z|=\operatorname{tg} z$ и значит

$$\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\sin z.$$

Следовательно,

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx=\int\sin z\cdot\frac{a\sin z}{\cos^2 z}\,dz=a\int\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}\,dz=$$

$$=a\int\frac{1-\cos^2 z}{\cos^2 z}\,dz=a(\operatorname{tg} z-z)+C.$$

Вернёмся к аргументу x. Имеем:

$$\cos z=\frac{a}{x},\quad \sin z=\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{|x|},$$

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{|x|}\cdot\frac{x}{a}=\frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

так как $\operatorname{tg} z>0$,

$$z=\arccos\frac{a}{x},$$

и окончательно

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\cdot\arccos\frac{a}{x}+C;$$

проделайте выкладки, предполагая, что $\operatorname{tg} z<0$.

Пример 5. В интеграле

$$\int\frac{e^x\,dx}{1+e^x}$$

сделаем подстановку

$$1+e^x=z.$$

Отсюда $e^x\,dx=dz$ и значит:

$$\int\frac{e^x\,dx}{1+e^x}=\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+C=\ln|e^x+1|+C=\ln(e^x+1)+C.$$

Пример 6. Найти

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\,dx.$$

Решение. Сделав подстановку

$$x=\frac{1}{z}; \quad dx=-\frac{dz}{z^2},$$

найдём

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\,dx=-\int(a^2z^2-1)^{\frac{1}{2}}\,z\,dz.$$

Сделаем ещё одну подстановку

$$a^2z^2-1=u;\ 2a^2z\,dz=du,\ z\,dz=\frac{du}{2a^2}.$$

Тогда получим

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\,dx=-\int u^{\frac{1}{2}}\frac{du}{2a^2}=-\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C.$$

Вернёмся к аргументу x:

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\,dx=-\frac{1}{3a^2}u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{(a^2z^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C=-\frac{\left(\frac{a^2}{x^2}-1\right)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C.$$

Теорема 4 (интегрирование по частям). *Если u и v — функции от x, определённые на сегменте $[a, b]$ и имеющие на этом сегменте непрерывные производные, то*

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Доказательство. Имеем

$$d(uv)=u\,dv+v\,du,$$

откуда

$$u\,dv=-v\,du+d(uv).$$

Интегрируя, получим:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

С помощью этой формулы интегрирование произведения $u\,dv$ заменяется интегрированием произведения $v\,du$, которое иногда может быть легко выполнено.

Пример 7. Найти

$$\int x\sin x\,dx.$$

Решение. Пусть

$$x=u,\quad \sin x\,dx=dv.$$

Тогда

$$du=dx,\quad v=\int\sin x\,dx=-\cos x$$

и мы получим

$$\int\underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin x\,dx}_{dv}=-\underbrace{x\cos x}_{uv}-\int-\underbrace{\cos x}_{v}\underbrace{dx}_{du}=-x\cos x+\sin x+C.$$

Пример 8. Найти

$$\int x \ln x \, dx.$$

Решение. Пусть

$$\ln x = u, \quad x\,dx = dv.$$

Тогда

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2;$$

и мы получим:

$$\int x \ln x = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Пример 9. Найти

$$\int x^2 e^x \, dx.$$

Решение. Пусть

$$x^2 = u, \quad e^x\,dx = dv.$$

Тогда

$$du = 2x\,dx, \ v = \int e^x\,dx = e^x$$

и мы получим:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int e^x x\,dx.$$

К интегралу $\int xe^x\,dx$ снова применим формулу интегрирования по частям. Именно:

$$x = u, \quad e^x\,dx = dv.$$

Тогда

$$du = dx, \quad v = \int e^x\,dx = e^x$$

и значит,

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Окончательно имеем:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x + C) = (x^2 - 2x + 2)\,e^x + C_1$$

(вместо $-2C$ мы записали C_1, так как C — произвольное число).

Пример 10. Найти

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \; dx.$$

Решение.

$$\int \underbrace{\operatorname{arc\,tg}}_{u} \underbrace{x\,dx}_{dv} = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$
$$= x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример 11. Найти

$$\int e^x \sin x\,dx.$$

Решение. Пусть

$$e^x = u, \ \sin x\,dx = dv.$$

Тогда

$$du = e^x\,dx, \quad v = -\cos x$$

и мы получим:

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx.$$

Снова применим формулу интегрирования по частям:

$$e^x = u, \qquad \cos x\,dx = dv;$$
$$du = e^x\,dx, \qquad v = \sin x.$$

Итак:

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx,$$

т. е. получается уравнение относительно искомого интеграла.

Решаем его: $2\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) + C,$

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

Замечание. После некоторого навыка в применении формулы интегрирования по частям читатель может опускать промежуточные этапы в нахождении du и v, если они не требуют сами по себе значительных выкладок, и интегрирования производить так:

$$1)\ \int x^2 e^x\,dx = \int x^2\,d(e^x) = x^2e^x - \int e^x d(x^2) = x^2e^x - 2\int e^x x\,dx =$$
$$= x^2e^x - 2\int x\,d(e^x) = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx =$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = (x^2 - 2x + 2)\,e^x + C.$$

(См. пример 9.)

$$2)\ \int e^x \sin x\,dx = \int \sin x\,d(e^x) = e^x \sin x - \int e^x d(\sin x) =$$
$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int \cos x\,d(e^x) =$$
$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d(\cos x) = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\,dx,$$

откуда

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) + C_1,$$
$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

(См. пример 11.)

В заключение приведём несколько примеров интегрирования рациональных дробей и некоторых тригонометрических функций.

Общей теории таких интегралов мы излагать не будем.

Пример 12. Найти

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-5)}\,dx.$$

Решение. Подберём такие два числа A и B, чтобы:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-5},$$

как говорят, разложим данную дробь на простейшие или элементарные. Неизвестные коэффициенты A и B найдём так:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-5)}=\frac{A(x-5)+B(x-1)}{(x-1)(x-5)};$$

освободившись от знаменателей, получим:

$$x+1=A(x-5)+B(x-1).$$

Подберём A и B так, чтобы это равенство было тождество, т. е. чтобы оно было верно при любых значениях x. Дадим x значение 5. Получим:

$$6=4B,$$

откуда

$$B=\frac{3}{2}.$$

Дадим x значение 1. Получим:

$$2=-4A,$$

откуда

$$A=-\frac{1}{2}.$$

Итак:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-5)}=-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{2(x-5)}$$

(проверьте это соотношение, производя справа указанные действия).

Теперь имеем:

$$\int\frac{x+1}{(x-1)(x-5)}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-5}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x-5|+\ln C=\ln C\sqrt{\frac{|x-5|^3}{|x-1|}}.$$

Произвольное число мы записали в виде $\ln C$ для более изящной записи результата (при этом теперь мы считаем $C>0$, так как если C принимает все положительные значения, то $\ln C$ принимает все действительные значения).

Пример 13. Найти

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+x+1}.$$

Решение. Если бы корни знаменателя были действительными числами α и β, то, представив его в виде произведения $(x-\alpha)(x-\beta)$, мы пришли бы к интегралу того же типа, что и в предыдущем примере. Но в данном случае корни знаменателя комплексные числа. Применим следующий приём: представим знаменатель в виде суммы квадратов:

$$x^2+x+1=x^2+x+\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Положим

$$x+\frac{1}{2}=z.$$

Теперь интеграл примет вид:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+x+1} = \int \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)dz}{z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \int \frac{z\,dz}{z^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(z^2+\frac{3}{4}\right)}{z^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\int \frac{dz}{1+\left(\frac{2z}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(z^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(\frac{2z}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{2z}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(z^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2z}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 14. Найти

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Решение. Имеем:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Пример 15. Найти

$$\int \sin 2x \cos 7x\,dx.$$

Решение. Применив формулу

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],$$

известную из курса тригонометрии, получим:

$$\int \sin 2x\cos 7x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin 9x - \sin 5x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{18}\cos 9x + \frac{1}{10}\cos 5x + C.$$

Аналогично берётся интеграл и в случае, когда подинтегральная функция имеет вид

$$\sin mx \sin nx$$

или

$$\cos mx \cos nx.$$

Пример 16.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{2+(x+1)^2}} = \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3})+C.$$

Пример 17. Найти интеграл:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{-2x^2+5x+1}}.$$

Решение. Так как

$$-2x^2+5x+1 = -2\left(x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}\right) = -2\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}-\frac{25}{16}-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{33}{16}\right] = \frac{33}{8}-2\left(x-\frac{5}{4}\right) =$$

$$= \frac{33}{8}\left[1-\frac{16}{33}\left(x-\frac{5}{4}\right)^2\right],$$

то

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{-2x^2+5x+1}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{\frac{33}{8}}\sqrt{1-\left[\frac{4\left(x-\frac{5}{4}\right)}{\sqrt{33}}\right]^2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{33}}\int \frac{4x\,dx}{\sqrt{1-\left[\frac{4x-5}{\sqrt{33}}\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{33}}\int \frac{[(4x-5)+5]\,dx}{\sqrt{1-\left[\frac{4x-5}{\sqrt{33}}\right]^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{4x-5}{\sqrt{33}}\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{4x-5}{\sqrt{33}}\right)^2}} + \frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{33}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{4x-5}{\sqrt{33}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{33}}{4\sqrt{2}}\int \frac{\frac{4x-5}{\sqrt{33}}\,d\,\frac{4x-5}{\sqrt{33}}}{\sqrt{1-\left(\frac{4x-5}{\sqrt{33}}\right)^2}} + \frac{5}{4\sqrt{2}}\int \frac{d\,\frac{4x-5}{\sqrt{33}}}{\sqrt{1-\left(\frac{4x-5}{\sqrt{33}}\right)^2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{33}}{4\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{4x-5}{\sqrt{33}}\right)^2} + \frac{5}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-5}{\sqrt{33}} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{1+5x-2x^2} + \frac{5}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-5}{\sqrt{33}} + C.$$

Упражнения

359. Найти следующие интегралы:

1) $\int (3x-7)^2\,dx$, 2) $\int \cos(2x+1)\,dx$, 3) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$,

4) $\int \frac{x^{1/3}+x^{1/2}}{x^{1/4}}\,dx$, 5) $\int \operatorname{tg} 3x\,dx$, 6) $\int \operatorname{ctg}(7x+5)\,dx$,

7) $\int \frac{x+1}{3x^2+4}\,dx$, 8) $\int \frac{x^3dx}{4x^2+3}$, 9) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$,

10) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$, 11) $\int \frac{\ln|x|dx}{x}$, 12) $\int xe^{x^2}dx$,

13) $\int \frac{dx}{1+e^x}$, 14) $\int e^{7x-4}\,dx$, 15) $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}\,dx$,

16) $\int \cos^5 x\sin x\,dx$, 17) $\int \sin^2 x\,dx$, 18) $\int \cos^2 x\,dx$,

19) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$, 20) $\int \sin^4 x\,dx$, 21) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{1+2\cos x}}$,

22) $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\sin 2x\,dx$, 23) $\int \frac{\cos^2 x\sin x\,dx}{2+3\cos^3 x}$, 24) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,dx$,

25) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x}\,dx$, 26) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

ГЛАВА XVIII

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 148. Задачи, связанные с понятием определённого интеграла

Пример 1. Вернёмся к примеру, заключающемуся в определении пути s, пройденного точкой за время от $t = 2$ сек. до $t = 5$ сек., если скорость, в зависимости от времени, выражается формулой $v = 7t$ *м/сек*; задача эта была уже решена; сейчас мы дадим другое её решение.

Разделим промежуток времени от $t = 2$ сек. до $t = 5$ сек. (т. е. промежуток времени в 3 секунды) на n равных частей, так что длительность каждого промежутка времени будет равна $\frac{3}{n}$ сек. и будем считать, что в течение каждого такого промежутка времени точка двигалась равномерно со скоростью, равной той, какую она имела в начале этого промежутка. Иначе говоря: за 1-й промежуток времени будем считать скорость точки, равной

$$v_1 = 7 \cdot 2 \text{ м/сек};$$

за 2-й промежуток времени будем считать скорость точки равной

$$v_2 = 7\left(2 + \frac{3}{n}\right) \text{ м/сек};$$

за 3-й промежуток времени будем считать скорость точки равной

$$v_3 = 7\left(2 + 2\,\frac{3}{n}\right) \text{ м/сек};$$

за $n - 1$-й промежуток времени будем считать скорость точки равной

$$v_{n-1} = 7\left[2 + (n-2)\,\frac{3}{n}\right] \text{ м/сек};$$

за n-й промежуток времени будем считать скорость точки равной

$$v_n = 7\left[2 + (n-1)\,\frac{3}{n}\right] \text{ м/сек}.$$

Отсюда находим пути S_1, S_2, S_3, ..., S_{n-1}, S_n, пройденные точкой за 1-й, 2-й, 3-й, ..., n-й промежуток времени (при указанном предположении о постоянстве скорости за каждый промежуток):

$$S_1 = v_1 \cdot \frac{3}{n}, \quad S_2 = v_2 \cdot \frac{3}{n}, \quad S_3 = v_3 \cdot \frac{3}{n}, \quad \ldots, S_{n-1} = v_{n-1} \cdot \frac{3}{n}, \quad S_n = v_n \cdot \frac{3}{n},$$

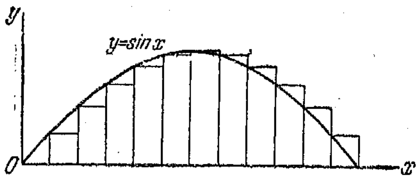
а отсюда находим приближённое значение σ_n пути, пройденного точкой (за время от $t=2$ сек. до $t=5$ сек.):

$$\sigma_n = S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{n-1}+S_n =$$
$$= v_1\cdot\frac{3}{n}+v_2\cdot\frac{3}{n}+v_3\cdot\frac{3}{n}+\ldots+v_{n-1}\cdot\frac{3}{n}+v_n\cdot\frac{3}{n}=$$
$$=\frac{3}{n}\left[7\cdot 2+7\left(2+\frac{3}{n}\right)+7\left(2+2\frac{3}{n}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+7\left(2+(n-2)\frac{3}{n}\right)+7\left(2+(n-1)\frac{3}{n}\right)\right]=$$
$$=\frac{3}{n}\left\{7\cdot 2\cdot n+7\cdot\frac{3}{n}\left[1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)\right]\right\}=$$
$$=\frac{3}{n}\left[7\cdot 2\cdot n+7\cdot\frac{3}{n}\,\frac{n(n-1)}{2}\right]=3\cdot 7\cdot 2+\frac{3\cdot 7\cdot 3}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Мы будем получать всё более точные результаты, если будем всё мельче и мельче дробить рассматриваемый промежуток времени в 3 сек. (т. е. будем неограниченно увеличивать n). Точное значение пути S можно найти, переходя к пределу:

$$S=\lim_{n=\infty}\sigma_n=3\cdot 7\cdot 2+\frac{3\cdot 7\cdot 3}{2}=73{,}5 \text{ метра.}$$

Это решение сложнее того, которое было дано выше. Более того: читателю только что приведённое решение может показаться не только более сложным, громоздким, но и менее строгим: мы допускаем постоянство скорости за промежуток времени $\frac{3}{n}$ сек.; этого в действительности нет, и хотя наше допущение при увеличении n вносит всё меньшую и меньшую погрешность за каждый промежуток времени $\frac{3}{n}$ сек., но число таких промежутков, а значит, и число погрешностей, растёт и остаётся ещё неясным — уменьшается ли при этом суммарная ошибка в определении пути за весь рассматриваемый промежуток времени. Наконец, только что приведённый метод может показаться читателю искусственным.



Черт. 298.

Рассмотрим ещё один пример.

Пример 2. Определить площадь, ограниченную осью Ox и одной волной синусоиды $y=\sin x$ (черт. 298).

Решение. Разобьём промежуток оси Ox от $x=0$ до $x=\pi$ на n равных частей, так что длина каждого промежутка равна $\frac{\pi}{n}$ и будем считать, что $\sin x$ на каждом таком промежутке приближённо равен значению $\sin x$ в начале промежутка. При этом предположении синусоида $y=\sin x$ заменится рядом «ступенек», изображённых на чертеже 298. Таких ступенек будет n, а их расстояния до оси Ox будут равны

$$0,\ \sin\frac{\pi}{n},\ \sin\frac{2\pi}{n},\ \sin\frac{3\pi}{n},\ \ldots,\ \sin\frac{(n-2)\pi}{n},\ \sin\frac{(n-1)\pi}{2}.$$

Построим n прямоугольников, у которых нижними сторонами служат отрезки оси Ox:

$$\left[0, \frac{\pi}{n}\right], \left[\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}\right], \ldots, \left[\frac{(n-2)\pi}{n}, \frac{(n-1)\pi}{n}\right],$$

а верхними — указанные «ступеньки». Подсчитаем приближённо площадь S_n одной волны синусоиды, заменяя её суммой площадей указанных n прямоугольников:

площадь 1-го прямоугольника равна 0,

площадь 2-го прямоугольника равна $\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$,

площадь 3-го прямоугольника равна $\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}$,

. . . .

площадь $(n-1)$-го прямоугольника равна $\frac{\pi}{n}\sin\frac{(n-2)\pi}{n}$,

площадь n-го прямоугольника равна $\frac{\pi}{n}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$.

Таким образом, приблизительно, площадь одной волны синусоиды будет равна:

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-2)\pi}{n} + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n}\,\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}\text{ *)}.$$

---

*) Положим

$$\lambda = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-2)\pi}{n} + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Тогда

$$\lambda\cos\frac{\pi}{n} = \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-2)\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} +$$
$$+ \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} +\right.$$
$$\left. + \sin\frac{5\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{n\pi}{n} + \sin\frac{(n-2)\pi}{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{n} + 2\sin\frac{2\pi}{n} + 2\sin\frac{3\pi}{n} + \ldots + 2\sin\frac{(n-2)\pi}{n} + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right);$$

отсюда:

$$\lambda\cos\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\sin\frac{(n-1)\pi}{n} =$$
$$= \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \lambda$$

значит:

$$\lambda = \frac{\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}}{2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{n} + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right)}{2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{2\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{2n}} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}.$$

Точное значение площади одной волны синусоиды можно найти, взяв предел S_n при $n=+\infty$:

$$S=\lim_{n=+\infty} S_n = \lim_{n=+\infty}\left(\frac{\pi}{n}\,\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}\right)=\lim_{n=+\infty}\left[\frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right]=$$

$$=\lim_{n=+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}\cdot\lim_{n=+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\lim_{n=+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}=$$

$$=\lim_{n=+\infty}2\,\frac{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}=2\left(\lim_{n=+\infty}\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^2=2\cdot 1=2.$$

Итак, площадь одной волны синусоиды равна 2.

Читатель, наверное, подметил, что метод, применённый для решения этой задачи, таков же, как и метод решения предыдущей задачи.

Можно было бы привести множество самых разнообразных примеров из разных отделов физики и механики, где для решения вопроса пришлось бы действовать по только что указанной схеме. Процесс интегрирования состоит в составлении сумм, подобных тем, с которыми мы встретились в двух предыдущих примерах и в отыскании их предела в точке $n=+\infty$.

Упражнения

360. Вычислить объём прямого круглого конуса высотой h, в основании которого лежит круг радиуса r, считая известной формулу для объёма цилиндра. Для вычисления разбить конус плоскостями, параллельными основанию на n слоёв (усечённых конусов) и заменить каждый слой цилиндром высотой, равной высоте слоя, и с основанием, равным основанию слоя.

361. Вычислить силу, с которой вода, налитая в сосуд формы прямоугольного параллелепипеда, давит на его боковую грань, если размеры этой грани 2 метра в ширину и 3 метра в глубину. При вычислении разбить боковую грань горизонталями на n узких прямоугольников и считать, что давление на такой прямоугольник равно весу столба воды, опирающегося на этот прямоугольник, а высоту столба принять равной глубине погружения верхнего (или нижнего) края прямоугольника.

§ 149. Интегральная сумма. Определённый интеграл

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную на сегменте $[a, b]$. Разобьём сегмент $[a, b]$ на n частей точками:

$$a=x_0<x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

Выберем на каждом из сегментов (соответственно)

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ [x_2, x_3],\ \ldots,\ [x_{n-1}, x_n]$$

произвольные точки $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ и составим сумму:

$$\sigma_n=(x_1-x_0)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\ldots+(x_n-x_{n-1})f(\xi_n).$$

Эта сумма σ_n называется интегральной суммой, составленной для функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Она (сумма) зависит: от функции $f(x)$, от сегмента $[a, b]$, на котором мы рассматриваем эту функцию, от способа разбиения сегмента $[a, b]$, т. е. от выбора точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и, наконец, от выбора точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ на соответственных сегментах $[x_{i-1}, x]$.

Нетрудно видеть, что в двух предыдущих примерах (и двух упражнениях 360 и 361) мы как раз и имели дело с интегральной суммой, причём точки $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ брались на равных расстояниях друг от друга, а точки ξ_i выбирались в начале каждого сегмента $[x_{i-1}, x_i]$. Подчёркиваем, что вообще для интегральной суммы выбор точек деления x_i совершенно безразличен: они могут находиться и не на равных расстояниях друг от друга; также могут быть выбраны произвольно и точки ξ_i, лишь бы каждая точка ξ_i лежала на соответствующем сегменте $[x_{i-1}, x_i]$.

Введём следующее *определение: Число A называется определённым интегралом от a до b от функции $f(x)$, заданной на сегменте $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое положительное число δ, что абсолютная величина разности между любой интегральной суммой и числом A будет меньше ε:*

$$|\sigma_n - A| < \varepsilon,$$

если только длины всех сегментов

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

меньше δ. *При этом выбор точек x_i на сегменте $[a, b]$ и выбор точек ξ_i на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ совершенно произволен.*

Определённый интеграл от функции $f(x)$, взятый от a до b, обозначается так:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

§ 150. Основная теорема. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема. *Если на сегменте $[a, b]$ задана функция $f(x)$, если эта функция непрерывна во всех точках интервала (a, b) и если она непрерывна в точке a справа и в точке b слева, то определённый интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

существует и равен $\varphi(b)-\varphi(a)$, где $\varphi(x)$ первообразная функция для функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\varphi(b)-\varphi(a)$$

— формула Ньютона-Лейбница.

Доказательство*). Итак, пусть дано любое положительное число ε. Так как функция $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ непрерывна, то на основании теоремы Кантора функция $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ равномерно непрерывна и, значит, найдётся такое положительное число δ, что

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a},$$

если

$$|x'-x''|<\delta,$$

где x' и x'' — две любые точки сегмента $[a, b]$.

Разобьём сегмент $[a, b]$ точками

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

на n частей так, чтобы все разности

$$x_i-x_{i-1}$$

были бы меньше δ: $x_i-x_{i-1}<\delta$, а затем составим интегральную сумму

$$\sigma_n=(x_1-x_0)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\ldots+(x_n-x_{n-1})f(\xi_n),$$

где

$$\xi_i\in[x_{i-1}, x_i].$$

С другой стороны, преобразуем разность $\varphi(b)-\varphi(a)$ следующим образом:

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi(x_n)-\varphi(x_0)=$$
$$=\varphi(x_1)-\varphi(x_0)+\varphi(x_2)-\varphi(x_1)+\ldots+\varphi(x_n)-\varphi(x_{n-1}).$$

Применяя теорему Лагранжа, будем иметь:

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(x_1-x_0)\varphi'(\zeta_1)+(x_2-x_1)\varphi'(\zeta_2)+\ldots+$$
$$+(x_n-x_{n-1})\varphi'(\zeta_n),$$

где

$$\zeta_i\in(x_{i-1}, x_i)$$

*) Доказательство этой теоремы мы проведём на основании теоремы § 146. Отметим, что теорема может быть доказана и без ссылок на теорему § 146; в этом случае обычно теорему § 146 доказывают на основании теоремы этого параграфа. С другой стороны, теорема § 146 может быть доказана совершенно самостоятельно вне всякой связи с доказательством и содержанием теоремы этого параграфа.

или, так как $\varphi'(x)=f(x)$ при всех $x\in[a, b]$, то

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(x_1-x_0)f(\zeta_1)+(x_2-x_1)f(\zeta_2)+\ldots+(x_n-x_{n-1})f(\zeta_n);$$

теперь находим:

$$\begin{aligned}|\sigma_n-[\varphi(b)-\varphi(a)]|&=\\ &=|(x_1-x_0)[f(\xi_1)-f(\zeta_1)]+(x_2-x_1)[f(\xi_2)-f(\zeta_2)]+\ldots\\ &\qquad\ldots+(x_n-x_{n-1})[f(\xi_n)-f(\zeta_n)]|\leqslant\\ &\leqslant(x_1-x_0)|f(\xi_1)-f(\zeta_1)|+(x_2-x_1)|f(\xi_2)-f(\zeta_2)|+\ldots\\ &\qquad\ldots+(x_n-x_{n-1})|f(\xi_n)-f(\zeta_n)|.\end{aligned}$$

Так как

$$x_i-x_{i-1}<\delta,$$

$$\xi_i\in[x_{i-1}, x_i] \quad \text{и} \quad \zeta_i\in[x_{i-1}, x_i],$$

то

$$|\xi_i-\zeta_i|<\delta,$$

а значит

$$|f(\xi_i)-f(\zeta_i)|<\frac{\varepsilon}{b-a},$$

следовательно,

$$|\sigma_n-[\varphi(b)-\varphi(a)]|<(x_1-x_0)\frac{\varepsilon}{b-a}+(x_2-x_1)\frac{\varepsilon}{b-a}+\ldots$$
$$\ldots+(x_n-x_{n-1})\frac{\varepsilon}{b-a}=\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ ограниченную производную

$$|f'(x)|<M, \text{ где } M>0$$

при всех x из сегмента $[a, b]$, то

$$f(x')-f(x'')=(x'-x'')f'(\xi),$$

откуда

$$|f(x')-f(x'')|<|x'-x''|M$$

и, значит, функция $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ равномерно непрерывна, а именно, если $\varepsilon>0$ — любое число, то при $|x'-x''|<\frac{\varepsilon}{M}$ будем иметь: $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, где x' и $x''\in[a, b]$.

Все функции, с которыми нам придётся в дальнейшем иметь дело, будут удовлетворять условиям доказанной теоремы, поэтому во всех дальнейших приложениях мы сможем применять формулу Ньютона-Лейбница.

Разность $\varphi(b)-\varphi(a)$ часто обозначают так:

$$[\varphi(x)]_a^b \text{ или } \varphi(x)|_a^b$$

(читается так: «фи от икс в подстановке от a до b»), так что формулу Ньютона-Лейбница можно записать и так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\varphi(x)]_a^b.$$

Возвращаясь к примерам, рассмотренным в § 149, мы можем теперь дать для них следующие простые решения:

Пример 1. $S = \int_2^5 7t\,dt = \left[\frac{7t^2}{2}\right]_2^5 = 73{,}5$ метра.

Пример 2. $S = \int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2.$

Во всех случаях, когда нам придётся встречаться с интегральной суммой, составленной для функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям только что доказанной теоремы, и с пределом этой интегральной суммы, т. е. с определённым интегралом — можно пользоваться формулой Ньютона-Лейбница (если, конечно, для данной функции легко находится примитивная). Если же примитивную функцию найти трудно или практически невозможно, то можно вычислить определённый интеграл приближённо, заменяя его интегральной суммой, причём, если подинтегральная функция $f(x)$ имеет ограниченную производную $|f'(x)| < M$ при всех $x \in [a, b]$, то, разделив отрезок интегрирования на части, меньшие чем

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M(b-a)},$$

мы можем быть уверенными, что погрешность будет меньше, чем ε. А так как число $\varepsilon > 0$ может быть задано произвольно, то определённый интеграл можно вычислить с любой степенью точности.

Условимся считать, что

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0;$$

при этом условии формула Ньютона-Лейбница будет верна, так как при $a = b$ мы будем также иметь

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(a) - \varphi(a) = 0.$$

В предыдущем построении интегральной суммы и определённого интеграла мы могли бы считать $a > b$; наши рассуждения по существу ни в чём не изменились бы и мы снова пришли бы к той же формуле Ньютона-Лейбница. Теперь легко доказать следующее свойство определённого интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

В самом деле: если $\varphi(x)$ есть какая-нибудь примитивная функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a),$$

а

$$\int_b^a f(x)\,dx = \varphi(a) - \varphi(b).$$

Упражнения

362. Вычислить следующие определённые интегралы:

$$1)\ \int_2^3 x^3\,dx, \qquad 2)\ \int_0^{3\pi} \sin x\,dx, \quad 3)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \operatorname{tg} x\,dx,$$

$$4)\ \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad 5)\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}, \qquad 6)\ \int_1^5 \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

§ 151. Некоторые свойства определённого интеграла

Теорема 1. *Если сегмент* $[a, b]$ *интегрирования разбить на две части точкой* c, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ — примитивная функция для функции $f(x)$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a),$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \varphi(c) - \varphi(a),$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(c).$$

Складывая почленно два последних равенства и учитывая первое равенство, получили требуемое. Доказанная теорема верна и в том случае, если точек подразбиения несколько. Доказательство аналогично.

Теорема 2 (теорема о среднем). *Интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *от функции* $f(x)$, *непрерывной на сегменте* $[a, b]$, *равен произведению длины* $b-a$ *сегмента интегрирования на значение* $f(\xi)$ *подынтегральной функции* $f(x)$ *для некоторого значения* $x=\xi$ *из интервала* (a, b):

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi),$$

где ξ лежит между a и b.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ — примитивная функция для функции $f(x)$, т. е. $\varphi'(x)=f(x)$; тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b)-\varphi(a) = (b-a)\varphi'(\xi) = (b-a)f(\xi).$$

Следствие. Если функция $f(x)$ ограничена числом M на интервале (a, b), т. е. $|f(x)|<M$ при всех x из интервала (a, b), то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| < M(b-a).$$

В самом деле: по теореме о среднем найдём

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = |f(\xi)|\,|b-a| < M|b-a|, \text{ так как } |f(\xi)|<M.$$

Теорема 3. *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждой функции, т. е.*

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_1(x)$ — примитивная функция для $f_1(x)$, а $\varphi_2(x)$ — примитивная функция для $f_2(x)$, т. е.

$$\varphi_1'(x)=f_1(x), \quad \varphi_2'(x)=f_2(x).$$

Тогда $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ — примитивная функция для $f_1(x)+f_2(x)$, так как

$$[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]' = \varphi_1'(x)+\varphi_2'(x) = f_1(x)+f_2(x).$$

Применяя теперь для интегралов, стоящих в левой и правой части равенства, подлежащего доказательству, формулу Ньютона-Лейбница, будем иметь:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\, dx = \varphi_1(b) + \varphi_2(b) - \varphi_1(a) - \varphi_2(a);$$

$$\int_a^b f_1(x)\, dx = \varphi_1(b) - \varphi_1(a), \quad \int_a^b f_2(x)\, dx = \varphi_2(b) - \varphi_2(a);$$

отсюда и следует требуемое соотношение.

Теорема 4. *Числовой множитель можно выносить за знак определённого интеграла, т. е.*

$$\int_a^b cf(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ — примитивная функция для функции $f(x)$, т. е. $\varphi'(x) = f(x)$. Тогда $c\varphi(x)$ — примитивная для функции $cf(x)$, ибо $[c\varphi(x)]' = c\varphi'(x) = cf(x)$. Значит, на основании формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b cf(x)\, dx = c\varphi(b) - c\varphi(a) = c(\varphi(b) - \varphi(a)) = c\int_a^b f(x)\, dx,$$

ч. т. д.

Теорема 5 (о подстановке в определённом интеграле). *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, а функция $\omega(t)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$ имеет непрерывную производную, если*

$$\omega(\alpha) = a, \quad \omega(\beta) = b$$

и при

$$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

имеют место неравенства

$$a \leqslant f(\omega(t)) \leqslant b,$$

то

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(\omega(t))\, \omega'(t)\, dt.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ — примитивная функция для функции $f(x)$, т. е. $\varphi'(x) = f(x)$.

По формуле Ньютона-Лейбница находим:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Докажем, что $\varphi[\omega(t)]$ — примитивная для функции $f[\omega(t)]\,\omega(t)$. В самом деле: на основании теоремы о производной сложной функции будем иметь:

$$[\varphi(\omega(t))]' = \varphi'[\omega(t)]\,\omega'(t) = f[\omega(t)]\,\omega'(t).$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница к интегралу

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\omega(t)]\,\omega'(t)\,dt,$$

получим:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\omega(t)]\,\omega'(t)\,dt = \varphi[\omega(\beta)] - \varphi[\omega(\alpha)] = \varphi(b) - \varphi(a),$$

так как

$$\omega(\beta) = b, \quad \omega(\alpha) = a.$$

Таким образом

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\omega(t)]\,\omega'(t)\,dt,$$

ч. т. д.

Пример 1.

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

Положим $x = \sin t$; найдём значение t, при которых $\sin t = a = 0$ и $\sin t = b = 1$. За такие значения t можно взять $t = \alpha = 0$ и $t = \beta = \frac{\pi}{2}$. Теперь имеем:

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

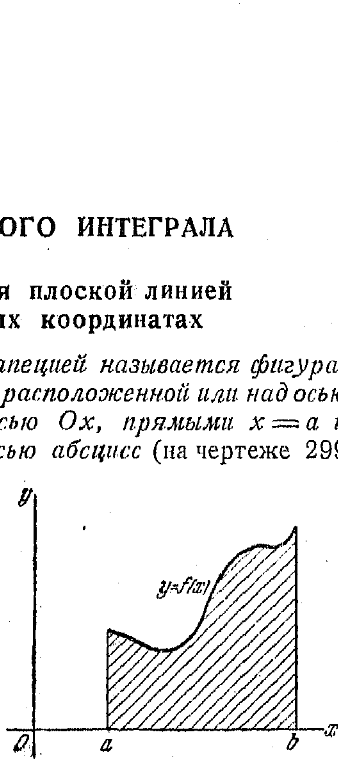
При подстановке в определённом интеграле новый нижний предел α определяется из уравнения $a = \omega(t)$, а новый верхний предел β определяется из уравнения $b = \omega(t)$. Эти уравнения могут иметь несколько корней и за α можно принять любой корень уравнения $a = \omega(t)$, а за β можно принять любой корень уравнения $b = \omega(t)$, лишь бы значения функции $\omega(t)$ не выходили из сегмента, в котором функция $f(x)$ определена и непрерывна.

ГЛАВА XIX

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 152. Площадь, ограниченная плоской линией в декартовых прямоугольных координатах

Определение. *Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная линией* $y=f(x)$ *), *целиком расположенной или над осью* Ox *или целиком расположенной под осью* Ox, *прямыми* $x=a$ *и* $x=b$, *параллельными оси ординат и осью абсцисс* (на чертеже 299 криволинейная трапеция заштрихована; линия $y=f(x)$ на этом чертеже расположена целиком над осью Ox).



Черт. 299.

Пусть $x=a$ и $x=b$, где $a<b$ — уравнение прямых, ограничивающих данную криволинейную трапецию слева и справа.

Возьмём интегральную сумму:

$$\sigma_n=(x_1-x_0)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\\+\ldots+(x_n-x_{n-1})f(\xi_n),$$

где, как всегда, мы считаем, $x_0=a$ и $x_n=b$. Посмотрим, каков геометрический смысл этой суммы в том случае, если на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)\geqslant 0$. Первое слагаемое интегральной суммы, т. е. $f(\xi_1)(x_1-x_0)$ есть, очевидно, площадь прямоугольника с основанием x_1-x_0 и высотой $f(\xi_1)$; второе слагаемое интегральной суммы, т. е. $f(\xi_2)(x_2-x_1)$ есть площадь прямоугольника с основанием x_2-x_1 и высотой $f(\xi_2)$ и т. д. и, наконец, последнее слагаемое интегральной суммы, т. е. $f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$ есть также площадь прямоугольника с основанием x_n-x_{n-1} и высотой $f(\xi_n)$. Значит, интегральная сумма, составленная для функции $f(x)$, заданной на сегменте $[a, b]$, есть площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников с высотами $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$ и с основаниями соответственно x_1-x_0, $x_2-x_1, \ldots, x_n-x_{n-1}$ (черт. 300).

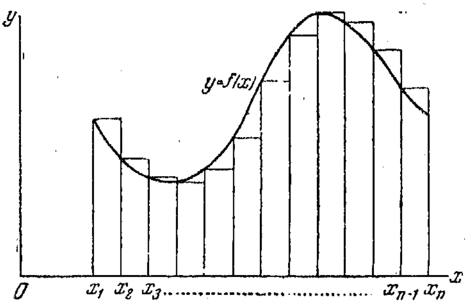
*) Функция $f(x)$ предполагается непрерывной на отрезке $[a, b]$.

Предел интегральной суммы даёт нам площадь указанной криволинейной трапеции. Но предел интегральной суммы при условии, что максимальная из разностей $x_i - x_{i-1}$ стремится к нулю, есть определённый интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до b.

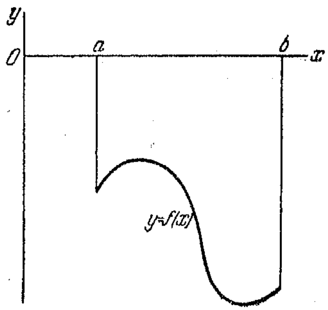
Значит, *площадь криволинейной трапеции, ограниченная линией* $y = f(x)$, *прямыми* $x = a$ *и* $x = b$ *(где* $a < b$*) и осью абсцисс, равна определённому интегралу от функции* $f(x)$, *взятому в пределах от* a до b. Обозначая эту площадь буквой S, будем иметь:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Совершенно теми же рассуждениями мы получим, что если на сегменте $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \leqslant 0$, то определён-



Черт. 300.



Черт. 301.

ный интеграл от этой функции в пределах от a до b, где $a < b$, отрицателен, а по абсолютной величине опять равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox (черт. 301).

Если измерять площадь криволинейной трапеции в том случае, когда линия $y = f(x)$ расположена под осью Ox отрицательным числом, то и в этом случае (т. е. когда на сегменте $[a, b]$ $f(x) \leqslant 0$) площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox, равна определённому интегралу в пределах от a до b от функции $f(x)$, т. е. и в этом случае формула (1) будет верна.

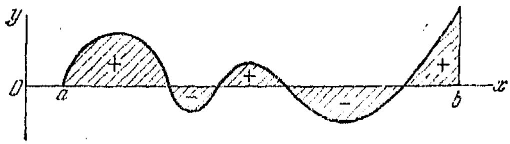
Если, наконец, функция $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ несколько раз меняет знак (обращаясь в нуль, скажем, при $x = p$, $x = q$, $x = r$ — см. черт. 302), то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^r f(x)\,dx + \int_r^b f(x)\,dx,$$

а потому интеграл от a до b от функции $f(x)$ равен алгебраической сумме площадей криволинейных трапеций, ограниченных нашей линией $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox; в этой сумме положительными будут площади криволинейных трапеций, ограниченные участками линии $y=f(x)$, расположенными над осью Ox, и отрицательными — площади криволинейных трапеций, ограниченные участками линии $y=f(x)$, расположенными под осью Ox (черт. 302).

Итак, геометрический смысл определённого интеграла от функции $f(x)$ в пределах от a до b $(a<b)$ заключается в следующем: *определённый интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до b $(a<b)$ равен алгебраической сумме s площадей криволинейных трапеций, ограниченных линией $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox, причём площади криволинейных трапеций, ограниченные участками линии $y=f(x)$, расположенными целиком над осью Ox, считаются положительными, а площади криволинейных трапеций, ограниченные участками линии $y=f(x)$, расположенными целиком под осью Ox, считаются отрицательными*:

$$s=\int_a^b f(x)\,dx.$$



Черт. 302.

После всего изложенного нетрудно придать теореме о среднем геометрическое истолкование; предполагая для простоты, что $f(x)>0$ на сегменте $[a, b]$, будем иметь: $\int_a^b f(x)\,dx$ — равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линией $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox, а произведение $(b-a)f(\xi)$ можно истолковать как площадь прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(\xi)$ (черт. 303). Теорема о среднем утверждает, что указанные площади равны, иначе: *среди всех ординат линии $y=f(x)$ найдётся такая $f(\xi)$, что указанная криволинейная трапеция будет равновелика прямоугольнику с тем же основанием и этой «средней» высотой*:

площадь криволинейной трапеции $ABCD$ = площади прямоугольника $AEFD$ (черт. 303)

Пример 1. Найти площадь одной волны синусоиды.

Решение. Находим (черт. 304)

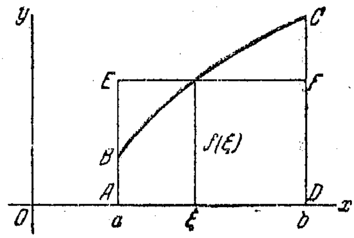
$$s=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos 0)=-(-1)-(-1)=2.$$

Пример 2. Возьмём предыдущий интеграл в пределах от 0 до 2π:

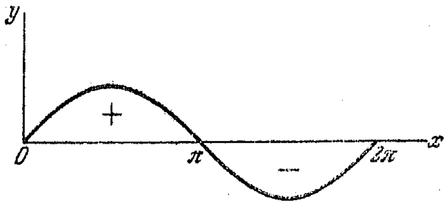
$$s=\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}=-\cos 2\pi-(-\cos 0)=-1-(-1)=-1+1=0.$$

Результат получился равным нулю, так как синусоида на сегменте $[0, \pi]$ расположена над осью Ox и соответствующая криволинейная трапеция (первая волна синусоиды) имеет положительную площадь, а дуга синусоиды на сегменте $[\pi, 2\pi]$ расположена под осью Ox и соответствующая криволинейная трапеция (вторая волна синусоиды) имеет отрицательную площадь, равную по абсолютной величине площади первой криволинейной трапеции. В сумме эти две площади дают нуль (черт. 304).

Замечание. В тех случаях, когда надо найти не алгебраическую сумму площадей криволинейных трапеций, ограниченных линией $y=f(x)$,



Черт. 303.



Черт. 304.

прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox, а сумму их абсолютных величин, то надо разбить сегмент $[a, b]$ интегрирования на части, если это возможно, в каждой из которых функция $f(x)$ сохраняет знак, и взять сумму абсолютных величин определённых интегралов по сегментам подразбиения. Например, если надо вычислить сумму абсолютных величин площадей двух волн синусоиды, то вычисление надо провести так:

$$\left|\int_0^{\pi}\sin x\,dx\right|+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx\right|=\left|\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}\right|+\left|\Big[-\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}\right|=$$
$$=|-\cos\pi-(-\cos 0)|+|-\cos 2\pi-(-\cos\pi)|=$$
$$=|-(-1)-(-1)|+|-1-1|=2+2=4,$$

что, конечно, и следовало ожидать (ведь площадь одной волны синусоиды равна 2).

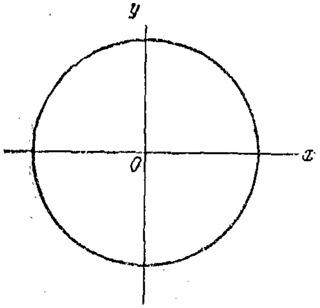
Пример 3. Вычислить интегрированием площадь круга радиуса r.

Решение. Поместим начало координат в центре круга; тогда уравнение окружности будет $x^2+y^2=r^2$, откуда уравнение верхней дуги окружности будет $y=\sqrt{r^2-x^2}$ (уравнение нижней части окружности будет $y=-\sqrt{r^2-x^2}$). Интегрируя функцию $y=\sqrt{r^2-x^2}$ в пределах от $-r$ до r, мы найдём половину площади круга (черт. 305):

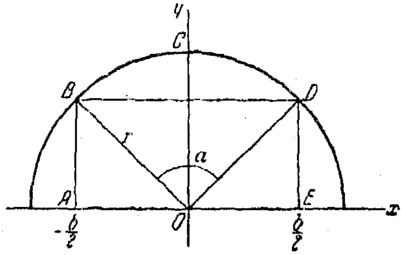
$$\frac{s}{2}=\int_{-r}^{+r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}\right]_{-r}^{+r}=$$
$$=\frac{r^2}{2}\arcsin 1-\frac{r^2}{2}\arcsin(-1)=r^2\arcsin 1=\frac{\pi r^2}{2},\quad s=\pi r^2.$$

Пример 4. Вычислить интегрированием площадь сегмента круга (радиуса r); высота сегмента равна h; основание сегмента равно b.

Решение. Вычислим сначала площадь криволинейной трапеции $ABCDE$ (черт. 306). Располагая оси координат так же, как и в предыдущем примере



Черт. 305.



Черт. 306.

и обозначая через p площадь указанной криволинейной трапеции, будем иметь:

$$p=\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\sqrt{r^2-x^2}\,dx;$$

так как

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r},$$

то

$$p=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}\right]_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{b}{2}\sqrt{r^2-\frac{b^2}{4}}+\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{b}{2r}-\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{b}{2}\right)\sqrt{r^2-\frac{b^2}{4}}+\frac{r^2}{2}\arcsin\left(-\frac{b}{2r}\right)\right]=$$

$$=\frac{b}{2}\sqrt{r^2-\frac{b^2}{4}}+r^2\arcsin\frac{b}{2r}.$$

Очевидно, что $\sqrt{r^2-\frac{b^2}{4}}=r-h$ и $\arcsin\frac{b}{2r}=\frac{\alpha}{2}$, где α — центральный угол окружности (из которой вырезан сегмент), опирающийся на основание сегмента. Значит,

$$p=\frac{b}{2}(r-h)+\frac{\alpha r^2}{2}.$$

Для получения площади сегмента отсюда надо отнять площадь прямоугольника $ABDE$, т. е. $b(r-h)$. Итак,

$$s=\frac{b}{2}(r-h)+\frac{\alpha r^2}{2}-b(r-h)$$

или

$$s=\frac{\alpha r^2}{2}-\frac{b}{2}(r-h).$$

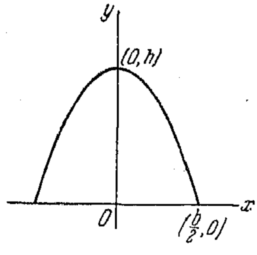
Замечая, что $\frac{b}{2r}=\sin\frac{\alpha}{2}$, $\frac{r-h}{r}=\cos\frac{\alpha}{2}$, найдём: $b=2r\sin\frac{\alpha}{2}$, $r-h=r\cos\frac{\alpha}{2}$ и значит:

$$s=\frac{\alpha r^2}{2}-\frac{r^2}{2}2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

или

$$s=\frac{r^2}{2}(\alpha-\sin\alpha)$$

— формула, которую легко получить и чисто геометрическим путём (проверьте).



Черт. 307.

Пример 5. Определить площадь сегмента параболы высотой h, хорда которого равна b и перпендикулярна оси симметрии параболы (черт. 307).

Решение. Примем середину хорды сегмента параболы за начало координат; ось Ox направим по хорде сегмента. Пусть уравнение параболы будет $y=\alpha x^2+\beta$. Так как парабола проходит через точку $(0, h)$ (её вершина), то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению параболы, откуда $h=\beta$. Так как парабола проходит через точку $\left(\frac{b}{2}, 0\right)$, то координаты этой точки также должны удовлетворять уравнению параболы, т. е. $0=\alpha\frac{b^2}{4}+h$, откуда $\alpha=-\frac{4h}{b^2}$, и уравнение параболы запишется так:

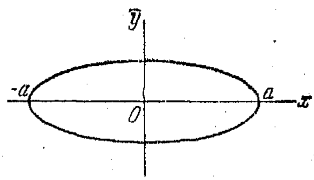
$$y=-\frac{4h}{b^2}x^2+h.$$

Отсюда площадь сегмента параболы:

$$s=\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(-\frac{4h}{b^2}x^2+h\right)dx=\left[-\frac{4hx^3}{3b^2}+hx\right]_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}=$$

$$=-\frac{4hb^3}{3b^2\cdot 8}+\frac{hb}{2}-\frac{4hb^3}{3b^2\cdot 8}+\frac{hb}{2}=hb-\frac{hb}{3}=\frac{2}{3}hb.$$

Таким образом, площадь параболического сегмента, отсечённого от параболы хордой, перпендикулярной её оси, равна $\frac{2}{3}$ произведения высоты сегмента на его основание.



Черт. 308.

Замечание. В учебнике А. Киселёва, Геометрия, ч. I (Планиметрия) (в конце) приводится такая же формула (приближённая) для площади сегмента круга. Теперь для читателя должна быть ясна геометрическая сущность этой приближённой формулы для сегмента круга; мы заменяем дугу окружности дугой параболы. Ясно (и на это указано в учебнике Киселёва), что эта формула для площади сегмента круга будет давать тем более точный результат, чем меньше дуга окружности, ограничивающей сегмент; геометрически это также ясно: чем меньше дуга окружности, ограничивающей сегмент, тем с большей точностью её можно заменить дугой параболы.

Пример 6. Вычислить интегрированием площадь эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(черт. 308).

Решение. Разрешая уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипса относительно y, получим $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Взяв справа знак $+$, получим уравнение дуги эллипса, расположенной над осью Ox:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Площадь половины эллипса мы получим, взяв от этой функции интеграл в пределах от $-a$ до $+a$:

$$\frac{s}{2}=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{b}{a}\,dx=\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Последний интеграл вычисляется точно так же, как вычисляется интеграл в примере 4, и он будет равен $\frac{\pi a^2}{2}$. Значит $\frac{1}{2}S=\frac{b}{2}\cdot\frac{\pi a^2}{2}$, откуда $s=\pi ab$.

Если $a=b$, т. е. эллипс является окружностью, то $s=\pi a^2$, и мы получим формулу для площади круга. Таким образом площадь эллипса равна произведению числа π на произведение полуосей эллипса.

Упражнения

363. Вычислить площадь, ограниченную двумя параболами: $y=x^2$ и $x=y^2$. Сделать чертёж.

364. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y=2x-x^2$ и осью абсцисс. Сделать чертёж.

365. Вычислить площадь, ограниченную гиперболой $xy=1$, прямыми $x=1$, $x=n$ и осью Ox. Сделать чертёж.

366. Линия, определяемая уравнением $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, называется цепной линией. Построить эту линию и вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией, осью ординат и произвольной прямой, параллельной оси ординат.

367. Вычислить площадь, ограниченную линиями:

$$y=\frac{1}{12}x^2,\qquad y=\frac{1}{144}x^3.$$

Сделать чертёж.

368. Вычислить площадь, ограниченную астроидой:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad(a>0).$$

Сделать чертёж.

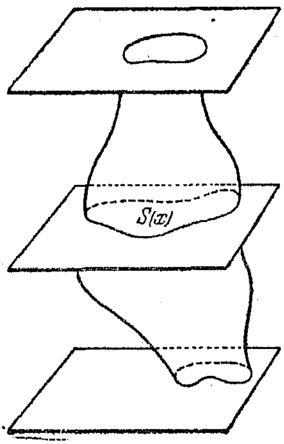
369. Вычислить площадь сегмента параболы $y^2 = 2px$, отсекаемого от параболы фокальной хордой, т. е. хордой, перпендикулярной оси параболы и проходящей через её фокус. Сделать чертёж.

370. Вычислить площадь, заключённую между двумя линиями: $y = x$ и $y = x^2$. Сделать чертёж.

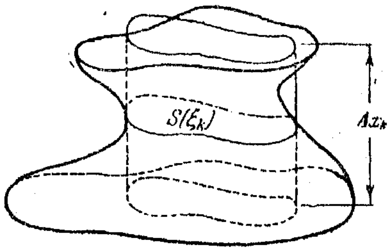
§ 153. Объём тела с заданными поперечными сечениями

Рассмотрим произвольное тело (черт. 309). Заключим его между двумя параллельными плоскостями (так, чтобы эти две параллельные плоскости «зажимали» рассматриваемое тело с двух сторон). Расстояние между этими плоскостями обозначим через h и будем называть «высотой» тела. Обозначим через x расстояние от одной из них до любого сечения тела плоскостью, параллельной указанным выше, а через $s(x)$ площадь сечения тела этой плоскостью.

Разобьём наше тело на n слоёв плоскостями, параллельными данным.



Черт. 309.



Черт. 310.

Заменяя объём каждого слоя цилиндром высотой $x_i - x_{i-1}$ и считая площадь основания цилиндра равной $s(\xi_i)$, где ξ_i — любое число, заключённое между x_{i-1} и x_i, мы получим приближённое значение объёма нашего тела в виде суммы *):

$$s(\xi_1)(x_1 - x_0) + s(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + s(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Итак, каждый слой тела мы заменяем цилиндром, площади сечений которого плоскостями, перпендикулярными образующим, мы считаем равными площади $s(\xi_k)$ одного из сечений этого слоя. На чертеже 310 изображён один из таких слоёв и тот цилиндр, которым мы его заменяем.

Вернёмся к приближённому выражению для объёма тела; оно представляет собою интегральную сумму, построенную для функции

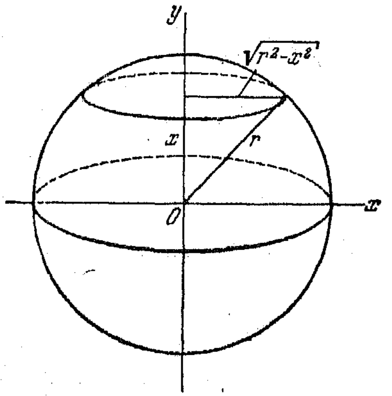
*) Мы считаем известным, что объём любого цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

$s(x)$ на сегменте $[0, h]$ $(x_0 = 0,\ x_n = h)$. Предел этой интегральной суммы и даёт нам объём v тела. Но предел этой интегральной суммы есть определённый интеграл от функции $s(x)$ в пределах от 0 до h и значит:

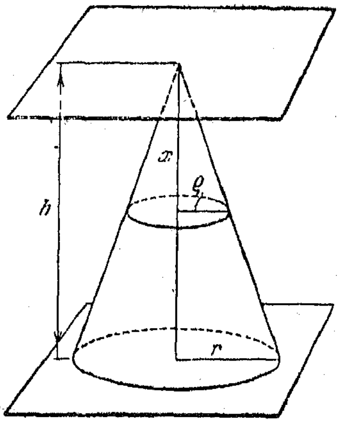
$$v = \int_0^h s(x)\,dx.$$

Пример 1. Вычислить интегрированием объём шара.

Решение. Вычислим объём полушара (черт. 311). Сечение полушара



Черт. 311.



Черт. 312.

плоскостью, проходящей на расстоянии x от его «основания», есть окружность радиуса $\sqrt{r^2 - x^2}$, а площадь $s(x)$ этого сечения равна $\pi\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 = \pi(r^2 - x^2) = s(x)$. Таким образом:

$$\frac{v}{2} = \int_0^r \pi(r^2 - x^2)\,dx = \left[\pi r^2 x - \pi\frac{x^3}{3}\right]_0^r = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} = \frac{2}{3}\pi r^3,$$

откуда $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ — формула, известная из школьного курса геометрии.

Пример 2. Вычислить интегрированием объём конуса.

Решение. Проведём через вершину конуса плоскость, параллельную основанию конуса (эта плоскость вместе с плоскостью основания конуса и будут теми двумя плоскостями, которые в приведённых выше рассуждениях над телом произвольной формы «зажимали» его с двух сторон). Проведём ещё произвольную плоскость, параллельную двум указанным на расстоянии x от вершины конуса (черт. 312). Эта плоскость рассечёт конус по кругу, радиус ρ которого определится из пропорции: $\frac{\rho}{x} = \frac{r}{h}$, откуда

$$\rho = \frac{rx}{h}.$$

Площадь сечения будет равна:

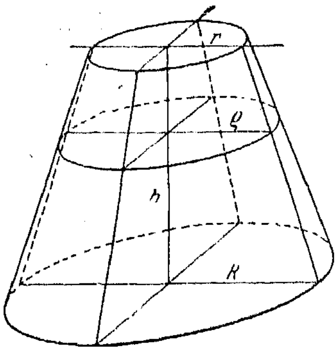
$$s(x) = \pi\rho^2 = \pi \frac{r^2}{h^2} x^2,$$

откуда

$$v = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} x^2\, dx = \left[\pi \frac{r^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

— формула, известная из школьного курса геометрии.

Пример 3. Вычислить интегрированием объём усечённого конуса.



Черт. 313.

Решение. Плоскостями, «зажимающими» конус, будут плоскости его верхнего и нижнего оснований (черт. 313). Обозначим через R радиус нижнего основания конуса, через r — радиус верхнего основания конуса, а через h — его высоту. Проведём плоскость на расстоянии x от верхнего основания. Эта плоскость рассечёт наш конус по окружности, радиус ρ которой легко определяется из пропорции:

$$\frac{\rho - r}{x} = \frac{R - r}{h},$$

откуда

$$\rho = r + \frac{R - r}{h} x.$$

Площадь $S(x)$ сечения конуса будет:

$$S(x) = \pi\rho^2 = \pi \left(r + \frac{R - r}{h} x \right)^2,$$

а его объём:

$$v = \int_0^h \pi \left[r^2 + 2r \frac{R - r}{h} x + \frac{(R - r)^2}{h^2} x^2 \right] dx =$$

$$= \pi \left[r^2 x + r \frac{R - r}{h} x^2 + \frac{(R - r)^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi \left[r^2 h + r \frac{R - r}{h} h^2 + \frac{(R - r)^2}{h^2} \frac{h^3}{3} \right] =$$

$$= \frac{\pi h}{3} \left[3r^2 + 3r(R - r) + (R - r)^2 \right] = \frac{\pi h}{3} (r^2 + Rr + R^2)$$

— формула, известная из школьного курса геометрии.

Пример 4. Определить интегрированием объём шарового сегмента.

Решение. Пусть h — высота сегмента, а r — радиус шара, от которого отсечён этот сегмент. Обозначим через x расстояние плоскости, параллельной основанию сегмента от вершины сегмента (черт. 314). Эта плоскость рассечёт сегмент по кругу, радиус ρ которого определится из пропорции $\frac{x}{\rho} = \frac{\rho}{2r - x}$, откуда $\rho^2 = x(2r - x)$. Площадь $S(x)$ указанного сечения равна:

$$S(x) = \pi\rho^2 = \pi x (2r - x),$$

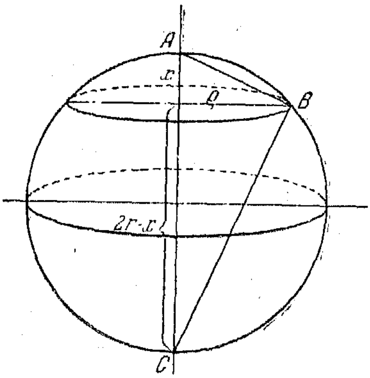
а объём v сегмента:

$$v = \int_0^h \pi x(2r-x)\,dx = \pi \int_0^h (2rx - x^2)\,dx =$$

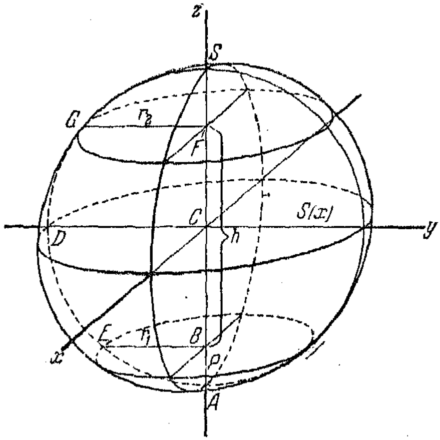
$$= \pi \left[rx^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi \left(rh^2 - \frac{h^3}{3} \right) = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right).$$

Пример 5. Определить интегрированием объём шарового слоя.

Решение. Пусть h — высота слоя, а r_1 и r_2 — радиусы верхнего и нижнего основания слоя. Проведём плоскость, касательную к шару, параллельную основаниям шарового слоя, и обозначим через p расстояние между



Черт. 314.



Черт. 315.

этой плоскостью и ближайшим к ней основанием (черт. 315). Объём шарового слоя равен разности между объёмами двух шаровых сегментов, высоты которых p и $p+h$. Объём каждого из этих сегментов:

$$v_1 = \int_0^p s(x)\,dx, \quad v_2 = \int_0^{p+h} s(x)\,dx,$$

где через x мы обозначили расстояние от точки A до произвольной плоскости, параллельной основаниям рассматриваемого шарового слоя, а через $S(x)$ — площадь сечения шарового слоя указанной плоскостью. Объём шарового слоя равен $v_2 - v_1$, т. е.

$$v = v_2 - v_1 = \int_0^{p+h} s(x)\,dx - \int_0^p s(x)\,dx = \int_p^{p+h} s(x)\,dx.$$

Как и в случае шарового сегмента: $S(x) = \pi(2rx - x^2)$, где r — радиус шара. Итак:

$$v = \pi \int_p^{p+h} (2rx - x^2)\,dx = \pi \left[rx^2 - \frac{x^3}{3} \right]_p^{p+h} = \pi \left[r(p+h)^2 - \frac{(p+h)^3}{3} - rp^2 + \frac{p^3}{3} \right] =$$

$$= \pi \left[h(2rp - p^2) + h^2(r-p) - \frac{h^3}{3} \right].$$

Но $2rp - p^2 = p(2r - p) = r_1^2$ (см. чертёж 315), поэтому:

$$v = \left[hr_1^2 + h^2(r-p) - \frac{h^3}{3}\right]\pi.$$

Точно так же, полагая $SF = q$, можно написать:

$$v = \left[hr_2^2 + h^2(r-q) - \frac{h^3}{3}\right]\pi.$$

Складывая два последних равенства, получим:

$$2v = \left[h\,(r_1^2 + r_2^2) + h^2(2r - p - q) - \frac{2h^3}{3}\right]\pi.$$

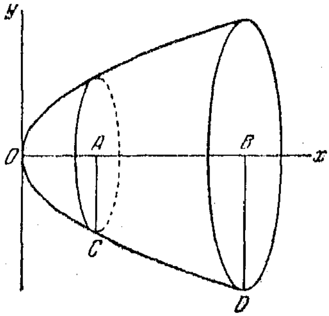
Но $2r - p - q = h$, поэтому

$$2v = \pi\left[hr_1^2 + hr_2^2 + h^3 - \frac{2h^3}{3}\right] = \pi\left(hr_1^2 + hr_2^2 + \frac{h^3}{3}\right)$$

и окончательно:

$$v = \frac{\pi h}{2}\left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{h^2}{6}\right)$$

— формула, известная из школьного курса геометрии.



Черт. 316.

Пример 6. Определить интегрированием объём сегмента параболоида вращения.

Решение. Пусть h — высота сегмента параболоида вращения, а r — радиус основания этого сегмента. Обозначим через x расстояние плоскости, параллельной основанию сегмента от вершины параболы вращения, а через ρ — радиус окружности, получающейся в сечении параболоида вращения, указанной плоскостью (черт. 316). Тогда $\rho^2 = 2px$, а площадь $s(x)$ указанного сечения равна: $s(x) = \pi\rho^2 = 2\pi px$. Объём v сегмента параболоида вращения:

$$v = \int_0^h 2\pi px\,dx = \pi p\,[x^2]_0^h = \pi ph^2.$$

Площадь S основания сегмента параболоида вращения равна πr^2 и так как $r^2 = 2ph$, то $S = 2\pi ph$. Отсюда $\pi ph = \frac{S}{2}$ и формулу для объёма сегмента параболоида вращения можно записать так:

$$v = \frac{Sh}{2},$$

т. е. объём сегмента параболоида вращения равен половине произведения площади основания сегмента на его высоту.

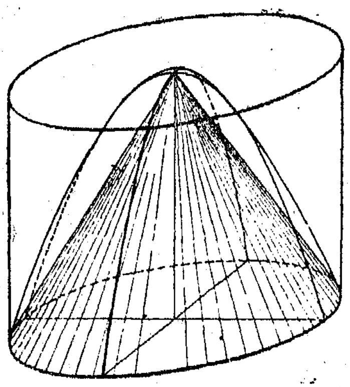
Замечание I. Вернёмся к формуле для объёма шарового сегмента и преобразуем её так:

$$v = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right) = \pi h^2\left(r - \frac{h}{2} + \frac{h}{6}\right) = \pi h^2\left(r - \frac{h}{2}\right) + \frac{\pi h^3}{6} =$$
$$= \frac{\pi h^2(2r-h)}{2} + \frac{\pi h^3}{6} = \frac{\pi h}{2}h(2r-h) + \frac{\pi h^3}{6} = \frac{\pi h\rho^2}{2} + \frac{\pi h^3}{6} = \frac{Sh}{2} + \frac{\pi h^3}{6},$$

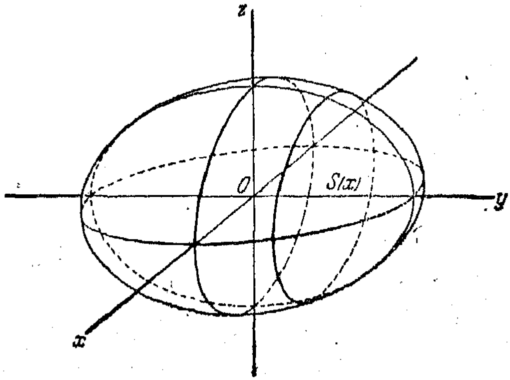
где s — площадь основания сегмента. Из этой формулы для объёма шарового сегмента видно, что если h — мало, то можно приближённо положить и для шарового сегмента $v = \frac{1}{2} sh$, т. е. можно приближённо считать, что объём шарового сегмента равен половине произведения площади его основания на высоту; ошибка, которую мы при этом допускаем, равна $\frac{1}{6}\pi h^3$ и она тем меньше, чем меньше h (например, если $h = 0{,}1$, то допущенная ошибка будет $\frac{\pi}{6}\,0{,}1^3 \approx 0{,}0005$). Геометрически дело заключается в том, что мы заменяем поверхность шарового сегмента поверхностью сегмента параболоида вращения с тем же основанием и с той же высотой.

Замечание II. Приведём интересное сравнение формул для объёмов цилиндра, сегмента параболоида вращения и конуса (черт. 317) с одними и теми же основанием и высотой.

Объём цилиндра равен произведению площади его основания на высоту, объём сегмента параболоида вращения равен половине произведения пло-



Черт. 317.



Черт. 318.

щади основания на высоту, а объём конуса равен одной трети произведения площади основания конуса на его высоту. Таким образом, параболоид вращения занимает промежуточное положение между цилиндром и конусом, что и видно из черт. 317; площади сечения параболоида плоскостями, перпендикулярными к оси вращения, по мере удаления секущей плоскости от основания параболоида убывают, но не так быстро, как у конуса (у цилиндра эти сечения постоянны). Нетрудно сообразить, как изменяются эти сечения: для цилиндра (как мы уже указали) эти сечения постоянны, для параболоида вращения площади сечений плоскостями, перпендикулярными оси вращения, пропорциональны расстоянию x секущей плоскости от вершины параболоида, а для конуса площади таких сечений пропорциональны квадрату расстояния x секущей плоскости от вершины. По формуле $v = \frac{1}{2}\,sh$ можно вычислить, например, объём стога сена, *так как стог по форме приближается к параболоиду вращения.*

Пример 7. Вычислим интегрированием объём эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение. Вычислим половину объёма v эллипсоида, именно вычислим объём той его части, которая расположена вправо от плоскости yOz (черт. 318). Обозначим через x расстояние плоскости, параллельной плоскости yOz до этой плоскости. Указанная плоскость рассечёт эллипсоид по эллипсу, уравнение которого (в плоскости сечения):

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

или

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1.$$

Полуоси этого эллипса равны:

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{и} \quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

а его площадь

$$S(x)=\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2).$$

По формуле $v=\int\limits_0^a S(x)\,dx$ найдём половину объёма v эллипсоида:

$$\frac{v}{2}=\int\limits_0^a\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{\pi bc}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{\pi bc}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi abc,$$

откуда

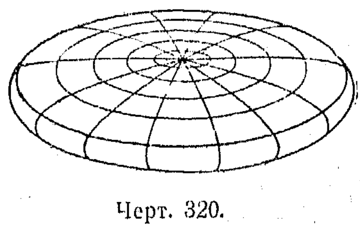
$$v=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Если $b=c$, то мы имеем вытянутый эллипсоид вращения; объём его равен

$$v=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

— это объём тела, напоминающего по форме огурец (a — половина его

Черт. 319.



Черт. 320.

длины, b — половина толщины; черт. 319). Если $a=b$, то мы имеем сжатый эллипсоид вращения (черт. 320); его объём v вычисляется по формуле:

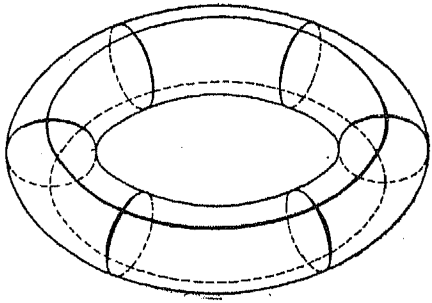
$$v=\frac{4}{3}\pi b^2c$$

— это объём тела, напоминающего по форме репу (b — половина ширины, c — половина толщины). Наконец, если $a=b=c$, т. е. эллипсоид, является шаром, то формула $v=\frac{4}{3}\pi abc$ принимает вид:

$$v=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

Пример 8. Вычислить объём тора.

Решение. Тором называется тело, образованное вращением круга около прямой, лежащей в плоскости этого круга и не пересекающей его (черт. 321). Обозначим через a радиус вращающейся окружности, а через b расстояние её центра до прямой, вокруг которой мы вращаем эту окружность.

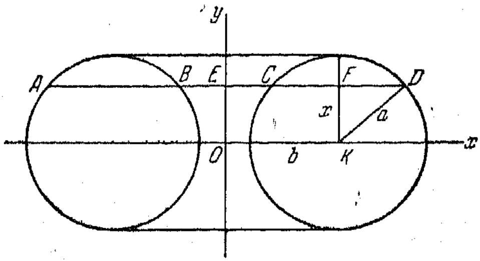


Черт. 321.

Вычислим половину объёма тора, именно — объём той его части, которая расположена по одну сторону от плоскости симметрии тора, перпендикулярной к его оси (т. е. той прямой, вокруг которой вращается окружность, образующая тор). Проведём плоскость, параллельную только что указанной плоскости симметрии тора на расстоянии x ($<a$) от неё. Эта плоскость AB рассечёт тор по плоскому кольцу — части плоскости, заключённой между концентрическими окружностями радиусов EC и ED (черт. 322). Из чертежа 322 ясно, что

$$ED=b+\sqrt{a^2-x^2},\quad EC=b-\sqrt{a^2-x^2},$$

а потому площадь указанного плоского кольца равна разности между пло-



Черт. 322.

щадью окружности радиуса ED и площадью окружности радиуса EC:

$$S(x)=\pi(b+\sqrt{a^2-x^2})^2-\pi(b-\sqrt{a^2-x^2})^2=4\pi b\sqrt{a^2-x^2}.$$

Интегрируя эту функцию в пределах от 0 до a, мы получим половину объёма тора:

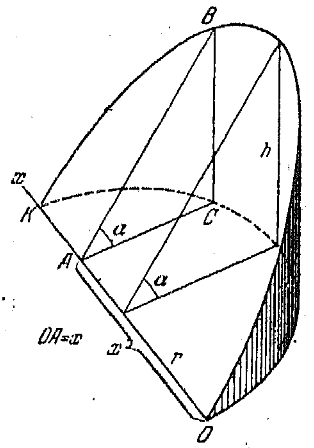
$$\frac{v}{2}=\int_0^a 4\pi b\sqrt{a^2-x^2}\,dx=4\pi b\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\pi^2ba^2,$$

откуда

$$v=2\pi^2ba^2.$$

Форму тора имеют, например, автомобильные шины, велосипедные или автомобильные камеры, обычный бублик и т. д.

Замечание. Из приведённых выше примеров и задач читателю должно быть ясно значение интегрального исчисления в вопросах о вычислении объёмов. В то время как в элементарной геометрии к вычислению объёмов подходят часто с разных точек зрения и сами вычисления проводят разными приёмами — в интегральном исчислении вычисление объёмов проводится всегда единообразно — по указанной формуле. Можно сказать, что эта формула $v=\int\limits_0^h s(x)\,dx$ объединяет в себе формулы для объёмов шара, конуса, усечённого конуса, шарового сегмента и слоя, сегмента параболоида вращения, тора, эллипсоида и многих других тел, весьма небольшую часть которых мы только что перечислили и привели выше для самостоятельного исследования.



Черт. 323.

Упражнения

371. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox сегмента параболы $y=2x-x^2$, отсекаемого от неё осью Ox. Сделать чертёж.

372. Вычислить объём «веретена», образованного вращением вокруг оси Ox одной волны синусоиды. Сделать чертёж.

373. Вычислить объём тела, полученного от вращения астроиды вокруг оси Ox. Сделать чертёж.

374. Рассмотрим дугу окружности. Проведём прямую, не пересекающую эту дугу, расположенную со стороны вогнутости дуги и отстоящую от концов дуги на одинаковых расстояниях. Вычислить объём тела, полученного от вращения указанной дуги около указанной прямой (объём бочки).

375. Дуга гиперболы, отсекаемая от неё прямой, параллельной мнимой оси гиперболы, вращается около мнимой оси гиперболы. Найти объём образующегося при этом гиперболоида вращения. Сделать чертёж.

376. Вычислить объём цилиндрического отрезка, т. е. части круглого цилиндра, вырезаемой из неё двумя полуплоскостями, проходящими через диаметр основания; одна из плоскостей перпендикулярна образующим цилиндра (черт. 323).

§ 154. Формула Симпсона

Теорема 1. *Если $f(x)$ есть многочлен относительно x степени не выше третьей, т. е. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+e$,* где *a, b, c, e — коэффициенты, то:*

$$\int\limits_0^h f(x)\,dx=\frac{h}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{h}{2}\right)+f(h)\right]$$

(формула Симпсона).

Доказательство. $\int\limits_0^h f(x)dx = \int\limits_0^h (ax^3+bx^2+cx+e)\,dx =$

$$= \left[\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^2}{2}+ex\right]_0^h = \frac{1}{4}ah^4+\frac{1}{3}bh^3+\frac{1}{2}ch^2+eh.$$

Вычислим правую часть формулы:

$$\frac{h}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{h}{2}\right)+f(h)\right]=$$

$$=\frac{h}{6}\left[e+4\left(a\frac{h^3}{8}+b\frac{h^2}{4}+c\frac{h}{2}+e\right)+ah^3+bh^2+ch+e\right]=$$

$$=\frac{h}{6}\left(e+\frac{ah^3}{2}+bh^2+2ch+4e+ah^3+bh^2+ch+e\right)=$$

$$=\frac{h}{6}\left(\frac{3}{2}ah^3+2bh^2+3ch+6e\right)=\frac{1}{4}ah^4+\frac{1}{3}bh^3+\frac{1}{2}ch^2+eh.$$

Мы получили тот же результат; формула Симпсона доказана.

Покажем теперь, как формула Симпсона прилагается к вычислениям объёмов тела.

Вернёмся к чертежу 309. Предположим, что площадь $s(x)$ произвольного сечения тела плоскостью, параллельной тем, в которые «зажато» тело, есть многочлен степени не выше третьей. Тогда объём v этого тела, как всегда, будет определяться формулой

$$v=\int\limits_0^h f(x)\,dx,$$

но теперь, на основании доказанной теоремы, он может быть вычислен по формуле Симпсона без всяких интегрирований:

$$v=\frac{h}{6}\left[s(0)+4s\left(\frac{h}{2}\right)+s(h)\right].$$

Число $s(0)$ есть площадь нижнего сечения, $s(h)$ есть площадь верхнего сечения, а $s\left(\frac{h}{2}\right)$ есть площадь «среднего» сечения, т. е. площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной его «высоте» и делящей её пополам.

Почти во всех телах, рассматриваемых в элементарной геометрии, площадь сечения $s(x)$ и есть как раз многочлен степени не выше третьей, а потому для этих тел приложима формула Симпсона и их объёмы могут быть вычислены без интегрирования.

В самом деле:

для шара $s(x)=\pi(r^2-x^2)$;

для конуса $s(x)=\pi\frac{r^2}{h^2}x^2$;

для параболоида вращения $s(x)=2\pi px$;

для эллипсоида $s(x)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2)$

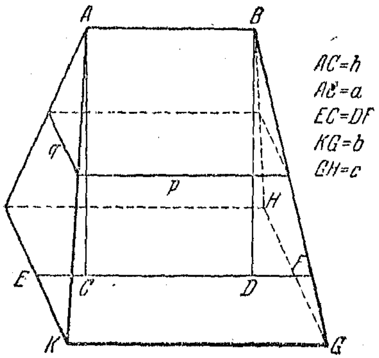
и т. д.

Во всех указанных случаях функция $s(x)$ есть многочлен степени не выше третьей (именно $s(x)$ во всех случаях многочлен второй или первой степени).

Таким образом, объёмы шара, шарового сегмента, шарового слоя, объём конуса, усечённого конуса, сегмента параболоида вращения, эллипсоида и т. д. могут быть вычислены по формуле Симпсона.

1) «Зажимая» шар в 2 параллельные плоскости, нетрудно видеть, что его «высота» равна $2r$, т. е. $h=2r$ (r — радиус шара). Площади нижнего и верхнего сечений шара равны нулю (так как указанные плоскости встречают шар в точках — точках касания), а площадь среднего сечения равна площади большого круга шара, т. е. πr^2. Значит,

$$v=\frac{2r}{6}(0+4\pi r^2+0)=\frac{4}{3}\pi r^3.$$



Черт. 324.

2) Для конуса площадь верхнего сечения равна нулю; площадь среднего сечения равна $\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2$, а площадь нижнего сечения равна πr^2. Значит, объём v конуса равен:

$$v=\frac{h}{6}\left(0+4\cdot\pi\frac{r^2}{4}+\pi r^2\right)=\frac{\pi r^2 h}{3}.$$

3) Для эллипсоида, как и для шара, площади верхнего и нижнего сечений равны нулю, а площадь среднего сечения является равной площади эллипса с полуосями b и c (если рассматривать сечение эллипсоида плоскостью yOz); площадь этого эллипса равна πbc. «Высота» эллипсоида, очевидно, равна $2a$, т. е. $h=2a$ и объём v эллипсоида определится формулой Симпсона

$$v=\frac{2a}{6}(0+4\pi bc+0)=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Упражнения

377. Пользуясь формулой Симпсона, вычислите объёмы следующих тел: шарового сегмента, шарового слоя, усечённого конуса, сегмента параболоида вращения.

378. Можно ли по формуле Симпсона вычислить объём клина? (Черт. 324.) Вычислите объём клина непосредственным интегрированием (форму клина имеют, например, топор, чердак дома и т. д.).

379. Можно ли по формуле Симпсона вычислить объём бочки? (См. задачу 374.)

Замечание I. Важно усвоить совершенно чётко, что формула Симпсона применима к вычислению объёмов только тогда, когда площадь сечения тела плоскостью, параллельной тем, в которые «зажимается» тело, и отстоящей на расстоянии x от одной из них, есть многочлен $S(x)$ степени не выше третьей относительно x. В случае, если это не так, формула Симпсона, вообще говоря, не даст точного значения объёма тела. Так, например, для тора $s(x)=2\pi b\sqrt{a^2-x^2}$ и его объём не может быть вычислен по формуле Симпсона. Для тела, рассмотренного в задаче 372, имеем: $s(x)=\pi\sin^2 x$; объём этого тела также не может быть вычислен по формуле Симпсона и т. д. Однако иногда применяют формулу Симпсона и в тех случаях, когда $S(x)$ не является многочленом степени не выше третьей; при этом мы получим приближённое значение вычисляемого объёма.

Замечание II. Не следует думать, что формула Симпсона прилагается только для вычисления объёмов. С равным успехом она может быть применена и к вычислению площадей, и здесь она, конечно, будет давать точный результат только тогда, когда уравнение линии, ограничивающей криволинейную трапецию, имеет вид: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. При этом под h в формуле Симпсона следует понимать длину сегмента интегрирования, $f(0)$ и $f(h)$ — крайние ординаты, а $f\left(\frac{h}{2}\right)$ — средняя ордината. Например, по формуле Симпсона может быть решена задача 364. Для этой задачи крайние ординаты равны нулю, а средняя ордината $y=1$ получится при $x=1$. Значит, площадь $S = \frac{2}{3}(0+4\cdot 1+0) = \frac{4}{3}$. Но площадь, ограниченную одной волной синусоиды, по формуле Симпсона вычислять нельзя ($\sin x$ не есть многочлен!). Формулу Симпсона можно прилагать и во многих других вопросах — точнее во всех тех вопросах, где приходится иметь дело с интегралом от некоторого многочлена степени не выше трёх.

Замечание III. Формула Симпсона применяется и для приближённого вычисления определённого интеграла в тех случаях, когда точное вычисление невыполнимо или громоздко. Для достижения достаточной точности делят отрезок интегрирования на достаточно большое (притом непременно чётное) число частей и применяют формулу Симпсона последовательно для трёх значений функции:

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),$$

затем

$$f(x_2),\ f(x_3),\ f(x_4) \text{ и т. д.}$$

Замечание IV. При преподавании математики в сре́дней школе можно рекомендовать познакомить учащихся с формулой Симпсона, разъяснив её, скажем, применительно к вычислению объёмов. Формула Симпсона, как объединяющая формулы для объёма многих тел, рассматриваемых в элементарной математике, поможет учащимся в случае надобности быстро восстанавливать ту или иную формулу. Разумеется, учащимся надо точно перечислить те тела, объёмы которых могут быть точно вычислены по формуле Симпсона.

§ 155. Принцип Кавальери

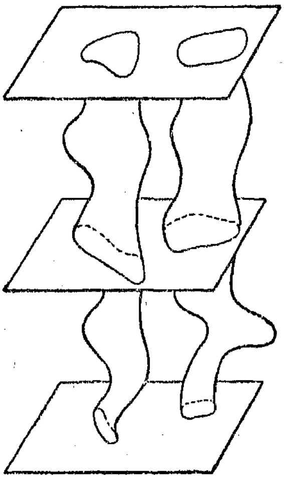
Если два тела расположены между двумя параллельными плоскостями и если площади их сечений любой плоскостью, параллельной указанным, — равны, то объёмы этих тел также равны (черт. 325). Это и есть принцип Кавальери. Доказательство его очень просто: функция $s(x)$, входящая в формулу $v = \int\limits_0^a s(x)\,dx$, определяющую объём каждого тела, по условию, одна и та же для обоих тел, а потому и объёмы тел, выражаемые интегралом от $s(x)$ в пределах от 0 до h, равны.

Пример 1. Вычислить объём шара, пользуясь принципом Кавальери.

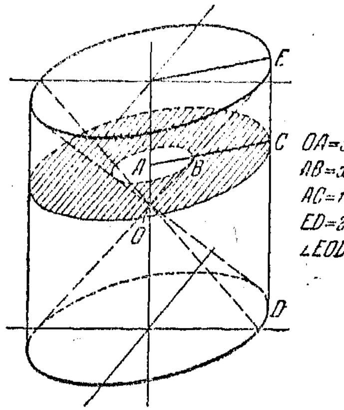
Решение. Будем вращать равнобедренный прямоугольный треугольник OED, гипотенуза которого равна $2r$, около прямой, параллельной гипотенузе, проходящей через вершину прямого угла (черт. 326). Рассмотрим сечение полученного тела вращения плоскостью, перпендикулярной оси вращения, отстоящей от вершины прямого угла вращающегося треугольника на расстоянии x. Это сечение имеет вид плоского кольца, т. е. части плоскости, заключённой между двумя концентричными окружностями радиусов r и x (черт. 326). Значит, площадь этого кольца равна $\pi r^2 - \pi x^2$ или $\pi(r^2 - x^2)$. Ту же функцию мы имели в примере 1, § 153, при вычислении объёма шара. На основании принципа Кавальери объём шара радиуса r будет равен объёму рассматриваемого тела вращения. Нетрудно вычислить объём этого тела; он будет равен объёму цилиндра радиуса r с высотой $2r$, т. е. $\pi r^2 \cdot 2r$, уменьшенному на сумму объёмов двух одинаковых конусов, радиусы оснований которых равны r, а высоты также равны r, т. е. $2 \cdot \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} = \frac{2}{3}\pi r^3$. Итак, объём рассматриваемого тела вращения, равный объёму шара радиуса r, равен:

$$2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Пример 2. Вернёмся к чертежу 326. Рассмотрим объём тела, образованного вращением треугольника BCE (около той же оси), катет которого



Черт. 325.



Черт. 326.

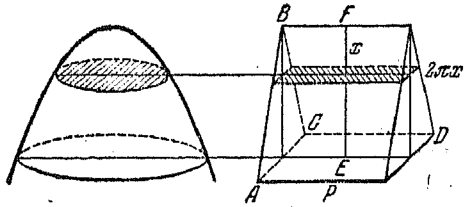
равен h (катет BC этого треугольника перпендикулярен оси вращения). На основании принципа Кавальери объём этого тела равен объёму шарового сегмента высотой h, отсечённого от шара радиуса r. Объём указанного тела равен объёму цилиндра радиуса r и высотой h, уменьшенному на объём усечённого конуса высотой h, одним радиусом основания r и другим радиусом основания $AC - BC = r - h$. Итак, объём указанного тела вращения, равный объёму шарового сегмента высотой h, отсечённого от шара радиуса r:

$$\pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}\left[r^2 + r(r-h) + (r-h)^2\right] = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right)$$

(см. пример 4, § 153).

Пример 3. Вычислить, пользуясь принципом Кавальери, объём сегмента параболоида вращения (черт. 327).

Рассмотрим треугольную призму, положенную на боковую грань. Предположим, что эта боковая грань треугольной призмы имеет форму прямоугольника, размеры сторон которого $2\pi h$ и p, где h — расстояние от любой точки ребра призмы, параллельного основанию, до этого основания, а p — некоторое число. Рассмотрим теперь сегмент параболоида вращения, полученного от вращения параболы с параметром p вокруг её оси. Высоту сегмента примем также равной h. Проведём произвольную плоскость, параллельную той, на которую «поставлены» оба тела. Эта плоскость рассечёт параболоид по окружности радиуса $\sqrt{2px}$, где x — расстояние проведённой плоскости от вершины параболоида, а призму по прямоугольнику, стороны которого легко вычислить и которые будут p и $2\pi x$. Площадь сечения параболоида равна площади круга радиуса $\sqrt{2px}$, т. е. $\pi(\sqrt{2px})^2 = 2\pi px$, а площадь сечения призмы равна $p \cdot 2\pi x = 2\pi px$. Мы получили одну и ту же функцию $s(x) = 2\pi px$, следовательно, на основании принципа Кавальери, объём сегмента параболоида вращения равен объёму указанной призмы; объём призмы равен произведению площади треугольника ABC, т. е. $\frac{1}{2} \cdot 2\pi h \cdot h = \pi h^2$ на $CD = p$, т. е. этот объём равен $\pi p h^2$ — результат, уже полученный нами в примере 6, § 153. Отсюда также следует, что объём треугольной призмы, положенной на боковую грань, равен половине произведения площади этой грани на «высоту», причём под «высотой» мы понимаем здесь расстояние от любой точки ребра призмы, параллельного той грани, на которую положена призма, до этой грани.



Черт. 327.

З а м е ч а н и е. Из приведённых примеров ясно, в чём заключается идея приложения принципа Кавальери: тело, объём которого хотят определить, сравнивают с телом такой же высоты и с теми же площадями поперечных сечений, объём которого вычислить проще. При этом подбор такого тела (более простой формы) осуществляется, вообще говоря, довольно просто, когда известен закон $s(x)$ изменения площадей поперечных сечений тела, объём которого желают определить. Так, например, для шара: $s(x) = \pi(r^2 - x^2) = \pi r^2 - \pi x^2$ и $s(x)$ можно рассматривать как разность площадей двух кругов радиусов r и x; поэтому надо подобрать тело такой формы, сечение которого плоскостями, параллельными основанию, рассекало бы его по круговому кольцу радиусов r и x. Такой подбор и осуществлён в примере 1. Определяя в примере 3 объём сегмента параболоида вращения, мы прежде всего должны обратить внимание на то, что $s(x)$ для параболоида вращения — линейная функция от x [$s(x) = 2\pi px$]. Поэтому мы должны подобрать тело более простое, чем параболоид вращения, в котором площадь сечения $s(x)$ есть также линейная функция от x. Таким телом и является треугольная призма, положенная на боковую грань; выбор размеров этой грани также не должен показаться искусственным — размеры выбраны такими, чтобы площади основания сегмента параболоида вращения и указанной грани были бы равны, а в силу того, что площади сечений $s(x)$ для сегмента параболоида вращения и треугольной призмы, положенной на боковую грань, изменяются по одному и тому же закону, совпадение площадей оснований обоих тел гарантирует их совпадения для любого x. Для конуса площадь сечения $s(x)$ плоскостью, перпендикулярной его высоте, пропорциональна квадрату расстояния этой плоскости от вершины конуса; таким же законом распределения площадей обладает пирамида, а потому, применяя принцип Кавальери к вычислению объёма конуса, его сравнивают с пирамидой, причём здесь опять достаточно добиться совпадения площадей оснований (и, конечно, высот). В изучении закона, по которому изменяется площадь $s(x)$ сечения тела плоскостью, параллельной плоскостям, в которые «зажато» тело, и в подыскании другого тела, более простой формы, с той же функцией $s(x)$ площадей поперечных сечений тела, и заключается идея осуществления самых разнообразных приложений принципа Кавальери.

При преподавании математики в школе можно рекомендовать изложить учащимся и само содержание принципа Кавальери и применение этого принципа (указав, помимо формулировки самого принципа, примерно то, что было сказано в предыдущем замечании).

Упражнения

380. Вычислить, пользуясь принципом Кавальери, объём конуса, цилиндра, усечённого конуса, считая известными формулы для объёмов пирамиды, призмы, усечённой пирамиды.

§ 156. Длина дуги плоской линии в декартовой прямоугольной системе координат

Рассмотрим произвольную непрерывную и дифференцируемую функцию $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Предположим, что на сегменте $[a, b]$ эта функция имеет непрерывную производную $f'(x)$. Функция $f(x)$ определяет дугу линии (на участке от $x=a$ до $x=b$). Разобьём сегмент $[a, b]$ на n частей точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Проведём через точки деления прямые, параллельные оси Oy, до встречи с дугой линии $y=f(x)$ в точках $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$.

Определение. *Длиной дуги линии $y=f(x)$ от точки $A(a, f(a))$ до точки $B(b, f(b))$ называется такое число C, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$, что как только длины всех звеньев ломаной*

$$AP_1P_2\ldots P_{n-1}B,$$

вписанной в дугу AB, будут $<\delta$, то модуль разности длин этой ломаной и числа C будет $<\varepsilon$:

$$|AP_1P_r\ldots P_{n-1}B-C|<\varepsilon,$$

причём абсциссы точек вписанной ломаной удовлетворяют условию

$$a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<b.$$

Найдём длину k-го звена данной ломаной, т. е. найдём $P_{k-1}P_k$. Очевидно, имеем (черт. 328):

$$P_{k-1}P_k=\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_k^2};$$

но

$$\Delta y_k=f(x_k)-f(x_{k-1}).$$

Применяя к этой разности теорему Лагранжа, получим:

$$\Delta y_k = (x_k - x_{k-1}) f'(\xi_k) = f'(\xi_k)\,\Delta x_k$$

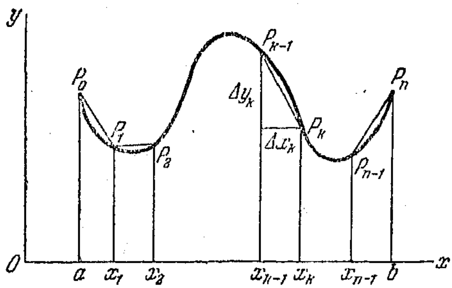
и, следовательно,

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k.$$

Длина всей ломаной равна сумме длин всех её звеньев:

$$AP_1P_2\ldots P_{n-1}B =$$
$$= \sqrt{1+f'^2(\xi_1)}\,\Delta x_1 + \sqrt{1+f'^2(\xi_2)}\,\Delta x_2 + \ldots + \sqrt{1+f'^2(\xi_n)}\,\Delta x_n.$$

Отсюда видно, что длина дуги AB есть предел интегральной суммы



Черт. 328.

для функции $\sqrt{1+f'^2(x)}$ на сегменте $[a, b]$. В силу непрерывности функции $\sqrt{1+f'^2(x)}$ на сегменте $[a, b]$ этот предел равен:

$$C = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Эту формулу часто пишут и в таком виде:

$$C = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

подразумевая под буквой y функцию $f(x)$, взятую из уравнения $y=f(x)$ данной линии.

Пример 1. Вычислить длину астроиды (см. задачу 368).

Решение. Из уравнения астроиды находим:

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

откуда

$$y' = \frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) = -x^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}},\quad 1+y'^2 =$$
$$= 1 + x^{-\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right) = 1 + x^{-\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}} - 1 = x^{-\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}},\quad \sqrt{1+y'^2} = x^{-\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}.$$

и, следовательно, длина $\frac{1}{4}$-й дуги всей астроиды будет равна:

$$\frac{C}{4}=\int_0^a x^{-\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\,dx=\left[a^{\frac{1}{3}}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_0^a=\frac{3}{2}a,$$

откуда длина C всей астроиды: $C=6a$.

Упражнения

381. Найти длину полукубической параболы $y^2=x^3$ между точками $(0, 0)$ и $(4, 8)$. Сделать чертёж.

382. Найти длину линии $y=x\sqrt[3]{\frac{x}{4}}$ между точками $(0, 0)$ и $(4, 4)$. Сделать чертёж.

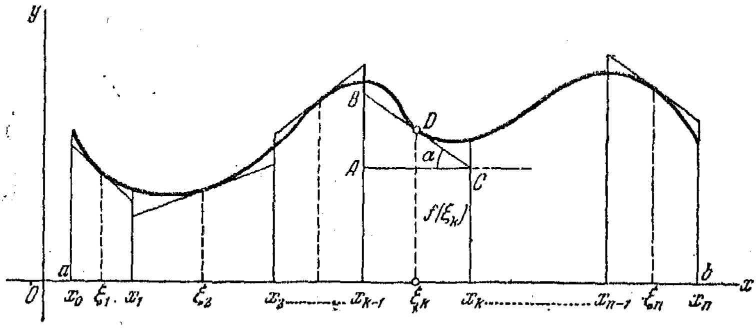
383. Вычислить длину линии $y=\ln x$ в пределах от $x=\sqrt{3}$ до $x=2\sqrt{2}$. Сделать чертёж.

384. Вычислить длину дуги цепной линии $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ в пределах от $x=-a$ до $x=a$. Сделать чертёж.

385. Вычислить длину дуги петли линии $3y^2=x^2(3x+1)$. Сделать чертёж.

§ 157. Поверхность тела вращения

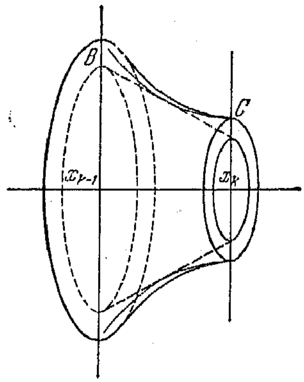
Рассмотрим непрерывную функцию $y=f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Предположим, что на этом сегменте функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$. Будем вращать дугу линии $y=f(x)$



Черт. 329.

вокруг оси Ox. Определим поверхность образовавшегося тела вращения. Разделим сегмент $[a, b]$ на n частей точками $a=x_0<x_1<<x_2<\ldots<x_n=b$. Проведём через точки деления плоскости, перпендикулярные оси вращения. Этими плоскостями поверхность разделится на n полосок (черт. 329). Разделим пополам каждый из сегментов $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$; обозначим точки

деления через $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$. Построим в этих точках ординаты вращающейся линии $y=f(x)$ и в их концах проведём касательные к данной линии; будем рассматривать отрезки этих касательных в пределах между двумя соседними ординатами, проведёнными в точках x_{k-1} и x_k. При вращении линии $y=f(x)$ вокруг оси Ox отрезки этих касательных опишут n усечённых конусов (в частности, цилиндры или просто конусы), описанных около каждой из n полосок, на которые разделено тело вращения. Рассмотрим произвольную k-ю полоску (черт. 330). Заменим поверхность этой полоски боковой поверхностью усечённого конуса. Как известно, боковая поверхность усечённого конуса равна длине окружности среднего сечения, т. е. $2\pi f(\xi_k)$, умноженной на длину образующей. Длину l_k образующей найдём из прямоугольного треугольника $ABC: l_k = \Delta x_k \sec\alpha$, а так как $\sec\alpha = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ и $|\operatorname{tg}\alpha| = |f'(\xi_k)|$, то $l_k = \Delta x_k\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}$ и, значит, поверхность k-го усечённого конуса равна: $2\pi f(\xi_k)\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k$. Сумма боковых поверхностей всех усечённых конусов, описанных около всех n полосок нашего тела, будет равна сумме всех таких слагаемых, т. е.



Черт. 330.

$$\sum 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k,$$

а предел этой суммы равен определённому интегралу от функции $2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$ в пределах от $x=a$ до $x=b$. Итак, поверхность рассматриваемого тела вращения равна:

$$\sigma = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\;dx.$$

Эту формулу часто пишут также в виде:

$$\sigma = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\;dx,$$

понимая под y функцию $f(x)$, взятую из уравнения линии $y=f(x)$.

Пример 1. Вычислить интегрированием поверхность сферы.

Решение. Сфера может быть получена вращением окружности около её диаметра. Принимая ось вращения за ось Ox, располагая начало координат в центре окружности и взяв уравнение верхней части окружности: $y=\sqrt{r^2-x^2}$, будем иметь:

$$y\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{r^2-x^2}\,\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} = r,$$

откуда находим поверхность сферы:

$$\sigma = \int_{-r}^{r} 2\pi r\, dx = 2\pi r\, [x]_{-r}^{r} = 4\pi r^2$$

— формула, известная из школьного курса стереометрии.

Пример 2. Вычислить интегрированием боковую поверхность конуса.

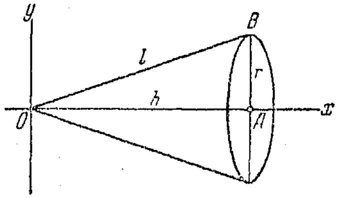
Решение. Конус может быть образован вращением вокруг оси Ox отрезка прямой, выходящего из *начала координат*. Уравнение образующей конуса: $y = \frac{r}{h} x$ (черт. 331), поэтому

$$\sigma = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h}\, x \sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\, dx = 2\pi \frac{r\sqrt{r^2+h^2}}{h^2} \int_0^h x\, dx =$$

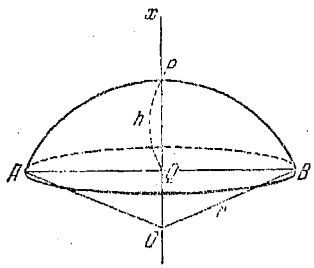
$$= \frac{2\pi r l}{h^2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \frac{2\pi r l}{h^2} \frac{h^2}{2} = \pi r l.$$

Пример 3. Вычислить интегрированием поверхность сферического сегмента.

Решение. Сферический сегмент может быть получен вращением дуги AB окружности $x^2+y^2=r^2$ около оси Ox (черт. 332). Легко подсчитать, что в данном случае $y\sqrt{1+y'^2}=r$,



Черт. 331.



Черт. 332.

следовательно, поверхность сферического сегмента определится интегралом

$$\sigma = 2\pi \int_{r-h}^{r} r\, dx = 2\pi r\, [x]_{r-h}^{r} = 2\pi r\, (r - r + h) = 2\pi r h,$$

т. е. поверхность сферического сегмента равна боковой поверхности цилиндра с тем же радиусом основания и с той же высотой.

Пример 4. Вычислить поверхность тора.

Решение. Вернёмся к чертежу 322. Ясно, что поверхность тора будет складываться из поверхности, описанной полуокружностью $y = b + \sqrt{a^2-x^2}$, и поверхности, описанной полуокружностью $y = b - \sqrt{a^2-x^2}$.

Находим для первого уравнения:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad 1+y'^2 = 1+\frac{x^2}{a^2-x^2} = \frac{a^2}{a^2-x^2},$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

и поверхность, описанная левой половиной полуокружности чертежа, равна:

$$\sigma_1 = 2\pi \int_{-a}^{a} (b + \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx.$$

Точно так же получим, что поверхность, описанная правой полуокружностью чертежа 322, равна:

$$\sigma_2 = 2\pi \int_{-a}^{a} (b - \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx.$$

Отсюда поверхность тора, равная $\sigma_1 + \sigma_2$, определится интегралом

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = 2\pi \int_{-a}^{a} \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = 4\pi ab \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= 4\pi ab \left[\arcsin \frac{x}{a}\right]_{-a}^{a} = 4\pi ab\, [\arcsin 1 - \arcsin(-1)] =$$

$$= 4\pi ab \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 4\pi^2 ab.$$

Пример 5. Вычислить поверхность вращения вытянутого эллипсоида.

Решение. Вытянутый эллипсоид вращения мы получим, вращая эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox $(a > b)$. Разрешая уравнение эллипса относительно y, получим:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Выбирая в правой части знак $+$, получим уравнение верхней дуги эллипса

$$y = + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$$

отсюда:

$$y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}} = \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\, x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^4 - c^2 x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 \sqrt{1 - \frac{c^2 x^2}{a^4}}}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = a\, \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 \frac{x^2}{a^2}}}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Так как $\frac{c}{a} = e$ — эксцентриситет эллипса, то

$$\sqrt{1 + y'^2} = a\, \frac{\sqrt{1 - e^2 \frac{x^2}{a^2}}}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Отсюда площадь поверхности вращения:

$$\sigma = 2\pi \int_{-a}^{a} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot a \frac{\sqrt{1 - e^2 \frac{x^2}{a^2}}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = 2\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{e^2 x^2}{a^2}}\, dx =$$

$$= 2\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \left(\frac{ex}{a}\right)^2}\, dx = 2\pi b \cdot \frac{a}{e} \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \left(\frac{ex}{a}\right)^2}\, d\left(\frac{ex}{a}\right) =$$

$$= \frac{2\pi b a}{e}\left[\frac{1}{2}\frac{ex}{a}\sqrt{1 - \frac{e^2 x^2}{a^2}} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{ex}{a}\right]_{-a}^{a} =$$

$$= 2\pi a b\left(\sqrt{1 - e^2} + \frac{\arcsin e}{e}\right).$$

Таково окончательное выражение поверхности эллипсоида вращения (вытянутого).

Пример 6. Вычислить поверхность сжатого эллипсоида вращения.

Решение. Сжатый эллипсоид вращения мы получим, вращая тот же эллипс в предположении, что $a < b$, вокруг оси Ox. При этом выкладки будут несколько отличаться от тех, которые мы провели в предыдущем примере; именно, квадрат половины расстояния между фокусами определяется соотношением $c^2 = b^2 - a^2$ (ибо теперь $b > a$). Поэтому теперь $e = \frac{c}{b}$ и, значит,

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\, x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{a^4 + c^2 x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

откуда

$$\sigma = 2\pi \int_{-a}^{a} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, \frac{\sqrt{a^4 + c^2 x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \frac{2\pi b}{a^2} \int_{-a}^{a} \sqrt{a^4 + c^2 x^2}\, dx =$$

$$= \frac{2\pi b}{a^2} \int_{-a}^{a} \sqrt{a^4 + \frac{c^2}{b^2} b^2 x^2}\, dx = \frac{2\pi b}{a^2} \int_{-a}^{a} \sqrt{a^4 + b^2 e^2 x^2}\, dx =$$

$$= 2\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(\frac{bex}{a^2}\right)^2}\, dx = \frac{2\pi a^2}{e} \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(\frac{bex}{a^2}\right)^2}\, d\left(\frac{bex}{a^2}\right).$$

Положим

$$\frac{bex}{a^2} = u$$

и вычислим неопределённый интеграл

$$\int \sqrt{1 + u^2}\, du;$$

имеем:

$$\int \sqrt{1 + u^2}\, du = \frac{1}{2} u \sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2} \ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right);$$

отсюда

$$\int\sqrt{1+\left(\frac{bex}{a^2}\right)^2}\,d\left(\frac{bex}{a^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{ex}{a^2}\sqrt{1+\left(\frac{bex}{a^2}\right)}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{bex}{a^2}+\sqrt{1+\left(\frac{bex}{a^2}\right)^2}\right)$$

и, значит,

$$\sigma=\frac{2\pi a^2}{e}\left[\frac{1}{2}\frac{bex}{a^2}\sqrt{1+\left(\frac{bex}{a^2}\right)^2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{bex}{a^2}+\sqrt{1+\left(\frac{bex}{a^2}\right)^2}\right)\right]_{-a}^{a}=$$

$$=\frac{2\pi a^2}{e}\left[\frac{be}{a}\sqrt{1+\frac{b^2e^2}{a^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\frac{be}{a}+\sqrt{1+\frac{b^2e^2}{a^2}}}{-\frac{be}{a}+\sqrt{1+\frac{b^2e^2}{a^2}}}\right],$$

и так как

$$\sqrt{1+\frac{b^2e^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{b^2}}=\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a}=\frac{b}{a},$$

то

$$\sigma=\frac{2\pi a^2}{e}\left[\frac{be}{a}\cdot\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\ln\frac{\frac{b}{a}+\frac{be}{a}}{\frac{b}{a}-\frac{be}{a}}\right]=$$

$$=\frac{2\pi a^2}{e}\left[\frac{eb^2}{a^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+e}{1-e}\right]=2\pi b^2+\frac{\pi a^2}{e}\ln\frac{1+e}{1-e}.$$

Обычно бо́льшую ось эллипса обозначают буквой a, а меньшую — буквой b, поэтому последнюю формулу лучше писать в виде:

$$\sigma=2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{e}\ln\frac{1+e}{1-e}.$$

Докажите, что в точке $e=0$ предел σ равен $4\pi a^2$, т. е. поверхности шара радиуса a.

Упражнения

386. Вычислить интегрированием поверхность сферического слоя.

387. Вычислить поверхность тела вращения, образованного вращением одной волны синусоиды вокруг оси Ox.

388. Вычислить поверхность тела, образованного вращением астроиды около оси Ox.

389. Вычислить интегрированием боковую поверхность усечённого конуса.

390. Вычислить боковую поверхность сегмента параболоида вращения высотой h, образованного от вращения параболы $y^2=2px$ вокруг оси Ox.

ГЛАВА XX

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 158. Основные определения

Определение. *Дифференциальным уравнением называется уравнение вида*

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0,$$

где x — аргумент, y — неизвестная функция от x, а $y', y'', \ldots$ — производные от функции y.

Например,

$$x + y' = 0,$$
$$y'^3 + y'' = \cos x.$$

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в это уравнение.

Например: уравнение

$$x + y' = 0$$

— первого порядка; уравнение

$$y'^3 + y'' = \cos x$$

— второго порядка и т. д.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = y(x)$, которая обращает рассматриваемое дифференциальное уравнение в тождество.

Например: решением дифференциального уравнения

$$x + y' = 0$$

является, например, функция

$$y = -\frac{1}{2}x^2,$$

так как, подставляя в данное уравнение $-\frac{1}{2}x^2$ вместо y, мы получим:

$$x + \left(-\frac{1}{2}x^2\right)' = x - x = 0.$$

Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение — это значит найти все его решения.

Мы рассмотрим в первую очередь дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y),$$

т. е. дифференциальное уравнение 1-го порядка, разрешённое относительно производной $\frac{dy}{dx}$.

§ 159. Основная теорема

В настоящем параграфе мы сформулируем одну из основных теорем дифференциальных уравнений первого порядка и укажем на приложение этой теоремы к некоторым частным видам дифференциальных уравнений.

Теорема (Коши). *Пусть дано дифференциальное уравнение вида:*

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y),$$

причём

1) *функция $f(x, y)$ определена для всех пар аргументов x, y, удовлетворяющих неравенствам*

$$x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,$$
$$y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b.$$

2) *) *Существует такое положительное число N, что*

$$|f(x, \bar{y})-f(x, \bar{\bar{y}})|<N|\bar{y}-\bar{\bar{y}}|,$$

где $\bar{y}$ и $\bar{\bar{y}}$ — два любых числа из сегмента $[y_0-b, y_0+b]$, а x — любое число из сегмента $[x_0-a, x_0+a]$. Тогда в окрестности точки $x=x_0$ существует единственное решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y),$$

которое при $x=x_0$ принимает значение $y=y_0$, т. е. существует, и притом только одна, функция $y=\varphi(x)$, которая удовлетворяет данному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}\equiv f(x, \varphi(x)),$$

и которая удовлетворяет условию

$$y_0=\varphi(x_0).$$

*) Условия 1) и 2) называются условиями Коши-Липшица.

Доказательство этой теоремы выходит за рамки настоящего курса. Мы лишь рассмотрим ряд её частных случаев, которые разъяснят нам её содержание.

I. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f(x),$$

т. е. дифференциальное уравнение вида $y'=f(x, y)$, в котором правая часть является функцией только x.

В таком случае условие Коши-Липшица выполняется, так как здесь

$$f(x, \overline{y})-f(x, \overline{\overline{y}})=f(x)-f(x)=0;$$

значит остаётся сохранить только условие 1), которое здесь также ослабляется. Теорема здесь модифицируется так: если $f(x)$ — функция, непрерывная на сегменте $[x_0-a, x_0+a]$, то существует, и притом только одно, решение $y=\varphi(x)$ уравнения

$$\frac{dy}{dx}=f(x),$$

которое принимает значение $y=y_0$ при $x=x_0$.

Теорему Коши в этом частном случае можно доказать: если y — неизвестная на сегменте $[x_0-a, x_0+a]$ функция, производная которой $f(x)$ — непрерывная функция на сегменте $[x_0-a, x_0+a]$, то все такие функции y определяются соотношением

$$y=\varphi(x)+C,$$

где $\varphi(x)$ — какая-нибудь примитивная для функции $f(x)$ на сегменте $[x_0-a, x_0+a]$. По условию, при $x=x_0$ мы должны иметь $y=y_0$:

$$y_0=\varphi(x_0)+C,$$

значит,

$$C=y_0-\varphi(x_0),$$

откуда

$$y=\varphi(x)+y_0-\varphi(x_0)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

и мы нашли решение:

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

которое при $x=x_0$ обращается в y_0. При этом доказана и единственность такого решения.

Рассмотрим другой частный случай:

II. $$\frac{dy}{dx}=f(y).$$

Согласно условию общей теоремы Коши полагаем:

1) Функция $f(y)$ непрерывна на сегменте $[y_0 - b, y_0 + b]$.

2) Для двух любых значений $\bar{y}$ и $\bar{\bar{y}}$ из сегмента $[y_0 - b, y_0 + b]$ мы имеем:

$$|f(\bar{y}) - f(\bar{\bar{y}})| < N|\bar{y} - \bar{\bar{y}}|, \qquad \text{где } N > 0.$$

Доказательство здесь уже значительно сложнее. Отметим, что если наложить на функцию $f(y)$ некоторые дополнительные ограничения, то доказательство теоремы Коши и здесь проводится просто.

Именно: предположим, что на сегменте $[y_0 - b, y_0 + b]$ мы имеем: $f(y) > 0$. Тогда решение $x = \psi(y)$ уравнения $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$ есть возрастающая и непрерывная функция от y на сегменте $[y_0 - b, y_0 + b]$; значит, обратная функция $y = \varphi(x)$ также возрастающая и непрерывная функция на сегменте $[x_0 - a, x_0 + a]$, причём

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

На основании I решение уравнения $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$ имеет вид:

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)}.$$

Это уравнение определяет функцию $x = \psi(y)$, возрастающую и непрерывную на сегменте $[y_0 - b, y_0 + b]$ и являющуюся решением уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}.$$

Обратная для этой функции будет функция возрастающая, непрерывная на сегменте $[x_0 - a, x_0 + a]$. Эта функция будет решением дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

и при $x = x_0$ её значение будет равно y_0:

$$\varphi(x_0) = y_0.$$

III. Рассмотрим, наконец, уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$$

— дифференциальное уравнение с «разделяющимися переменными». В этом случае условия теоремы Коши существования и единственности решения дифференциального уравнения принимают вид:

1) Функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[x_0 - a,\ x_0 + a]$; функция $\varphi(y)$ непрерывна на сегменте $[y_0 - b,\ y_0 + b]$;

2) $|\varphi(\bar{y}) - \varphi(\bar{\bar{y}})| < N|\bar{y} - \bar{\bar{y}}|$.

Замечание. Функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[x_0 - a,\ x_0 + a]$, следовательно, ограничена на этом сегменте

$$|f(x)| < K$$

и потому

$$|f(x)\varphi(\bar{y}) - f(x)\varphi(\bar{\bar{y}})| < NK|\bar{y} - \bar{\bar{y}}|$$

— условие Коши-Липшица выполнено для правой части. Если дополнительно наложить ограничение на функцию $\varphi(y)$: $\varphi(y) > 0$ на сегменте $[y_0 - b,\ y_0 + b]$ (или $\varphi(y) < 0$ на этом сегменте), то легко получить решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям: $y = y_0$ при $x = x_0$. В самом деле, предположим, что данное уравнение имеет решение. Тогда:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx,$$

откуда на основании теоремы о подстановке в неопределённом интеграле, находим:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

Пусть $F(y)$ — примитивная для левой части, а $\Phi(x)$ — для правой:

$$F(y) = \Phi(x) + C;$$

так как при $x = x_0$ мы должны иметь $y = y_0$, то

$$F(y_0) = \Phi(x_0) + C,$$

откуда

$$C = F(y_0) - \Phi(x_0)$$

и значит

$$F(y) - F(y_0) = \Phi(x) - \Phi(x_0),$$

или

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\varphi(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx;$$

таким образом, если решение данного дифференциального уравнения существует, то оно должно определяться из этого соотношения. С другой стороны, это уравнение определяет y как функцию от x. В самом деле, так как функция $\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\varphi(y)}$ возрастающая, то уравнение $\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\varphi(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ определяет решение $y = \psi(x)$, являющееся вместе с тем решением данного дифференциального уравнения. Из соотношения

$$F(y_0) = \Phi(x_0) + C$$

мы имеем:

$$C = F(y_0) - \Phi(x_0).$$

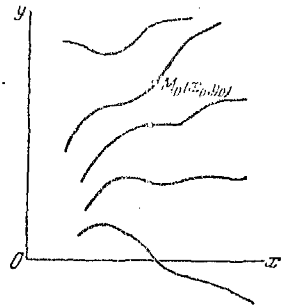
Если считать x_0 фиксированным, а y_0 параметром, то C не будет иметь фиксированного значения, и мы из уравнения

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\varphi(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

найдём множество решений

$$y = y(x, y_0) \quad \text{или} \quad y = y(x, C).$$

Это множество решений называется **общим интегралом** данного дифференциального уравнения, а решение (единственное), выделенное начальными условиями: $y = y_0$ при $x = x_0$, называется **частным решением**.



Черт. 333.

Если $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, то график этой функции называется интегральной линией данного дифференциального уравнения.

Общему интегралу $y = y(x, C)$ дифференциального уравнения соответствует *множество, или, как ещё говорят, семейство* интегральных линий от одного параметра (черт. 333).

Пример 1.

$$x\,dy + y\,dx = 0.$$

Имеем:

$$x\,dy = -y\,dx,$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln C$$

(«произвольную постоянную» интегрирования мы обозначаем через $\ln C$ для удобства дальнейших преобразований);

$$\ln|y| = \ln\frac{C}{|x|},$$

$$|y| = \frac{C}{|x|},$$

или окончательно:

$$xy = C.$$

Придавая C всевозможные действительные значения, мы получим все решения нашего дифференциального уравнения.

Пример 2.

$$(1 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0.$$

Имеем:

$$(1+y^2)\,dx=-xy\,dy,$$

$$\frac{dx}{x}=-\frac{y\,dy}{1+y^2},$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{y\,dy}{1+y^2},$$

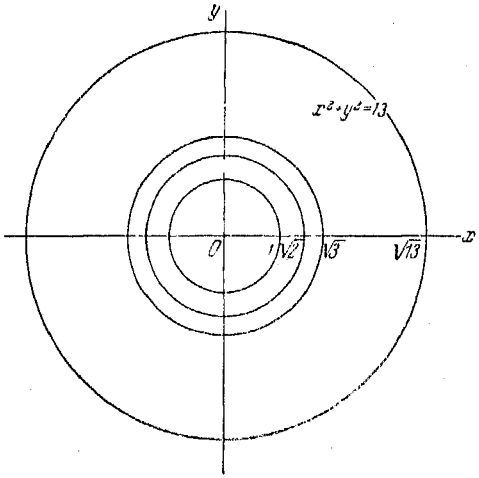
$$\ln|x|=-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+\ln C,$$

$$2\ln|x|+\ln(1+y^2)=\ln C,$$

$$\ln[|x|^2(1+y^2)]=\ln C,$$

$$x^2(1+y^2)=C.$$

Это уравнение определяет y как функцию от x, являющуюся решением данного дифференциального уравнения. Обычно полученное уравнение между x и y не разрешают относительно y (да и не всегда это возможно), но оставляют результат в виде неявной функции.



Черт. 334.

Пример 3.

$$x\,dx+y\,dy=0,$$
$$x\,dx=-y\,dy,$$

$$\int x\,dx=-\int y\,dy,$$

$$\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}y^2+C,$$

или:

$$x^2+y^2=2C.$$

В этом уравнении $2C$ — число, которое обозначим снова через C; тогда получим:

$$x^2+y^2=C.$$

Если в этом уравнении положить

$$C=1,\ C=2,\ C=3,\ \ldots$$

то получим интегральные линии:

$$x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=2,\quad x^2+y^2=3,\ \ldots$$

которые являются окружностями радиусов 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... с центром в начале координат (черт. 334).

Найдём ещё интегральную линию, проходящую через точку M_0 (2, 3). Подставляя $x=2$ и $y=3$ в уравнение $x^2+y^2=C$, получим $2^2+3^2=C$, т. е. $C=13$ и искомая интегральная линия (окружность) определится уравнением:

$$x^2+y^2=13$$

(черт. 334).

Упражнения

391. Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

1) $(1+y^2)\,dx - xy(1+x^2)\,dy = 0$; 3) $y\,dx - x\,dy = 0$;

2) $\frac{2x\,dx}{y^3} + \frac{y}{x}\,dy = 0$; 4) $x\cos y\,dx + e^{-x}dy = 0$

и выделить частное решение, соответствующее следующим начальным условиям:

$$x = -1, \quad y = 5.$$

392. Начертить интегральные линии дифференциального уравнения

$$x\,dy + y\,dx = 0.$$

Выделить интегральные линии, проходящие через точки

$$(2,\ 3) \text{ и } (-2,\ 3).$$

393. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy\,dx + (1+x^2)\,dy = 0.$$

§ 160. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. *Однородной функцией двух аргументов называется функция $P(x, y)$, которая удовлетворяет условию:*

$$P(tx,\ ty) = t^k P(x,\ y). \qquad (1)$$

Например, функции $x+y$, $x^2 - xy + y^2$, $x + y\sin\frac{x}{y}$, $\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{y}}$ однородные, так как, заменяя x и y на tx и ty, получим:

1) $P(tx,\ ty) = tx + ty = t(x+y) = tP(x,\ y)$;

2) $P(tx,\ ty) = (tx)^2 - (tx)(ty) + (ty)^2 = t^2(x^2 - xy + y^2) = t^2P(x,\ y)$;

3) $P(tx,\ ty) = tx + ty\sin\frac{tx}{ty} = t\left(x + y\sin\frac{x}{y}\right) = tP(x,\ y)$;

4) $P(tx,\ ty) = \sqrt{tx} + \frac{tx}{\sqrt{ty}} = t^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{y}}\right) = t^{\frac{1}{2}}P(x,\ v)$.

Функция $x + y^2$ неоднородная, так как, заменяя x и y на tx и ty, мы не получим уравнения вида (1). Если функция однородная, т. е. выполняется равенство (1), то k называется степенью её однородности.

Так, в разобранных выше четырёх примерах первая и третья функции однородные и степень их однородности равна 1, во втором примере степень однородности равна 2, в последнем примере степень однородности равна $\frac{1}{2}$.

Определение. *Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется дифференциальное уравнение вида*

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0,$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции с одной и той же степенью однородности.

Однородные дифференциальные уравнения интегрируются подстановкой $y = xu$, где $u = u(x)$, или $x = uy$, где $u = u(y)$, после которой получается дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 1.

$$(x + y)\,dx + (x - y)\,dy = 0.$$

Здесь $P(x, y) = x + y$, $Q(x, y) = x - y$. Обе функции однородные с показателями однородности, равными 1. Производим подстановку:

$$y = xu, \quad dy = x\,du + u\,dx.$$

Тогда получаем:

$$(x + xu)\,dx + (x - xu)(x\,du + u\,dx).$$

Сокращая на x, получим:

$$(1 + u)\,dx + (1 - u)(u\,dx + x\,du) = 0$$

или, раскрывая скобки,

$$(1 + u)\,dx + (1 - u)\,u\,dx + x(1 - u)\,du = 0,$$
$$(1 + 2u - u^2)\,dx + x(1 - u)\,du = 0.$$

Мы получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его уже известным приёмом:

$$(1 + 2u - u^2)\,dx = -x(1 - u)\,du,$$
$$\frac{dx}{x} = -\frac{1 - u}{1 + 2u - u^2}\,du,$$
$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{(1 - u)\,du}{1 + 2u - u^2},$$
$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|1 + 2u - u^2| + \ln C,$$
$$2\ln|x| = -\ln|1 + 2u - u^2| + \ln C,$$
$$\ln[x^2|1 + 2u - u^2|] = \ln C,$$
$$x^2|1 + 2u - u^2| = C.$$

Но $y = xu$, значит $u = \frac{y}{x}$, и мы получаем:

$$x^2\left|1 + \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right| = C$$

или

$$|x^2 + 2xy - y^2| = C$$

или

$$x^2 + 2xy - y^2 = C.$$

Это уравнение и определяет общее решение данного дифференциального уравнения.

Упражнения

394. Найти общее решение следующих дифференциальных уравнений:

$$(x^2+y^2)\,dx+xy\,dy=0,$$
$$2xy\,dx+(y^2-3x^2)\,dy=0,$$
$$y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$

§ 161. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется дифференциальное уравнение линейное (первой степени) относительно y и y', т. е. уравнение вида:*

$$y'+P(x)y=Q(x). \tag{1}$$

Это дифференциальное уравнение интегрируется подстановкой $y=uv$, где u и v функции x, которые определяются так: из соотношения $y=uv$ находим:

$$y'=uv'+vu'$$

и уравнение (1) принимает вид:

$$uv'+vu'+P(x)\,uv=Q(x),$$
$$vu'+u\,[v'+P(x)\,v]=Q(x).$$

Подбирая какую-нибудь функцию $v(x)$ такую, чтобы

$$v'+vP(x)=0$$

(что легко сделать, так как это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными), мы получим:

$$vu'=Q(x),$$

откуда легко определяется u:

$$u=\int\frac{Q(x)\,dx}{v(x)}+C;$$

зная u и v, находим $y=uv$.

Пример 1.

$$y'+y=x.$$

Полагая $y=uv$, находим:

$$u'v+v'u+uv=x,$$
$$vu'+u(v'+v)=x.$$

Находим v из условия:

$$v' + v = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} + v = 0,$$

$$\frac{dv}{v} = -dx,$$

$$\ln|v| = -x, \quad v = e^{-x}.$$

Подставляя это значение v в уравнение $y' + y = x$, получим:

$$e^{-x}u' = x,$$
$$u' = xe^{x},$$

$$u = \int xe^{x}dx = \int xd(e^{x}) = xe^{x} - \int e^{x}dx = xe^{x} - e^{x} + C;$$

отсюда:

$$y = uv = e^{-x}(xe^{x} - e^{x} + C)$$

или:

$$y = x - 1 + Ce^{-x}$$

— общее решение данного дифференциального уравнения.

Упражнения

395. Проинтегрировать следующие линейные неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка:

1) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$,

2) $y' + x^2y = x^2$,

3) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{1-x^2}y = \dfrac{2x}{1-x^2}$,

4) $\dfrac{dy}{dx} = 3y + \cos x$.

§ 162. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение линейное относительно y, y' и y'', т. е. уравнение*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x). \tag{1}$$

Если правая часть равна нулю:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{2}$$

то уравнение называется однородным (или без правой части). Если в уравнении (1) $P(x) = p$ и $Q(x) = q$ — числа, то уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{3}$$

называется линейным с постоянными коэффициентами, а если при этом ещё правая часть равна нулю:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{4}$$

то уравнение называется линейным однородным 2-го порядка с постоянными коэффициентами. К линейным дифференциальным уравнениям приводят многочисленные задачи, связанные с колебаниями под действием упругих сил, а также ряд вопросов теплопроводности, электропроводности и других разделов физики.

Мы ограничимся интегрированием уравнений вида (3) и (4). Начнём с уравнения (4):

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Произведём в этом уравнении замену неизвестной функции y, полагая

$$y' - \alpha y = z, \tag{5}$$

где z и α некоторые пока неизвестные функции от x; их мы определим ниже. Из (5) находим: $z' = y'' - \alpha y' - \alpha' y$.

Составим выражение

$z' - \beta z = y'' - \alpha y' - \alpha' y - \beta y' + \alpha\beta y = y'' - (\alpha + \beta) y' + (\alpha\beta - \alpha') y$,

где $\beta = \beta(x)$ также пока неизвестная функция от x; её мы также определим ниже.

Подберём теперь α и β так, чтобы

$$\left.\begin{aligned} -(\alpha + \beta) &= p, \\ \alpha\beta - \alpha' &= q. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Тогда

$$z' - \beta z = y'' + py' + qy,$$

и уравнение (4) преобразуется в следующее:

$$z' - \beta z = 0. \tag{7}$$

Итак, интегрирование уравнения $y'' + py' + qy = 0$ сведено к интегрированию системы:

$$\left.\begin{aligned} y' - \alpha y &= z, \\ z' - \beta z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

причём, функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ должны удовлетворять соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} -(\alpha + \beta) &= p, \\ \alpha\beta - \alpha' &= q. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Определим α и β. Из уравнения $-(\alpha + \beta) = p$ имеем: $\beta = -\alpha - p$ и соотношение $\alpha\beta - \alpha' = q$ даёт: $-\alpha' = \alpha^2 + \alpha p + q$, откуда

$$\int \frac{d\alpha}{\alpha^2 + p\alpha + q} = -x. \tag{9}$$

Определив отсюда какую-нибудь одну функцию $\alpha=\alpha(x)$, найдём $\beta(x)=-\alpha(x)-p$. Зная $\beta(x)$, мы сначала проинтегрируем уравнение $z'-\beta z=0$, а затем, зная z и $\alpha(x)$, проинтегрируем уравнение $y'-\alpha y=z$. Оба последних уравнения являются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка и с их интегрированием мы уже знакомы.

Указанный общий метод в ряде случаев упрощается, а именно, посмотрим, в каком случае α и β можно выбрать постоянными; если это возможно, то соотношения (6) принимают вид:

$$-(\alpha+\beta)=p,$$
$$\alpha\beta=q$$

и значит α и β должны быть корнями квадратного уравнения:

$$\lambda^2+p\lambda+q=0. \tag{10}$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением для уравнения (4). Итак, если корни этого уравнения действительны, то α и β можно выбрать постоянными и равными корням этого уравнения. Решение нашей задачи упрощается; рассмотрим три случая:

Случай I. Корни α и β характеристического уравнения (10) действительны и различны. Тогда, полагая $\alpha=\lambda_1$, $\beta=\lambda_2$, находим:

$$z'-\lambda_2 z=0,$$
$$\frac{z'}{z}=\lambda_2,$$
$$\ln z=\lambda_2 x+\ln C,$$
$$z=e^{\lambda_2 x+\ln C}=Ce^{\lambda_2 x}$$

и далее

$$y'-\lambda_1 y=Ce^{\lambda_2 x};$$

полагая

$$y=uv,$$

находим:

$$u'v+v'u=\lambda_1 uv=Ce^{\lambda_2 x},$$
$$u'v+u(v'-\lambda_1 v)=Ce^{\lambda_2 x},$$
$$v'-\lambda_1 v=0,\quad v=e^{\lambda_1 x},$$
$$u'\cdot e^{\lambda_1 x}=Ce^{\lambda_2 x},$$
$$u'=Ce^{\lambda_2 x-\lambda_1 x},$$

$$u=\frac{C}{\lambda_2-\lambda_1}e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}+C_1=C_1+C_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)x};$$

отсюда

$$y=uv=e^{\lambda_1 x}(C_1+C_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)x})$$

или

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}.$$

Случай II. Корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (10) равны: $\lambda_1 = \lambda_2$.

В этом случае имеем

$$z' - \lambda_1 z = 0,$$
$$z = C_1 e^{\lambda_1 x},$$
$$y' - \lambda_1 y = C_1 e^{\lambda_1 x},$$
$$y = uv,$$
$$u'v + v'u - \lambda_1 uv = C_1 e^{\lambda_1 x},$$
$$u'v + u(v' - \lambda_1 v) = C_1 e^{\lambda_1 x},$$
$$v' - \lambda_1 v = 0, \quad v = e^{\lambda_1 x},$$
$$u' e^{\lambda_1 x} = C_1 e^{\lambda_1 x},$$
$$u' = C_1,$$
$$u = C_1 x + C_2,$$
$$y = uv = (C_1 x + C_2)\, e^{\lambda_1 x}.$$

Случай III. Корни $\lambda_1 = \xi + \eta i$, $\lambda_2 = \xi - \eta i$ характеристического уравнения — мнимые. В этом случае применим общий метод, указанный выше: имеем:

$$-p = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\xi, \quad q = \lambda_1 \lambda_2 = \xi^2 + \eta^2$$

и значит соотношение (9) примет вид:

$$\int \frac{d\alpha}{\alpha^2 - 2\xi\alpha + \xi^2 + \eta^2} = -x,$$
$$\int \frac{d\alpha}{(\alpha - \xi)^2 + \eta^2} = -x,.$$
$$\frac{1}{\eta} \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha - \xi}{\eta} = -x,$$

откуда

$$\alpha = \xi - \eta \operatorname{tg} \eta x,$$

и значит

$$\beta = -p - \alpha = 2\xi - \alpha = \xi + \eta \operatorname{tg} \eta x.$$

Система (6) принимает вид:

$$y' - (\xi - \eta \operatorname{tg} \eta x)\, y = z,$$
$$z' - (\xi + \eta \operatorname{tg} \eta x)\, z = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим:

$$\frac{z'}{z} = \xi + \eta \operatorname{tg} \eta x,$$
$$\ln z = \xi x - \ln \cos \eta x + \ln C,$$
$$z = e^{\xi x - \ln \cos \eta x + \ln C} = \frac{C e^{\xi x}}{\cos \eta x},$$

Далее:

$$y' - (\xi - \eta \operatorname{tg} \eta x) y = \frac{Ce^{\xi x}}{\cos \eta x},$$

$$y = uv,$$

$$u'v + v'u - (\xi - \eta \operatorname{tg} \eta x) uv = \frac{Ce^{\xi x}}{\cos \eta x},$$

$$v' - (\xi - \eta \operatorname{tg} \eta x) v = 0,$$

$$\frac{v'}{v} = \xi - \eta \operatorname{tg} \eta x,$$

$$\ln v = \xi x + \ln \cos \eta x,$$

$$v = e^{\xi x + \ln \cos \eta x} = e^{\xi x} \cos \eta x,$$

$$u' \cos \eta x \cdot e^{\xi x} = \frac{Ce^{\xi x}}{\cos \eta x},$$

$$u' = \frac{C}{\cos^2 \eta x}, \quad u = C\eta \operatorname{tg} \eta x + C_1 = C_1 + C_2 \operatorname{tg} \eta x;$$

$$y = uv = e^{\xi x} \cdot \cos \eta x (C_1 + C_2 \operatorname{tg} \eta x) = e^{\xi x} (C_1 \cos \eta x + C_2 \sin \eta x).$$

Итак,

I. *Если корни* λ_1 и λ_2 *характеристического уравнения*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

действительны и различны, то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$ *второго порядка имеет вид*:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

где C_1 *и* C_2 — *произвольные числа.*

II. *Если корни* λ_1 *и* λ_2 *характеристического уравнения* $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ *равны*: $\lambda_1 = \lambda_2$, *то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения* $y'' + py' + qy = 0$ *второго порядка имеет вид*:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x},$$

где C_1 *и* C_2 — *произвольные числа.*

III. *Если корни* $\lambda_1 = \xi + \eta i$ *и* $\lambda_2 = \xi - \eta i$ *характеристического уравнения* $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ — *мнимые, то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения* $y'' + py' + qy = 0$ *второго порядка имеет вид*: $y = e^{\xi x} \cdot (C_1 \cos \eta x + C_2 \sin \eta x)$, *где* C_1 *и* C_2 — *произвольные числа.*

Мы видим, что решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами зависит от двух произвольных чисел C_1 и C_2. Если задать значения y и производной y' для некоторого значения $x = x_0$, а именно, положить, что

$$y = y_0, \; y' = y'_0 \qquad \text{при } x = x_0,$$

то это даёт возможность определить постоянные C_1 и C_2, т. е. мы получим определённое (частное) решение уравнения. Геометрически задание x_0 и y_0 означает, что на плоскости задаётся точка $M_0(x_0, y_0)$, а задание y_0' равносильно заданию углового коэффициента касательной к кривой, значит: через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости в данном направлении (определяемом угловым коэффициентом y_0') проходит единственная интегральная линия. Если истолковывать x как время, а y как путь, то y' — будет скорость, и мы можем сказать, что если движение происходит по закону, приводящему к однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, то движение будет полностью определено (т. е. y будет вполне определённой функцией от времени x), если для любого момента времени $x = x_0$ задан пройденный путь: $y = y_0$ и скорость $y' = y_0'$. С этим мы встретимся в дальнейшем.

Пример 1.
$$y'' - 4y' + 3y = 0,$$
$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$
$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1,$$
$$y = C_1e^{3x} + C_2e^x.$$

Пример 2.
$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$
$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2,$$
$$y = (C_1 + C_2x)e^{2x}.$$

Пример 3. $y'' + y' + y = 0$,
$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0, \ \lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$
$$\xi = -\frac{1}{2}, \ \eta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_2 \sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$$

Рассмотрим ещё задачи конкретного содержания.

Пример 4. К тонкой нерастяжимой нити подвешен груз, масса которого равна m. Груз выводится из положения равновесия, а затем предоставляется действию силы тяжести. (Математический маятник.) Найти закон колебания. Всеми сопротивлениями пренебрегаем.

Решение. В каждый момент на груз m действует сила mg. Разложим эту силу на две: одну по направлению нити, другую по направлению, перпендикулярному нити. Сила по направлению нити уравновесится её натяжением, а составляющая сила, направленная перпендикулярно нити, будет возвращать груз в положение равновесия. Величина этой силы равна $mg \sin\alpha$ или, при малых отклонениях, $mg\alpha$, так как для малых углов α можно приближённо считать равным $\sin\alpha$, т. е. $\alpha \approx \sin\alpha$. Обозначим длину нити через l, а длину AB отклонения через y. Тогда $\alpha = \frac{y}{l}$ и для абсолютной величины силы F, возвращающей груз в положение равновесия, мы получим:
$$(F) = \frac{mg\,|y|}{l}.$$

При малых отклонениях дугу AB можно считать за прямую. Ясно, что сила F всегда направлена к положению равновесия A маятника, т. е. если маятник находится справа от A, то сила направлена влево, а если маятник находится влево от A, то сила будет направлена вправо. Но если точка B расположена вправо от A, то $y>0$, если точка B расположена влево от A, то $y<0$. Значит проекция силы F на ось Oy будет <0, если $y>0$ и будет >0, если $y<0$, т. е.

$$F=-\frac{mgy}{l}.$$

По закону Ньютона сила F равна массе движущейся точки, умноженной на ускорение:

$$F=mw,$$

а ускорение w равно второй производной от y по времени:

$$w=y'',$$

значит:

$$my''=-\frac{mgy}{l},$$

или

$$y''+\frac{g}{l}y=0.$$

Мы получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для решения его составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2+\frac{g}{l}=0;$$

его корни — мнимые:

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{g}{l}}\,i, \quad \lambda_2=-\sqrt{\frac{g}{l}}\,i.$$

Значит, общее решение может быть записано так:

$$y=C_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)+C_2\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$$

или

$$y=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\left[\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)+\frac{C_2}{\sqrt{C_2^2+C_2^2}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)\right].$$

Полагая $\dfrac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}=\cos\varphi$, $\quad \dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}=\sin\varphi$, $\quad \sqrt{C_1^2+C_2^2}=A$,

получим:

$$y=A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\varphi\right).$$

Для определения постоянных A и φ заметим, что при $t=0$, $y=a$ (a — величина, на которую был вначале отклонён маятник) и $y'=0$ (y' есть скорость маятника, и мы предполагаем, что начальная скорость равна нулю). Так как:

$$y'=A\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\varphi\right),$$

то при $t=0$ получаем: $A\sin\varphi=a$,

$$A\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\varphi=0.$$

Из этих уравнений находим: $\cos\varphi=0$, $y=\frac{\pi}{2}$, значит $A\sin\frac{\pi}{2}=a$ или $A=a$. Подставляя эти значения A и φ в найденное решение, будем иметь:

$$y=a\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\frac{\pi}{2}\right)$$

или:

$$y=a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right).$$

Таков закон колебаний математического маятника. При возрастании t, $\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$ будет периодически изменяться, следовательно, и y будет периодически изменяться, т. е. маятник будет совершать колебательное движение. Ясно, что y будет изменяться между $-a$ и a, так как $\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$ изменяется от -1 до $+1$. При $y=-a$ маятник будет занимать крайнее левое положение, при $y=a$ — крайнее правое. Если t мы увеличим на $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, то получим:

$$\cos\left[\sqrt{\frac{g}{l}}\left(t+2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)\right]=\cos\left[\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+2\pi\right]=\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right),$$

т. е. аргумент косинуса увеличится на 2π, $\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$ не изменится и при дальнейшем течении времени будет повторять свои значения. Иначе говоря, через время t, равное:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

маятник совершит полный период колебания (эта формула выводится в курсах элементарной физики).

Пример 5. Рассмотрим колебание маятника в сопротивляющейся среде.

Предположим, что сопротивление пропорционально скорости $\frac{dy}{dt}$ и направлено в сторону, противоположную скорости, т. е. сила сопротивления

$$f=-k\frac{dy}{dt},$$

где $-k$ отрицательный коэффициент пропорциональности.

Теперь уравнение

$$my''=-\frac{mgy}{l},$$

рассмотренное нами в предыдущем примере, перепишется так:

$$my''=-\frac{mgy}{l}-ky'$$

или:

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где

$$p = \frac{k}{m}, \qquad q = \frac{g}{l}.$$

Мы пришли к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Отметим, что в нём $q > 0$ и $p > 0$; это в дальнейшем будет иметь значение. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Если его корни λ_1 и λ_2 действительны и различны, то они отрицательны: $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$ (в силу того, что $p > 0$ и $q > 0$). Решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t};$$

для определения C_1 и C_2 допустим, что в начальный момент времени ($t = 0$) маятник отклонён от положения равновесия на величину $y = a$, а начальная его скорость y':

$$y' = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

равна нулю. Итак,

$$\text{при } t = 0, \quad y = a, \quad y' = 0$$

или

$$a = C_1 + C_2, \quad 0 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2;$$

отсюда находим C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{a\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 = \frac{-a\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

и, значит,

$$y = \frac{a}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}\right).$$

Предположим, что $\lambda_2 > \lambda_1$. Найдём y':

$$y' = \frac{a\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right).$$

Нетрудно видеть, что в силу условия $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ мы будем иметь $y' < 0$, а значит y с течением времени будет убывающей функцией времени, и так как $\lim\limits_{t=+\infty} y = 0$, то в рассматриваемом случае с возрастанием времени маятник будет медленно возвращаться в положение равновесия. Отметим, что случай этот с физической точки зрения означает, что p достаточно велико $\left(\frac{p^2}{4} - q > 0\right)$, а так как p связано с коэффициентом пропорциональности — k, указывающим на величину силы сопротивления, то в рассмотренном случае сопротивление достаточно велико (например — маятник, отклонённый из положения равновесия в достаточно вязкой жидкости, не будет совершать колебаний, а будет медленно возвращаться в положение равновесия).

В случае мнимых корней $\lambda_1 = \xi + \eta i$, $\lambda_2 = \xi - \eta i$ характеристического уравнения общее решение имеет вид:

$$y = e^{\xi t}\left(C_1 \cos \eta t + C_2 \sin \eta t\right)$$

или

$$y = e^{\xi t}\, a \sin(\eta t + \varphi),$$

где

$$a=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\ \cos\varphi=\frac{C_2}{a},\quad \sin\varphi=\frac{C_1}{a},$$

причём опять в силу того, что

$$0<p=-(\lambda_1+\lambda_2)=-2\xi,$$

мы будем иметь: $\xi<0$ *).

Характер движения ясен: маятник будет совершать колебания, ибо в выражении для y есть множитель $\sin(\eta t+\varphi)$, изменяющий знак y при возрастании времени t, но, как говорят, затухающие, ибо амплитуда $ae^{\xi t}$ с течением времени убывает (в силу того, что $\xi<0$); размахи колебаний маятника будут становиться всё меньше и меньше. Этот случай $\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$ соответствует достаточно малым значениям p, т. е. достаточно малому сопротивлению — например, маятник, качающийся в воздухе, испытывает незначительное сопротивление воздуха; это как раз и соответствует случаю мнимых корней и ясно, что такой маятник совершает затухающие колебания, размахи его колебаний всё время убывают.

Упражнения

396. Найти общие решения следующих дифференциальных уравнений:

1) $y''-8y'+7y=0$,
2) $y''-3y'+10y=0$,
3) $y''-4y'+13y=0$,
4) $y''+y'+y=0$,
5) $y''+y=0$,
6) $y''-y=0$,
7) $y''+y'+8y=0$,
8) $y''+6y'+9y=0$,
9) $y''+10y'+25y=0$,
10) $y''+2y'+y=0$.

Теперь перейдём к интегрированию линейного неоднородного (с правой частью) дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y''+py'+qy=f(x). \tag{3}$$

Прежде всего отметим, что метод, изложенный для решения линейного однородного уравнения без всяких изменений переносится и сюда. Однако при этом приходится преодолевать довольно утомительные выкладки. Мы поэтому укажем на соображение, которое хотя полностью и не даёт решения вопроса, но для практических целей вполне достаточно (именно для интегрирования тех линейных уравнений второго порядка с правой частью, с которыми читатель столкнётся в физике при изучении колебаний под действием упругих сил).

Предположим, что нам удалось найти какое-нибудь одно, как говорят, частное решение уравнения (3):

$$y=y_1(x),$$

т. е.

$$y_1''+py_1'+qy_1\equiv f(x).$$

*) Числа C_1 и C_2 или a и φ определяются, как и в первом случае, из начальных условий: при $t=0$ имеем $y=a$, $y'=0$. Рекомендуется читателю получить значения C_1 и C_2.

Вычитая из уравнения (3) это тождество, мы, конечно, получим новое дифференциальное уравнение:

$$y''-y_1''+p(y'-y_1')+q(y-y_1)=0$$

или

$$(y-y_1)''+p(y-y_1)'+q(y-y_1)=0,$$

эквивалентное начальному. Полагая $y-y_1=z$, получим:

$$z''+pz'+qz=0,$$

т. е. уже изученное дифференциальное уравнение (однородное дифференциальное с постоянными коэффициентами). Решив его, мы найдём y из соотношения $y-y_1=z$; именно: $y=y_1+z$.

Таким образом, *общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения* $y''+py'+qy=f(x)$ *второго порядка есть сумма какого-нибудь его частного решения:* $y=y_1(x)$ *и общего решения линейного однородного дифференциального уравнения*

$$z''+pz'+qz=0,$$

соответствующего данному неоднородному.

Как же отыскивать частные решения уравнения (3)? На этот-то вопрос мы и не дадим полного ответа, а укажем (без доказательства), как находится частное решение уравнения

$$y''+py'+qy=f(x)$$

для некоторых функций $f(x)$ (случаи, наиболее часто встречающиеся в приложениях).

1. Если $f(x)=e^{ax}P(x)$, где $P(x)$ — данный многочлен степени n, и a не является корнем характеристического уравнения $\lambda^2+p\lambda+q=0$, то частное решение следует искать в виде: $y_1=e^{ax}Q(x)$, где $Q(x)$ — некоторый неизвестный многочлен степени n. Если же a — корень характеристического уравнения кратности r ($r=1$ или $r=2$), то частное решение следует искать в виде:

$$y_1=x^re^{ax}\,Q(x).$$

2. В более общем случае: если $f(x)=e^{ax}(P_1(x)\cos bx+P_2(x)\sin bx)$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — данные многочлены и n — наивысшая степень одного из них, то если $a+bi$ не есть корень характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде:

$$y_1=e^{ax}\,[Q_1(x)\cos bx+Q_2(x)\sin bx],$$

где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ — неизвестные многочлены n-й степени. Если же $a+bi$ — корень характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде:

$$y_1=xe^{ax}\,[Q_1(x)\cos bx+Q_2(x)\sin bx].$$

Таким образом, вопрос о нахождении частного решения сводится к отысканию коэффициентов неизвестных полиномов $Q(x)$, $Q_1(x)$,

$Q_2(x)$. Определяя y_1' и y_1'' и подставляя полученные для них выражения в левую часть уравнения

$$y''+py'+qy=f(x),$$

мы получим после упрощения в левой и правой части суммы функций вида

$$x^k e^{ax}\cos bx \quad \text{и} \quad x^k e^{ax}\sin bx$$

(в этом читатель убедится ниже на примерах), приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях упомянутого равенства, мы получим систему уравнений, из которых всегда определим неизвестные коэффициенты; тем самым частное решение будет найдено, а в этом, как мы видели, и состоит отличие интегрирования неоднородного уравнения от однородного.

Сказанное поясним примерами:

Пример 5. $y''+y'-12y=24$. Здесь правая часть $C=24$. Ищем частное решение в виде $y=a$, где a — число. Если $y=a$, то $y'=0$, $y''=0$. Подставляя это в данное уравнение, получим: $-12a=24$, откуда $a=-2$. Теперь находим общее решение однородного дифференциального уравнения $z''+z'-12z=0$, соответствующего данному неоднородному. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2+\lambda-12=0$; решая его, получим: $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-4$. Общее решение однородного уравнения: $z=C_1e^{3x}+C_2e^{-4x}$, а неоднородного:

$$y=-2+C_1e^{3x}+C_2e^{-4x}.$$

Пример 6. $y''+6y'+10y=1-x$. Здесь правая часть $P(x)=1-x$, следовательно, частное решение следует искать в виде $f(x)=ax+b$.

Находим: $f'(x)=a$, $f''(x)=0$. Подставляя в данное уравнение $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$, вместо y'', y', y, получим $6a+10(ax+b)=1-x$ или $6a+10ax+10b=1-x$; приравнивая коэффициенты при x и свободные члены, получим: $10a=-1$, $6a+10b=1$, откуда $a=-0{,}1$; $b=0{,}16$.

Частное решение: $y_1=-0{,}1x-0{,}16$. Теперь находим общее решение однородного дифференциального уравнения $z''+6z'+10z=0$, соответствующего данному неоднородному. Имеем:

$$\lambda^2+6\lambda+10=0,\ \lambda=-3\pm\sqrt{9-10}=-3\pm i. \quad \text{Здесь:} \quad \xi=-3, \quad \eta=1.$$

Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$z=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x),$$

а общее решение данного неоднородного:

$$y=-0{,}1x+0{,}16+e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

Пример 7. $y''+4y'+4y=3xe^{2x}$. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2+4\lambda+4=0$ однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному. Это уравнение имеет равные корни $\lambda_1=\lambda_2=-2$.

Частное решение ищем в виде: $y_1=(ax+b)e^{2x}$, так как 2 не есть корень характеристического уравнения. Находим:

$$y'_1=ae^{2x}+2(ax+b)e^{2x}=(2ax+2b+a)e^{2x},$$
$$y''_1=2ae^{2x}+2(2ax+2b+a)e^{2x}=(4ax+4b+4a)e^{2x},$$

Подставляя в данное уравнение, получим:

$$e^{2x}(4ax+4b+4a)+4(2ax+2b+a)e^{2x}+4(ax+b)\ e^{2x}=3xe^{2x}.$$

Сокращая на e^{2x}, получим:

$$4ax+4b+4a+8ax+8b+4a+4ax+4b=3x,$$
$$16ax+16b+8a=3x,\quad 16a=3,\quad 18b+8a=0,$$
$$a=\frac{3}{16},\quad b=-\frac{1}{12}.$$

Частное решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_1=\left(\frac{3}{16}x-\frac{1}{12}\right)e^{2x},$$

а общее решение:

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\left(\frac{3}{16}x-\frac{1}{12}\right)e^{2x}.$$

Пример 8. $y''+5y'-14y=3xe^{2x}$. Имеем $\lambda^2+5\lambda-14=0$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-7$. Здесь $\lambda=2$, есть простой корень характеристического уравнения, значит частное решение надо искать в виде

$$y_1=x(ax+b)e^{2x}.$$

Находим:

$$y_1=(ax^2+bx)e^{2x},$$
$$y'_1=(2ax^2+2ax+2bx+b)e^{2x},$$
$$y''_1=(4ax^2+8ax+4bx+2a+4b)e^{2x}.$$

Подставляя y_1, y'_1, y''_1 вместо y, y', y'' в данное дифференциальное уравнение, получим:

$$(4ax^2+8ax+4bx+2a+4b)e^{2x}+5(2ax^2+2ax+2bx+b)e^{2x}-$$
$$-14(ax^2+bx)e^{2x}=3xe^{2x}.$$

Сокращая на e^{2x}, получим:

$$4ax^2+8ax+4bx+2a+4b+10ax^2+10ax+10bx+5b-14ax^2-14bx=3x,$$
$$18ax+2a+9b=3x,$$

откуда

$$18a=3,\quad a=\frac{1}{6},\quad 2a+9b=0,\quad b=-\frac{1}{27}.$$

Частное решение:

$$y_1=x\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{27}\right)e^{2x}.$$

Общее решение:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-7x}+x\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{27}\right)e^{2x}.$$

Пример 9. $y''+4y=\cos 3x$. Характеристическое уравнение для однородного уравнения: $z''+4z=0$ имеет вид: $\lambda^2+4=0$. Его корни: $\lambda_1=2i$, $\lambda_2=-2i$, $\xi+\eta i=3i$ — не есть корень характеристического уравнения. Частное решение ищем в виде:

$$y_1=a\cos 3x+b\sin 3x;$$

находим:

$$y'_1=-3a\sin 3x+3b\cos 3x;\quad y''_1=-9a\cos 3x-9b\sin 3x.$$

Подставляя в данное уравнение, получим:

$$-9a\cos 3x-9b\sin 3x+4(a\cos 3x+b\sin 3x)=\cos 3x,$$
$$-5a\cos 3x-5b\sin 3x=\cos 3x,$$
$$-5a=1,\ a=-\frac{1}{5},\quad -5b=0,\quad b=0.$$

Частное решение:

$$v_1=-\frac{1}{5}\cos 3x.$$

Общее решение:

$$v=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{5}\cos 3x.$$

Пример 10. $y''+y=\sin x$. Характеристическое уравнение для однородного уравнения $z''+z=0$ имеет вид:

$$\lambda^2+1=0.$$

Его корни: $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$. Далее i — корень характеристического уравнения. Ищем частное решение в виде:

$$y_1=x(a\cos x+b\sin x).$$

Находим:

$$y_1'=a\cos x+b\sin x+x(-a\sin x+b\cos x),$$
$$y_1''=-2a\sin x+2b\cos x+x(-a\cos x-b\sin x).$$

Подставляя в данное уравнение, будем иметь:

$$-2a\sin x+2b\cos x+x(-a\cos x-b\sin x)+x(a\cos x+b\sin x)=\sin x$$

или

$$-2a\sin x+2b\cos x=\sin x,$$
$$-2a=1,\ a=-\frac{1}{2},\quad 2b=0,\quad b=0;$$

частное решение:

$$y_1=-\frac{1}{2}x\cos x.$$

Общее решение:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x.$$

Упражнения

397. Решить следующие дифференциальные уравнения:

1) $y''-2y'+3y=6$,
2) $y''-7y'+5y=x^2$,
3) $y''-2y'+y=e^x$,
4) $y''-y=\cos x$,
5) $y''+y'+y=e^x\sin x$,
6) $y''+4y'+4y=x^2e^{2x}$,
7) $y''-2y=x$,
8) $y''+12y'+36y=xe^{-6x}$,
9) $y''+12y'+40y=e^{-6x}\cos 2x$,
10) $y''+2y'+y=x\sin x$.

ГЛАВА XXI

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 163. Числовой ряд

Пусть дана последовательность чисел

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

Определение. *Числовым рядом*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

называется последовательность:

$$s_1 = u_1, \; s_2 = u_1 + u_2, \; s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots, \; s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \ldots;$$

числа $u_1, u_2, u_3, \ldots$ *называются членами ряда, а суммы* $s_1, s_2, s_3, \ldots$ — *частичными суммами этого ряда.*

Например, из последовательности

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{3^{n-1}}, \ldots$$

можно составить ряд

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}} + \ldots,$$

частичными суммами которого будут:

$$s_1 = 1, \; s_2 = 1 + \frac{1}{3}, \; s_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}, \ldots, \; s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}}, \ldots$$

Определение. *Предел частичных сумм* s_n *(если этот предел существует) называется суммой ряда, а ряд называется сходящимся. Если* s_n *не имеет предела, или имеет предел* $+\infty$ *или* $-\infty$, *то ряд называется расходящимся к* $+\infty$ *(или расходящимся к* $-\infty$*).*

В школьном курсе математики мы встречаемся с рядами в прогрессиях. Пусть дана бесконечная геометрическая прогрессия

$$a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, \ldots \qquad (1)$$

Составим из этой последовательности ряд:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots,$$

частичные суммы этого ряда:

$s_1 = a,\ s_2 = a + aq,\ s_3 = a + aq + aq^2,\quad s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}, \ldots$

Пусть $a \neq 0$. Если $|q| < 1$, то прогрессия убывает и мы имеем:

$$\lim s_n = \lim \frac{a - aq^n}{1-q} = \lim \frac{a}{1-q} - \lim \frac{aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \lim q^n.$$

Но $\lim\limits_{n=+\infty} q^n = 0$ (так как $|q| < 1$). Следовательно,

$$\lim s_n = s = \frac{1}{1-q}.$$

Итак, ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \tag{2}$$

сходится при $|q| < 1$ и сумма его s равна $\frac{a}{1-q}$. Это известная формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Если $|q| > 1$, то q^n не имеет предела при $n = +\infty$, и ряд расходится. Если $q = 1$, то наш ряд обращается в следующий:

$$a + a + a + \ldots a + \ldots,$$

т. е.

$$s_1 = a,\ s_2 = 2a,\ s_3 = 3a, \ldots s_n = na, \ldots$$

Имеем: $\lim s_n = +\infty$, если $a > 0$ и $\lim s_n = -\infty$, если $a < 0$. И в этих случаях s_n не имеет предела, т. е. ряд расходится (к $+\infty$ или к $-\infty$). Если $q = -1$, то при $a \neq 0$, получим:

$$a - a + a - a + \ldots + a - a + \ldots,$$

т. е.

$$s_1 = a,\ s_2 = 0,\ s_3 = a,\ s_4 = 0, \ldots,\ s_{2n-1} = a,\ s_{2n} = 0, \ldots$$

Эта последовательность расходится, т. е. ряд $a - a + a - a + \ldots$ расходится ($a \neq 0$).

Если же $a = 0$, то независимо от значений q имеем:

$$s_1 = 0,\ s_2 = 0,\ s_3 = 0, \ldots,\ s_n = 0, \ldots,$$

т. е. ряд сходится к числу 0.

Итак, геометрическая прогрессия при $a \neq 0$ сходится для всех значений q из интервала $(-1, 1)$ и расходится для всех значений q, не лежащих в этом интервале (числа -1 и 1 также принадлежат к значениям, не лежащим в интервале).

Если $a = 0$, то ряд сходится для всех значений q.

Если ряд сходится к числу s, то пишут

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + , \ldots$$

при этом нужно помнить, что сумма s сходящегося ряда есть результат двух операций:

1. Суммирования, при котором мы находим частичные суммы s_n.

2. Перехода к пределу, при котором мы находим предел частичных сумм s_n, т. е. находим сумму ряда.

Пример 1. Доказать, что ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots \qquad (3)$$

сходится, и найти его сумму.

Решение. Имеем:

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Число $\frac{1}{k(k+1)}$ можно представить так:

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Следовательно,

$$s_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Отсюда

$$\lim s_n=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1=s.$$

Окончательно: ряд сходится к 1.

Пример 2. Ряд

$$1-1+1-1+\ldots+1-1+\ldots \qquad (4)$$

расходится, так как последовательность его частичных сумм имеет вид:

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ldots,1,\ 0,\ldots,$$

а эта последовательность расходится.

Пример 3. Ряд

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots \qquad (5)$$

расходится, ибо

$$s_n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Пример 4. Ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

называемый гармоническим, расходится к $+\infty$.

Решение. Последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$, возрастающая, имеет предел $e=2{,}718\cdots$ Следовательно,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e.$$

Логарифмируя обе части неравенства при основании e, получим:

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\ln e=1$$

или

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

Так как

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n,$$

то имеем
$$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.$$
Подставляя в это неравенство вместо n числа 1, 2, 3, ..., n, получим:
$$\ln 2-\ln 1<\frac{1}{1},$$
$$\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.$$
Сложив полученные неравенства, находим:
$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=s_n.$$
Если N — любое число, то найдётся n_0 такое, что $\ln(n_0+1)=N$. При $n>n_0$ мы будем иметь $s_n>N$, следовательно, s_n расходится к $+\infty$.

Пусть дан сходящийся ряд
$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$
и пусть s его сумма, т. е.
$$s=\lim s_n. \tag{6}$$
Это означает, что для любого положительного числа ε найдётся такое N, что для всех $n>N$ будет
$$|s_n-s|<\varepsilon.$$
Иначе говоря, s_n может быть сделано сколь угодно близким к s для всех достаточно больших значений n. Следовательно, частичная сумма s_n ряда может служить приближённым значением для суммы s, причём с любой степенью точности, для этого нужно лишь взять достаточно много слагаемых. Разность $s-s_n$ характеризует ошибку этого приближения. Эта разность называется **остаточным членом ряда**.

Определение. *Остаточным членом R_n сходящегося ряда называется разность между суммой s ряда и частичной суммой s_n его n первых членов*:
$$R_n=s-s_n. \tag{7}$$
Предел достаточного члена равен нулю:
$$\lim R_n=\lim(s-s_n)=s-\lim s_n=s-s=0.$$
Обращаем внимание на то, что об остаточном члене можно говорить лишь тогда, когда ряд сходится. Если ряд расходится, то нельзя говорить о сумме s ряда и, следовательно, равенство (7), определяющее остаточный член, теряет смысл.

Пусть дан ряд (1) и мы каким-либо образом узнали, что он сходится. Вычисление суммы s ряда может оказаться сложным или даже невозможным с помощью элементарных операций. Ограничившись его частичной суммой s_n, мы получим приближённое значение s. На основании предыдущего может показаться, что вычисление остаточного члена R_n полностью выяснит картину этого приближения, так как R_n и есть та ошибка, которую мы при этом сделали. На самом же деле задача вычисления R_n столь же сложна, как и задача вычисления s; по существу это одна и та же задача. Это разъясняется следующей теоремой:

Теорема. *Остаточный член R_n сходящегося ряда есть сумма ряда*

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\dots \tag{8}$$

Доказательство. Зафиксируем число n. Частичную сумму p первых членов ряда обозначим через s_{n+p}. Имеем

$$\begin{aligned} s=\lim_{p=+\infty} s_{n+p} &= \lim_{p=+\infty} [s_n+(u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p})]= \\ &= s_n+\lim_{p=+\infty}(u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p}) \end{aligned}$$

(так как n зафиксировано, то s_n является определённым числом $\lim\limits_{p=+\infty} s_n=s_n$). Но, с другой стороны, по определению R_n, имеем:

$$s=s_n+R_n.$$

Следовательно,

$$R_n=\lim_{p=+\infty}(u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p}),$$

т. е. R_n есть предел частичной суммы ряда (8), а это и означает, что R_n есть сумма ряда (8), ч. т. д.

Например, для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $a+aq+aq^2+\dots+aq^{n-1}+\dots$, где $|q|<1$, имеем:

$$s_n=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q},$$

$$s=\frac{a}{1-q},$$

$$R_n=s-s_n=\frac{aq^n}{1-q}=aq^n+aq^{n+1}+\dots+aq^{n+p}+\dots$$

Практически вычисление суммы ряда (1), т. е. числа s, и суммы ряда (8), т. е. числа R_n, по трудности ничем не отличаются друг от друга. Ведь трудность заключается не в нахождении суммы s_n конечного числа слагаемых, а в предельном переходе, а он одинаков при вычислении s и R_n, так как они отличаются только на s_n.

Упражнения

398. Найти суммы рядов

$$1)\ \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$$

$$2)\ \frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}+\ldots,$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ являются членами арифметической прогрессии с разностью d.

$$3)\ \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots$$

$$4)\ \frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}+\ldots$$

§ 164. Некоторые свойства числовых рядов

Нахождение суммы ряда связано не только с операцией обычного суммирования (нахождение s_n), но и с предельным переходом; этим объясняется то, что с рядами нельзя, вообще говоря, обращаться как с многочленами. Поясним сказанное на примерах.

Пример 1. Ряд.

$$1-1+1-1+\ldots+1-1+\ldots$$

расходится. Сгруппируем члены ряда так:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots$$

Получим сходящийся ряд

$$0+0+0+\ldots+0+\ldots,$$

сумма которого равна 0. Сгруппируем члены этого же ряда так:

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots-(1-1)-\ldots;$$

получим сходящийся ряд

$$1-0-0-0-\ldots-0-\ldots,$$

сумма которого равна 1.

Переставив и сгруппировав члены этого ряда так:

$$(1+1+1+1+1)+(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots,$$

получим сходящийся ряд

$$5+0+0+0+\ldots+0+\ldots,$$

сумма которого равна 5.

Пример 2. Рассмотрим два ряда

$$1-1+1-1+\ldots+1-1+\ldots$$
$$-1+1-1+1-\ldots-1+1-\ldots$$

Оба они расходятся. Складывая их почленно, получим сходящийся ряд

$$0+0+0+0+\ldots+0+0+\ldots,$$

сумма которого равна 0.

Из этих примеров видно, как опасно механически переносить на ряды свойства сумм конечного числа слагаемых. Всё же некоторые свойства обычных сумм сохраняются и для рядов. Более того, имеется класс рядов, с которыми можно во многом обращаться как с целыми рациональными функциями: переставлять члены, группировать их в каком угодно порядке, складывать, вычитать, умножать, делить по правилам элементарной алгебры. Об этом важном классе рядов будет сказано ниже.

Теорема 1. *Если ряд*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

сходится к s, *то ряд*

$$Cu_1 + Cu_2 + \ldots + Cu_n + \ldots, \tag{2}$$

полученный из предыдущего умножением всех его членов на число C, *также сходится и имеет сумму* Cs.

Доказательство. Обозначим через s_n частичную сумму ряда (1), а через σ — частичную сумму ряда (2); имеем:

$$\sigma_n = Cu_1 + Cu_2 + \ldots + Cu_n = C(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = Cs_n;$$

переходя к пределу, получим:

$$\lim \sigma_n = \lim (Cs_n) = C \lim s_n = Cs,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Сходящиеся ряды можно складывать: если ряды*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{3}$$
$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{4}$$

сходятся и суммы их равны соответственно s' *и* s'', *то ряды*

$$(u_1 + v_1) + (v_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots$$
$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \ldots + (u_n - v_n) + \ldots$$

также сходятся и суммы их s и σ равны $s' + s''$ и $s' - s''$.

Доказательство. Обозначим частичные суммы данных рядов через s_n' и s_n'', а частичную сумму ряда $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n)$ через σ_n. Имеем:

$$\sigma_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n) =$$
$$= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = s_n' + s_n''.$$

Группировать члены в сумме σ_n мы имеем право, так как σ_n есть сумма конечного числа слагаемых (т. е. сумма в смысле элементарной арифметики).

Переходя к пределу, получим;

$$\lim \sigma_n = \lim (s_n' + s_n'') = \lim s_n' + \lim s_n'' = s' + s'',$$

ч. т. д.

Аналогично доказывается, что сумма второго ряда равна $s' - s''$.

Теорема 3. *Свойство сходимости или расходимости ряда не нарушится, если в ряде отбросить или приписать к нему любое число членов или заменить любое число членов другими.*

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{5}$$

Отбросим или припишем к нему любое число членов или заменим любое число членов другими. Получим новый ряд

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots \tag{6}$$

Докажем, что оба ряда сходятся или расходятся. Изменения, которые мы произвели, коснулись лишь некоторого числа членов ряда (в этом и заключено главное условие теоремы). Следовательно, начиная с некоторого номера k, члены u_k, $u_{k+1}, \ldots$ ряда (5) будут совпадать с членами ряда (6), начиная с некоторого номера m, т. е.

$$u_k=v_m,\quad u_{k+1}=v_{m+1}, \ldots;$$

пусть

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{k-1}=A,\quad v_1+v_2+v_3+\ldots+v_{m-1}=B;$$

тогда частичная сумма s_{k+n} ряда (5) равна

$$s_{k+n}=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{k-1}+u_k+u_{k+1}+\ldots+u_{k+n}=$$
$$=A+u_k+u_{k+1}+\ldots+u_{k+n},$$

а частичная сумма σ_{m+n} ряда (6) равна

$$\sigma_{m+n}=v_1+v_2+v_3+\ldots+v_{m-1}+v_m+v_{m+1}+\ldots+v_{m+n}=$$
$$=B+v_m+v_{m+1}+\ldots+v_{m+n}.$$

Теперь ясно, что если при $n=+\infty$ существует предел для $u_k+u_{k+1}+\ldots+u_{k+n}$, равный s, то существует предел для s_{k+n}, равный $A+s$, и для σ_{m+n}, равный $B+s$, т. е. оба ряда сходятся. Если же не существует предела суммы $u_k+u_{k+1}+\ldots+u_{k+n}$, то не существует предела и для s_{k+n}, т. е. оба ряда расходятся, ч. т. д.

На основании этой теоремы при исследовании вопроса о сходимости ряда возможно не обращать внимания на любое число первых членов. Это удобно в тех случаях, когда в первых членах ряда имеется некоторая «иррегулярность» (хаотичность). Например, исследование сходимости ряда

$$1+0-7+18-41+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

мы можем свести к исследованию сходимости ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Последний ряд сходится. Значит сходится и начальный ряд.

Теорема 4 (необходимый признак сходимости). *Если ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ сходится, то n-й член ряда стремится к нулю:*

$$\lim u_n = 0.$$

Доказательство. Пусть s — сумма ряда. Имеем:

$$u_n = (u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n) - (u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1}) = \\ = s_n - s_{n-1}.$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim u_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0,$$

ч. т. д.

Из этой теоремы следует расходимость рядов, данных в примерах 3, § 163 и 1, § 164.

Высказанный признак является необходимым, но не достаточным, т. е. из факта $\lim u_n = 0$ не следует, что ряд сходится. Гармонический ряд может служить для этого примером. Он расходится (пример 4, § 163), несмотря на то, что $\lim u_n = \lim \frac{1}{n} = 0$.

§ 165. Ряды с неотрицательными членами

Особо важное значение имеют ряды, все члены которых неотрицательны. Перейдём к их изучению.

Для ряда с неотрицательными членами имеем:

$$s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant \ldots,$$

т. е. последовательность его частичных сумм не убывает. Следовательно, такой ряд либо сходится, либо расходится к $+\infty$. В частности, если последовательность частичных сумм ограничена сверху, то ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ сходится.

Отметим, что если ряд

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

сходится к s и члены ряда положительны, то сумма s больше любой частичной суммы s_n.

В самом деле, последовательность

$$s_1, \ s_2, \ s_3, \ldots, \ s_n, \ldots$$

в этом случае (т. е. $u_n > 0$) возрастает строго. Если бы сумма s оказалась меньше какой-либо частичной суммы s_n или равна ей:

$$s \leqslant s_n,$$

то все следующие частичные суммы $s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ были бы больше, чем s и предел разности $s_{n+k} - s$ не мог бы быть равным нулю, а это противоречит определению предела последовательности.

Следовательно, $s > s_n$.

Выяснению сходимости или расходимости рядов с положительными членами часто помогает сравнение их с уже известными рядами, например, с прогрессией, гармоническим рядом.

Теорема 1 (сравнение рядов). *Даны два ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \tag{2}$$

с неотрицательными членами, причём $u_n \leqslant v_n$ *для всех* n, *начиная с некоторого. Тогда, если ряд* (2) *сходится, то сходится и ряд* (1), *если же ряд* (1) *расходится, то расходится и ряд* (2).

Доказательство. Так как изменение любого числа членов ряда не влияет на его сходимость или расходимость, то мы с самого начала будем считать, что неравенство $u_n \leqslant v_n$ имеет место, начиная с первого члена (в противном случае отбросим члены, не подчиняющиеся этому неравенству). Обозначим через s_n частичную сумму ряда (1) и через σ_n — частичную сумму ряда (2). Имеем:

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n \leqslant \sigma_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n.$$

Так как члены рядов неотрицательны, то при возрастании n s_n и σ_n не убывают. Пусть ряд (2) сходится, т. е. $\lim \sigma_n = \sigma$. Так как σ_n не убывает, то $\sigma_n \leqslant \sigma$; для s_n имеем:

$$s_n \leqslant \sigma_n \leqslant \sigma.$$

Следовательно, неубывающая последовательность частичных сумм ряда (1) ограничена числом σ, откуда и следует существование предела $\lim s_n$, т. е. сходимость ряда (1). Пусть ряд (1) расходится, следовательно, $\lim s_n = +\infty$; так как $\sigma_n \geqslant s_n$, то и подавно $\lim \sigma_n = +\infty$, т. е. ряд (2) расходится.

Примечания:

1. Если ряд (2) сходится и $u_n \leqslant v_n$ для всех n, то имеем

$$s_n \leqslant \sigma_n < \sigma, \quad \text{т. е. } s_n \leqslant \sigma,$$

откуда

$$\lim s_n = s \leqslant \sigma,$$

т. е. сумма ряда (1) не больше суммы ряда (2).

2. Если ряд (2) сходится и $u_n \leqslant v_n$ для всех n, причём хотя бы для одного номера k имеет место строгое неравенство $u_k < v_k$, то сумма s ряда (1) строго меньше суммы σ ряда (2).

В самом деле, имеем:

$$s = s_k + R_k, \quad \sigma = \sigma_k + P_k,$$

где

$$R_k = u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{k+n} + \ldots,$$

$$P_k = v_{k+1} + v_{k+2} + \ldots + v_{k+n} + \ldots$$

являются остаточными членами рядов (1) и (2). Эти остаточные члены являются суммами сходящихся рядов, и так как $u_{k+m} \leqslant v_{k+m}$ для любого m, то согласно примечанию 1 имеем: $R_k \leqslant P_k$. Что касается частичных сумм s_k и σ_k, то они являются суммами конечного числа слагаемых, причём каждое слагаемое первой суммы не больше чем соответствующее слагаемое второй, а по крайней мере одно слагаемое, именно u_k, строго меньше чем v_k:

$$u_1 \leqslant v_1, \; u_2 \leqslant v_2, \; u_3 \leqslant v_3, \ldots, \; u_{k-1} \leqslant v_{k-1}, \; u_k < v_k.$$

Следовательно, s_k строго меньше чем σ_k. Итак,

$$s_k < \sigma_k, \quad R_k \leqslant P_k.$$

Складывая эти неравенства, получим:

$$s_k + R_k < \sigma_k + P_k, \text{ т. е. } s < \sigma, \text{ ч. т. д.}$$

Пример 1. Ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

расходится, так как члены его больше соответствующих членов расходящего (гармонического) ряда. В самом деле: если n — целое положительное число, большее 1, то $\sqrt{n} < n$, следовательно, $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$.

Можно высказать более общее положение: ряд

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

расходится, если $p < 1$.

Действительно, если $p < 1$, то $n^p < n$, где n — целое положительное число, больше 1 и, следовательно, $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$, т. е. члены данного ряда, начиная со 2-го, больше членов гармонического ряда. Отсюда следует его расходимость.

Пример 2. Ряд

$$1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$$

сходится, так как члены его, начиная с 4-го, меньше соответствующих членов геометрической убывающей прогрессии

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Действительно, для $n > 2$, имеем $n^n > 2^n$, откуда $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$.

Пример 3. Ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

сходится. В самом деле, отбросив его 1-й член, получим ряд

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots, \tag{3}$$

Сравним его с рядом

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

Последний ряд сходится (пример 1 § 163) и члены его больше членов ряда (3), так как

$$(n+1)^2>n(n+1),$$

значит

$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)}.$$

Отсюда и следует, что данный ряд сходится.

Пример 4. Ряд

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

при $p>2$ сходится, так как члены его меньше членов сходящегося ряда (3). Действительно, если $p>2$, то $n^p>n^2$ и $\frac{1}{n^p}<\frac{1}{n^2}$.

Объединяя результаты примера — 4 § 163 и примеров 1, 3, 4 этого параграфа, имеем: ряд

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

расходится, если $p\leqslant 1$, и сходится, если $p\geqslant 2$.

Остаётся ещё исследовать ряд для значений p из интервала (1,2). Рассмотрим функцию $\frac{1}{x^p}$; функция $f(x)=-\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}$ является её первообразной. К этой последней функции применим формулу Лагранжа, полагая $h=1$. Получим:

$$-\frac{1}{(p-1)(x+1)^{p-1}}+\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}=\frac{1}{(x+\theta)^p}.$$

Будем считать x положительным. Так как $x+\theta<x+1$, то $(x+\theta)^p<(x+1)^p$, следовательно,

$$\frac{1}{(x+\theta)^p}>\frac{1}{(x+1)^p},\quad \frac{1}{(p-1)x^{p-1}}-\frac{1}{(p-1)(x+1)^{p-1}}>\frac{1}{(x+1)^p}.$$

Полагая $x=1, 2, 3, \ldots, n-1$, получим

$$\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p-1)2^{p-1}}>\frac{1}{2^p},\quad \frac{1}{(p-1)2^{p-1}}-\frac{1}{(p-1)3^{p-1}}>\frac{1}{3^p},$$

$$\frac{1}{(p-1)3^{p-1}}-\frac{1}{(p-1)4^{p-1}}>\frac{1}{4^p},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{(p-1)(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{(p-1)n^{p-1}}>\frac{1}{n^p}.$$

Складывая эти неравенства и прибавляя к обеим частям полученного неравенства по 1, находим:

$$1+\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p-1)n^{p-1}}>1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p},$$

т. е.

$$s_n<1+\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Отсюда, тем более

$$s_n < 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}.$$

Итак, s_n возрастает и ограничена сверху, следовательно, имеет предел s при $n = \infty$, т. е. наш ряд сходится.

Итак, ряд

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

сходится, если $p > 1$, и расходится при $p \leqslant 1$.

Приведём два признака сходимости рядов, Даламбера и Коши, основанные на сравнении ряда с геометрической прогрессией.

Теорема 2. (Признак Даламбера.) *Если в ряде*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

с положительными членами отношение $n+1$-го члена к n-му стремится к пределу l при $n = \infty$:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \tag{4}$$

то в случае, когда $l < 1$, ряд сходится, а в случае $l > 1$ ряд расходится.

Доказательство. Из определения предела следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $N > 0$, что для всех $n > N$ будет

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon.$$

Пусть $l < 1$. Возьмём такое $\varepsilon > 0$, чтобы число $l + \varepsilon = r$ было меньше чем 1. Тогда для всех $n > N$ имеем:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r < 1 \text{ или } u_{n+1} < ru_n$$

$$u_{N+2} < u_{N+1} \cdot r,$$

$$u_{N+3} < u_{N+2} \cdot r < u_{N+1} \cdot r^2,$$

$$u_{N+4} < u_{N+3} \cdot r < u_{N+1} \cdot r^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{N+k} < u_{N+k-1} \cdot r < u_{N+1} \cdot r^{k-1},$$

т. е. все члены ряда, начиная с $N+2$, меньше членов геометрической прогрессии

$$ru_{N+1} + r^2u_{N+1} + r^3u_{N+1} + \cdots + r^{k-1}u_{N+1} + \cdots$$

Но так как $r < 1$, то эта прогрессия сходится, а значит и данный ряд сходится.

Рассмотрим случай, когда $l > 1$.

Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $l - \varepsilon > 1$. Тогда для всех $n > N$ будем иметь:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > l - \varepsilon > 1, \text{ откуда } u_{n+1} > u_n,$$

т. е. члены нашего ряда, начиная с некоторого номера, возрастают, следовательно, предел u_n не равен нулю, а это доказывает, что ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости, ч. т. д.

В случае, когда $l = 1$, т. е. когда имеет место равенство

$$\lim_{n=+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

ряд может сходиться, а может и расходиться (см. приведённые ниже примеры).

Пример 5. Ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots$$

сходится, так как

$$u_n = \frac{n}{2^n}, \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n}$$

и, следовательно,

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} = l < 1.$$

Из сходимости этого ряда следует, что

$$\lim_{n=+\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

Пример 6. Ряд

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^n}{n} + \cdots$$

расходится. В самом деле, имеем:

$$u_n = \frac{2^n}{n}, \quad u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{n+1},$$

откуда

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{2n}{n+1} = 2 = l > 1.$$

Расходимость этого ряда следует и из того, что

$$\lim u_n = \lim \frac{2^n}{n} = +\infty$$

(см. предыдущий пример).

Пример 7. Ряд

$$a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \cdots$$

сходится при любом значении $a > 0$.

В самом деле, имеем:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1} n!}{(n+1)! a^n} = \frac{a}{n+1}; \quad \lim \frac{a}{n+1} = 0 < 1.$$

Из этого примера на основании необходимого признака сходимости Коши следует, что

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0 \ (a > 0).$$

Пример 8. Гармонический ряд расходится. Для него имеем:

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1},$$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n}{n+1} = 1.$$

Пример 9. Для ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

также имеем

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1,$$

но вместе с тем этот ряд сходится.

Теорема 3. (Признак Коши.) *Если для ряда с положительными членами*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

предел корня n-й степени из n-го члена существует и равен числу l:

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = l, \tag{5}$$

то в случае $l < 1$ ряд сходится, а при $l > 1$ ряд расходится.

Доказательство. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что для всех $n > N$ будет

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon.$$

Пусть $l < 1$. Возьмём такое число $\varepsilon > 0$, чтобы число $l + \varepsilon = r$ было меньше чем 1. Тогда для всех $n > N$ будет:

$$\sqrt[n]{u_n} < r < 1 \quad \text{или} \quad u_n < r^n.$$

Итак,

$$\begin{gathered} u_{N+1} < r^{N+1}, \\ u_{N+2} < r^{N+2}, \\ \dots\dots\dots \\ u_{N+k} < r^{N+k}, \\ \dots\dots\dots \end{gathered}$$

т. е. все члены ряда, начиная с $N+1$-го, меньше членов сходящегося ряда (геометрической убывающей прогрессии). Следовательно, данный ряд сходится.

Пусть $l > 1$. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $l - \varepsilon > 1$. Для всех $n > N$ будем иметь:

$$\sqrt[n]{u_n} > 1, \text{ откуда } u_n > 1,$$

т. е. все члены ряда, начиная с некоторого номера, больше чем 1, следовательно, они не стремятся к нулю и значит ряд расходится, ч. т. д.

Если $l=1$, то, как и раньше, имеем «сомнительный случай»: ряд может сходиться, а может и расходиться.

Пример 10. Ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$$

сходится, так как

$$\lim\sqrt[n]{u_n}=\lim\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim\frac{1}{n}=0.$$

Пример 11. Ряд

$$\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{2}\cdot 2\right)^2+\left(\frac{4}{3}\cdot 2\right)^3+\cdots+\left(\frac{1+n}{n}\cdot 2\right)^n+\cdots$$

расходится, так как

$$\lim\sqrt[n]{u_n}=\lim\sqrt[n]{\left(\frac{1+n}{n}\,2\right)^n}=\lim\frac{2(1+n)}{n}=2>1.$$

Расходимость этого ряда видна ещё и потому, что не выполняется необходимый признак сходимости. В самом деле:

$$\lim a_n=\lim\left(\frac{1+n}{n}\cdot 2\right)^n=\lim\left(\frac{1+n}{n}\right)^n\cdot\lim 2^n=$$
$$=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim 2^n=e\cdot\lim 2^n=+\infty.$$

Пример 12. Гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ расходится. Применим к нему признак Коши. Имеем:

$$\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

Найдём предел $\sqrt[n]{n}$ при $n=\infty$. Обозначим $\sqrt[n]{n}$ через y; тогда

$$\ln y=\frac{\ln n}{n},$$
$$\lim\frac{\ln n}{n}=0\ ^{*)}.$$

Итак, $\lim\ln y=0$, откуда $\lim y=1$ и окончательно

$$\lim\sqrt[n]{u_n}=1.$$

*) Применим к функции $\ln x$ теорему Лагранжа, полагая $a=1$, $b=n$; так как $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, то

$$\ln n-\ln 1=\frac{n-1}{n+\theta(n-1)},\ \text{где}\ 0<\theta<1;$$

отсюда:

$$\lim\frac{\ln n}{n}=\lim\frac{n-1}{n[n+\theta(n-1)]}=0.$$

Таким образом, признак Коши не даёт ответа на вопрос о сходимости гармонического ряда (расходящегося).

Пример 13. Ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

сходится. Применив к данному ряду признак Коши, получим

$$\lim \sqrt[n]{u_n}=\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2}=\frac{1}{1^2}=1.$$

Признак Коши и здесь не даёт решения вопроса о сходимости рассматриваемого ряда (сходящегося).

В заключение настоящего параграфа дадим более общие формулировки признаков Даламбера и Коши.

Теорема 4. (Признак Даламбера.) *Если для всех членов ряда с положительными членами, начиная с некоторого номера, отношение* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *меньше некоторого числа* r, *меньшего чем* 1, *то ряд сходится. Если же это отношение, начиная с некоторого* n, *больше или равно* 1:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1,$$

то ряд расходится.

Теорема 5. (Признак Коши.) *Если для всех членов ряда* $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ *с положительными членами, начиная с некоторого номера, число* $\sqrt[n]{u_n}$ *меньше некоторого числа* r, *меньшего чем* 1:

$$\sqrt[n]{u_n}<r<1,$$

то ряд сходится. Если же, начиная с некоторого номера n,

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1,$$

то ряд расходится.

Доказательства этих теорем являются почти дословным повторением доказательств теорем 2 и 3 этого параграфа. Рекомендуем их провести самостоятельно.

Последние теоремы удобны тем, что часто благодаря им можно исследовать сходимость таких рядов, для которых отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ или $\sqrt[n]{u_n}$ не имеют предела при $n=+\infty$.

Упражнения

399. Записать в развёрнутом виде ряд по общему члену и исследовать его на сходимость:

1) $u_n=\frac{n+1}{n}$, 2) $u_n=\frac{1}{n!}$, 3) $u_n=\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$, 4) $u_n=\frac{n^2}{3^n}$,

5) $u_n=\frac{n}{3^n}$, 6) $u_n=\frac{1}{n^{n-1}}$, 7) $u_n=\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$, 8) $u_n=\frac{1}{\sqrt[n+1]{3}}$,

9) $u_n=\frac{1}{1+2^n}$, 10) $u_n=\frac{n!}{n^n}$, 11) $u_n=q^{n^2}$,

12) $u_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, 13) $u_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, 14) $u_n=\frac{n+1}{n^2}$,

15) $u_n=\frac{|\sin n\alpha|}{n^3}$, 16) $u_n=\frac{3+n}{2+n^2}$, 17) $u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$,

18) $u_n=\frac{1}{n(n+2)}$, 19) $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$,

20) $u_n=\frac{1}{n(n+2)(n+4)}$, 21) $u_n=\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

22) $u_n=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$, 23) $u_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, 24) $u_n=\frac{1}{1+a^{n+1}}$,

25) $u_n=\frac{n(n+1)}{3^n}$, 26) $u_n=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, $a>0$,

27) $u_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, 28) $u_n=\frac{n+1}{n!}$,

29) $u_n=\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$, $a>0$, 30) $u_n=\frac{a^n}{1+a^{n+1}}$, $a>0$,

31) $u_n=\frac{n+1}{n^3}$.

§ 166. Ряды с членами переменного знака

Перейдём к изучению сходимости ряда

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

с членами произвольного знака.

Если все члены ряда (1) отрицательны, то, умножив их на -1 (что не повлияет на сходимость или расходимость ряда), мы придём к ряду с положительными членами.

Если ряд (1) содержит лишь конечное число отрицательных (положительных) членов, то, отбросив достаточное число первых членов (что не повлияет на сходимость или расходимость ряда (1)), мы придём к случаю, когда все члены ряда имеют одинаковый знак.

Итак, интерес представляют ряды, содержащие бесконечное множество и положительных, и отрицательных членов. Такие ряды мы и будем рассматривать.

Параллельно с рядом (1) рассмотрим ряд

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots, \tag{2}$$

составленный из абсолютных величин членов ряда (1).

Теорема. *Если сходится ряд* (2), *составленный из абсолютных величин членов ряда* (1), *то сходится и ряд* (1).

Доказательство. Рассмотрим ещё 3-й ряд

$$(|u_1|+u_1)+(|u_2|+u_2)+(|u_3|+u_3)+\dots+(|u_n|+u_n)+\dots \quad (3)$$

Члены этого ряда неотрицательны:

$$|u_n|+u_n \geqslant 0.$$

Именно, $|u_n|+u_n=2u_n$, если $u_n>0$, и $|u_n|+u_n=0$, если $u_n \leqslant 0$; кроме того, члены его не больше членов ряда

$$2|u_1|+2|u_2|+2|u_3|+\dots+2|u_n|+\dots, \quad (4)$$

так как

$$|u_n|+u_n \leqslant |u_n|+|u_n|=2|u_n|.$$

Но ряд (4) сходится, так как сходится ряд (2). Следовательно, сходится и ряд (3). Итак, ряды (2) и (3) оба сходятся. Значит сходится и разность этих рядов:

$$(|u_1|+u_1-|u_1|)+(|u_2|+u_2-|u_2|)+\dots+ \\ +(|u_n|+u_n-|u_n|)+\dots,$$

т. е. ряд

$$u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots, \text{ ч. т. д.}$$

Определение. *Если ряд* (2), *составленный из абсолютных величин членов данного ряда* (1), *сходится, то данный ряд называется абсолютно или безусловно сходящимся.*

Из доказанной теоремы следует, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Пример 1. Ряд

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\dots\pm\frac{1}{n!}\mp\dots$$

является абсолютно сходящимся, следовательно, он сходится. В самом деле, ряд

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots,$$

составленный из абсолютных величин членов этого ряда, сходится.

Определение. *Если ряд* (*1*) *сходится, а ряд* (*2*), *составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то ряд* (*1*) *называется условно сходящимся.*

С примерами условно сходящихся рядов читатель вскоре познакомится.

Среди рядов с членами переменного знака большой интерес представляют ряды, члены которых поочерёдно, то положительны, то отрицательны. Такие ряды называются знакочередующимися и их обычно записывают так:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\dots+(-1)^{n-1}u_n+\dots, \quad (5)$$

где числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ — положительны. Для знакочередующихся рядов имеет место следующий признак сходимости:

Теорема (Лейбница). *Если члены знакочередующегося ряда*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots$$

не возрастают по абсолютной величине

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant \ldots$$

и предел u_n равен нулю:

$$\lim u_n = 0,$$

то ряд сходится.

Доказательство. Сумму s_{2n} чётного числа $2n$ первых членов ряда запишем так:

$$s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}).$$

В силу невозрастания чисел u_n выражения в скобках неотрицательны. Следовательно, если увеличивать n, то будут прибавляться новые неотрицательные слагаемые и S_{2n} будет не убывать. Эту же сумму запишем так:

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

Эта форма записи показывает, что $S_{2n} \leqslant u_1$, так как для получения s_{2n} мы из u_1 вычитаем неотрицательные слагаемые $u_2 - u_3$, $u_4 - u_5, \ldots$ Итак, по мере увеличения n частичная сумма s_{2n} будет не убывать и она ограничена сверху числом u_1, следовательно, существует предел s_{2n}. Покажем, что к этому же пределу s стремится и частичная сумма нечётного числа членов. В самом деле:

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}.$$

Перейдём к пределу. Получим:

$$\lim s_{2n+1} = \lim (s_{2n} + u_{2n+1}) = \lim s_{2n} + \lim u_{2n+1} = s + 0 = s,$$

так как $\lim u_n = 0$. Итак,

$$\lim s_n = s, \text{ ч. т. д.}$$

Пример 2. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots$$

сходится, так как члены его по абсолютной величине убывают и стремятся к нулю. Этот ряд является условно сходящимся, так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится (гармонический ряд).

Ниже будет доказано, что сумма этого ряда равна $\ln 2$.

Пример 3. Ряд

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} + \ldots$$

сходится, так как он подчиняется условиям теоремы Лейбница. Именно, он знакочередующийся, затем:

$$\frac{1}{n!} > \frac{1}{(n+1)!}$$

и

$$\lim \frac{1}{n!} = 0.$$

Этот ряд сходится абсолютно, так как сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов (пример 7, § 165).

Пример 4. Дан знакочередующийся ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \ldots$$

Предел u_n для данного ряда равен нулю:

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n} \pm 1} = 0$$

и вместе с тем ряд расходится.

В самом деле, рассмотрим частичные суммы с чётными номерами:

$$s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2}{1},$$

$$s_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right),$$

$$s_6 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1}\right) =$$

$$= \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right),$$

. . . .

$$s_{2n} = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Выражение в последних скобках является частичной суммой гармонического ряда и сумма неограниченно растёт вместе с n. Следовательно, и s_{2n} расходится к $+\infty$, т. е. и наш ряд расходится к $+\infty$.

К этому ряду нельзя применить признак Лейбница, так как абсолютные величины его членов не подчиняются соотношениям:

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \cdots \geqslant u_n \geqslant \cdots$$

В самом деле,

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} > \frac{1}{\sqrt{2}+1}; \quad \frac{1}{\sqrt{2}+1} < \frac{1}{\sqrt{3}-1}; \quad \frac{1}{\sqrt{3}-1} > \frac{1}{\sqrt{3}+1} \quad \text{и т. д.}$$

Пример 5. К знакочередующемуся ряду

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \cdots \pm \frac{1}{n+1} \mp \frac{1}{n} \pm \ldots$$

нельзя применить признака Лейбница, так как

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{5} < \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} > \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{7} < \frac{1}{6}, \ldots$$

Легко доказать, что этот ряд сходится. В самом деле, частичная сумма чётного числа членов равна:

$$s_{2n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}=$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1};$$

но это есть частичная сумма сходящегося ряда (см. пример 2). Следовательно, для неё существует предел. Перейдём к частичной сумме нечётного числа членов. Имеем:

$$s_{2n+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+3}=$$
$$=s_{2n}+\frac{1}{2n+3}.$$

Отсюда $\lim \frac{1}{2n+3}=0$, и снова

$$\lim s_{2n+1}=\lim s_{2n}=s.$$

Из этого примера видно, что признак Лейбница для знакочередующихся рядов является достаточным признаком сходимости ряда (но не необходимым).

Упражнения

400. Сходятся ли абсолютно следующие ряды:

$$\frac{\sin\alpha}{2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{2^3}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{2^n}+\ldots$$

$$\cos\alpha+\frac{\cos 2\alpha}{2^2}+\frac{\cos 3\alpha}{2^3}+\frac{\cos n\alpha}{2^n}+\ldots$$

401. Доказать, что если общий член u_n ряда

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

стремится к нулю и частичная сумма s_{2n} чётного числа членов ряда имеет предел s, то данный ряд будет сходящимся и его сумма будет равна s.

§ 167. Достаточные признаки сходимости рядов (с произвольными членами)

Теорема 1. *Если члены ряда*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

по абсолютной величине не больше соответствующих членов сходящегося ряда

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots$$

с неотрицательными членами, то данный ряд абсолютно сходится.

Доказательство. По условию имеем:

$$|u_n|\leqslant v_n,$$

Следовательно, на основании теоремы 1 § 165, ряд

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots,$$

члены которого неотрицательны, сходится, но это и доказывает, что данный ряд сходится и притом абсолютно.

Примечание. Отметим, что если ряд $v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$ расходится и $|u_n|\geqslant v_n$, то отсюда не следует расходимость данного ряда (ср. с теоремой 1 § 165), мы сможем лишь утверждать, что наш ряд, если и сходится, то условно.

Теорема 2. (Признак Даламбера.) *Если для ряда*

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots,$$

начиная с некоторого n, имеет место неравенство

$$\left|\frac{u_n+1}{a_n}\right|<p<1,$$

то ряд сходится и притом абсолютно, если же, начиная с некоторого n,

$$\left|\frac{u_n+1}{u_n}\right|>1,$$

то ряд расходится.

В частности, если

$$\lim\left|\frac{u_n+1}{a_n}\right|=q<1,$$

то ряд сходится (и притом абсолютно).

Доказательство 1-й части теоремы проводится так, как и доказательство теоремы 2 § 165; 2-я часть теоремы доказывается так же просто: если, начиная с некоторого n, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$, то $|u_{n+1}|>|u_n|$, $\lim u_n\neq 0$, т. е. не выполняется необходимый признак сходимости ряда. Отсюда и следует его расходимость.

Теорема 3. (Признак Коши.) *Если для ряда*

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots,$$

начиная с некоторого n, имеет место неравенство:

$$\sqrt[n]{|u_n|}<p<1,$$

то ряд сходится и притом абсолютно, если же

$$\sqrt[n]{|u_n|}>1,$$

то ряд расходится.

Доказательство этой теоремы рекомендуем провести самостоятельно.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{2^3}+\ldots+\frac{\sin nx}{2^n}+\ldots,$$

где x — любое число.

Решение. Так как $|\sin nx|\leqslant 1$, то

$$\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n};$$

но ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ сходится, следовательно, данный ряд абсолютно сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

где n — любое число.

Решение. Имеем: $u_n=\frac{x^n}{n!}$, $u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$,

$$\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\left|\frac{x}{n+1}\right|=0<1.$$

Следовательно, при любом значении x ряд сходится и притом абсолютно.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$2x+(2x)^2+(2x)^3+\ldots+(2x)^n+\ldots,$$

где x — любое число.

Решение. Имеем:

$$\lim\sqrt[n]{|u_n|}=\lim\sqrt[n]{|(2x)^n|}=|2x|.$$

Следовательно, если $|2x|<1$, т. е. $|x|<\frac{1}{2}$, то ряд сходится (абсолютно), если же $|2x|>1$, т. е. $|x|>\frac{1}{2}$, то ряд расходится. Остаётся рассмотреть случаи $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{2}$. Если $x=-\frac{1}{2}$, то ряд примет вид

$$-1+1-1+1-\ldots-1+1-\ldots,$$

т. е. ряд расходится. При $x=\frac{1}{2}$ имеем:

$$1+1+1+\ldots+1+1+\ldots,$$

т. е. ряд расходится.

§ 168. Приближения суммы ряда его частичными суммами

Пусть дан сходящийся ряд

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

и s его сумма. Частичная сумма s_n может служить приближением числа s, причём ошибка приближённого равенства $s\approx s_n$ равна остаточному члену R_n ряда (1), так как $R_n = s - s_n$. По существу эту ошибку вычислить так же трудно, как и сумму s. Практически важно найти не ошибку приближённого равенства $s \approx s_n$, а либо выяснить границу этой ошибки, либо выяснить, сколько членов ряда достаточно взять, чтобы ошибка не превышала данного наперёд заданного числа.

Приведём несколько примеров.

Пример 1. Ряд

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

сходится; пусть s — его сумма; оценить допущенную ошибку, если положить

$$s \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Решение. Ошибка равна остаточному члену:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+k)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+k)} + \ldots\right].$$

Заменим числа $n+3$, $n+4$, ... числом $n+2$. Этим мы уменьшим знаменатели членов, стоящих в скобках, а следовательно, увеличим эти члены. Отсюда на основании примечаний к теореме 1 § 165, получим:

$$R_n < \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^k} + \ldots\right].$$

Выражение в квадратных скобах представляет сумму геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{n+2}$. Эта сумма равна $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{n+2}} = \dfrac{n+2}{n+1}$.

Окончательно имеем:

$$R_n < \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1}.$$

В частности, если принять

$$s \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 2\frac{17}{24} \approx 2{,}708\ldots,$$

то ошибка будет меньше чем

$$\frac{1}{5!}\,\frac{5}{6} \approx 0{,}01,$$

т. е. $s = 2{,}71$ с точностью до 0,01.

В дальнейшем читатель узнает, что сумма этого ряда равна числу $e = 2{,}718281828459045\ldots$

Пример 2. Ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

сходится к некоторому числу s. Сколько членов этого ряда достаточно взять, чтобы вычислить s с точностью до 0,001?

Решение. Ошибка приближённого равенства

$$s \approx s_n$$

равна

$$R_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} + \dots;$$

R_n есть сумма ряда. Для частичной суммы R_k k его членов имеем:

$$P_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+k+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,

$$\lim P_k = R_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Мы требуем выполнения неравенства

$$R_n < 0{,}001;$$

оно тем более будет иметь место, если будет выполнено условие

$$\frac{1}{n+1} < 0{,}001.$$

Решая последнее неравенство, получим:

$$n > 999.$$

Итак, взяв, например, 1000 членов нашего ряда, мы найдём сумму s с точностью до 0,001.

Здесь мы имеем пример «медленно» сходящегося ряда, т. е. ряда, для которого нужно взять много членов, чтобы получить хорошее приближение.

Для знакочередующихся сходящихся рядов, члены которых не возрастают: $u_n \geqslant u_{n+1}$, вопрос оценки ошибки решается просто. Пусть дан сходящийся знакочередующийся ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots,$$

для которого $u_n \geqslant u_{n+1} > 0$. Имеем:

$$R_n = \pm (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots \pm u_{n+k} \mp u_{n+k+1} \pm \dots) = \pm r_n,$$

где

$$r_n = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots \pm u_{n+k} \mp u_{n+k+1} \pm \dots$$

Для частичной суммы s_{2k} ряда имеем:

$$s_{2k} = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots - u_{n+2k} = u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - \\ - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \dots - (u_{n+2k-2} - u_{n+2k-1}) - u_{n+2k} \leqslant u_{n+1}$$

и

$$s_{2k+1} = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots + u_{n+2k+1} = u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - \\ - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \dots - (u_{n+2k} - u_{n+2k+1}) \leqslant u_{n+1},$$

так как выражения в скобках неотрицательны. Следовательно, любая частичная сумма ряда не больше чем u_{n+1}:

$$s_{n+k} \leqslant u_{n+1}.$$

Отсюда

$$\lim s_{n+k} = r_n \leqslant u_{n+1},$$

т. е. остаток R_n ряда по абсолютной величине не больше абсолютной величины $n+1$-го члена:

$$|R_n| \leqslant u_{n+1} \quad \text{или} \quad |s - s_n| \leqslant u_{n+1}.$$

При этом s_n является приближением числа s с избытком, если n-й член положителен (или, если n нечётно) и с недостатком, если он отрицателен (или, если n чётно).

Пример 3. Сумму ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

можно приближённо с недостатком считать равной $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$, причём допущенная ошибка меньше чем $\frac{1}{5}$. С избытком сумма ряда приближённо равна $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$. Допущенная ошибка меньше чем $\frac{1}{6}$.

Пример 4. Сколько членов ряда

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \ldots \pm \frac{1}{(2n)!} \mp \ldots$$

достаточно взять, чтобы ошибка была меньше чем 0,001?

Решение. Мы требуем выполнения неравенства $\frac{1}{(2n)!} < 0{,}001$ или $(2n)! > 1000$. Так как $6! = 720$, а $7! = 5040$, то последнее неравенство будет выполнено при $2n > 6$ или $n > 3$ (n может быть только целым). Итак, взяв число

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} = \frac{389}{720},$$

мы получим приближённое значение с недостатком суммы ряда с требуемой точностью.

§ 169. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

Как уже было сказано, нельзя с рядами обращаться как с конечными суммами. Например, если данный ряд сходится к числу s, то при перестановке *) или группировке его членов сумма может

---

*) Мы говорим, что ряд $v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$ получен перестановкой членов ряда $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, если каждый член ряда $v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$ есть какой-то член данного ряда, и обратно.

измениться, даже больше: ряд может оказаться расходящимся (см. пример 1, § 164). Для условно сходящихся рядов имеет место на первый взгляд кажущаяся парадоксальной теорема Римана.

Теорема 1. *Если ряд сходится условно, то для любого наперёд заданного числа L можно так переставить члены ряда, чтобы вновь полученный ряд сходился именно к числу L или чтобы новый ряд оказался расходящимся.*

Доказательство этой теоремы выходит за рамки настоящего курса.

Теорема 2. *Если ряд сходится абсолютно, то его сумма не зависит от порядка его членов (или: в абсолютно сходящемся ряде можно переставлять любым образом его члены).*

Теорема 3. *Если ряды*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots, \tag{1}$$

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots \tag{2}$$

сходятся абсолютно и их суммы суть s и σ, то ряды

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)+\ldots+(u_n+v_n)+\ldots,$$

$$(u_1-v_1)+(u_2-v_2)+(u_3-v_3)+\ldots+(u_n-v_n)+\ldots$$

сходятся абсолютно и сумма их равна соответственно $s+\sigma$ и $s-\sigma$ (или: абсолютно сходящиеся ряды можно складывать и вычитать).

Теорема 4. *Если ряды* (1) *и* (2) *абсолютно сходятся и их суммы суть s* и *σ, то ряд, составленный из двух данных формальным их перемножением (как многочленов), т. е. ряд*

$$w_1+w_2+w_3+\ldots+w_n+\ldots,$$

где

$$\begin{aligned} w_1 &= u_1v_1, \\ w_2 &= u_1v_2+u_2v_1, \\ w_3 &= u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_n &= u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_{n-1}v_2+u_nv_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

сходится абсолютно и сумма его равна $s\cdot\sigma$ (или: абсолютно сходящиеся ряды можно перемножить).

Доказательства этих теорем выходят за рамки курса.

ГЛАВА XXII

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ 170. Формула Маклорена

Для подсчёта числового значения целой рациональной функции над аргументом x надо произвести конечное число операций сложения, вычитания и умножения.

Вычисление значений других, даже элементарных функций, например $\sin x$, $\sqrt[7]{x}$, $\ln x$ и т. д., представляет большие трудности. Вот почему большое теоретическое и практическое значение имеет вопрос о приближённом представлении данной функции в виде полинома или, как говорят, вопрос об аппроксимации данной функции при помощи полинома.

Предварительно рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть дан полином

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n.$$

Его, конечно, незачем «приближённо представить в виде полинома», ибо он уже сам является полиномом. Всё же попытаемся глубже изучить его коэффициенты. При $x=0$ имеем:

$$f(0)=a_0.$$

Продифференцируем рассматриваемый полином:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}.$$

При $x=0$ получим:

$$f'(0)=a_1.$$

Продифференцируем функцию ещё раз:

$$f''(x)=2a_2+2\cdot3\cdot a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2};$$

при $x=0$ получим:

$$f''(0)=2a_2$$

или

$$a_2=\frac{1}{2}f''(0).$$

Продолжаем дифференцировать полином, после чего каждый раз будем полагать $x=0$. Получим последовательно:

$$f'''(x)=2\cdot 3\cdot a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+\ldots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

$$f'''(0)=3!\,a_3, \quad \text{откуда } a_3=\frac{1}{3!}f'''(0);$$

$$f^{IV}(x)=4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4+5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_5\cdot x+\ldots+ \\ +n(n-1)(n-2)(n-3)a_nx^{n-4}$$

$$f^{IV}(0)=4!\,a_4, \quad \text{откуда } a_4=\frac{1}{4!}f^{IV}(0)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=n!\cdot a_n,$$

$$f^{(n)}(0)=n!\cdot a_n, \quad \text{откуда } a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0).$$

Дальше дифференцировать не имеет смысла, ибо все дальнейшие производные равны нулю. Теперь ясна связь между коэффициентами полинома и его производными, именно:

$$a_0=f(0),\ a_1=f'(0),\quad a_2=\frac{1}{2!}f''(0),\quad a_3=\frac{1}{3!}f'''(0),\ldots,a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0).$$

Оказывается, что всякий полином $f(x)$ можно записать так:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Пусть дана функция $f(x)$, имеющая в точке $x=0$ и в некоторой окрестности этой точки производные до $(n+1)$-го порядка. Для этой функции составим следующий полином степени n:

$$P_n=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Этот полином, называемый полиномом Маклорена, вообще говоря, не равен фукции $f(x)$. Обозначим разность между функцией $f(x)$ и полиномом через R_n:

$$f(x)-P_n=R_n.$$

R_n — называется **остаточным членом** формулы Маклорена; R_n указывает ту ошибку, которую мы сделаем, заменив $f(x)$ через $P_n(x)$, воспользовавшись приближённым равенством:

$$f(x)\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Нам необходимо оценить сделанную ошибку, т. е. оценить остаточный член. Так как

$$R_n=f(x)-\left[f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right],$$

то

$$R_n'=f'(x)-\left[f'(0)+\frac{f''(0)}{1!}x+\frac{f'''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}\right],$$

$$R_n''=f''(x)-\left[f''(0)+\frac{f'''(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{(n-2)!}x^{n-2}\right],$$

. . . .

$$R_n^{(n-1)}=f^{(n-1)}(x)-\left[f^{(n-1)}(0)+\frac{f^{(n)}(0)}{1!}x\right],$$

$$R_n^{(n)}=f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0).$$

Отметим ещё, что

$$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x).$$

В точке $x=0$ получим:

$$R_n(0)=R_n'(0)=R_n''(0)=\ldots=R_n^{(n)}(0)=0,$$

т. е. в точке $x=0$ обращаются в нуль остаточный член и все его производные до n-го порядка. К дроби

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(0)}{x^{n+1}-0^{n+1}}$$

применим формулу Коши. Получим:

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}=\frac{R_n(x')-R_n(0)}{x^{n+1}-0^{n+1}}=\frac{R_n'(x_1)}{(n+1)\,x_1^{\,n}},$$

где значение x_1 заключено между 0 и x. К последней дроби снова применим формулу Коши:

$$\frac{(x\;)}{x^{n+1}}=\frac{R_n'(x_1)}{(n+1)x_1^{\,n}}=\frac{R_n'(x_1)-R_n'(0)}{(n+1)\,[x_1^{\,n}-0^n]}=\frac{R_n''(x_2)}{(n+1)\,nx_2^{\,n-1}},$$

где значение x_2 заключено между 0 и x_1, следовательно, и между 0 и x.

Продолжая этот процесс, получим следующую цепочку равенств:

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}=\frac{R_n'(x_1)}{(n+1)\,x_1^{\,n}}=\frac{R_n''(x_2)}{(n+1)\,nx_2^{\,n-1}}=\frac{R_n''(x_2)-R_n''(0)}{(n+1)\,n\,[x_2^{\,n-1}-0^{n-1}]}=$$

$$=\frac{R_n''(x_3)}{(n+1)\,n\,(n-1)\,x_3^{\,n-2}}=\frac{R_n'''(x_3)-R_n'''(0)}{(n+1)\,n\,(n-1)\,[x_3^{\,n-2}-0^{n-2}]}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{R^{(n)}(x_n)}{(n+1)\,n\ldots2\cdot x_n}=\frac{R_n^{(n)}(x_n)-R_n^{(n)}(0)}{(n+1)!\,(x_n-0)}=\frac{R_n^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!},$$

где значение x_{n+1} заключено между 0 и x. Итак, обозначив x_{n+1} через ξ, имеем:

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

или

$$R_n(x)=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где ξ лежит между 0 и x.

Полученная форма остаточного члена называется формой Лагранжа. Теперь имеем окончательно:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Эта формула называется **формулой Маклорена** или разложением функции $f(x)$ по формуле Маклорена.

§ 171. Разложение функции e^x по формуле Маклорена

Разложим функцию $f(x)=e^x$ по формуле Маклорена.

Решение. Имеем:

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=f^{(n+1)}(x)=e^x,$$
$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=e^0=1,$$
$$f^{(n+1)}(\xi)=e^{\xi}.$$

Следовательно,

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (1)$$

Докажем, что для любого x при неограниченном увеличении n имеем

$$\lim_{n=+\infty} R_n=0.$$

В самом деле: если $0<\xi<x$, то $e^{\xi}<e^x$, значит

$$R_n=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}<\frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1};$$

если же $x<\xi<0$, то $e^{\xi}<e^0=1$, значит,

$$R_n=\frac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!}<\frac{e^0x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Так как

$$\lim_{n=+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$

то

$$\lim R_n=0.$$

Итак, функцию e^x можно аппроксимировать полиномом Маклорена с любой степенью точности: для этого нужно взять «достаточно длинный» полином (достаточно большое n).

При $x=1$ формула принимает вид:

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}, \text{ где } 0<\xi<1.$$

Отсюда получаем приближённое равенство

$$e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!},$$

причём ошибка R_n оценивается неравенством:

$$R_n = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}. \qquad (2)$$

§ 172. Разложение $\sin x$ и $\cos x$ по формуле Маклорена

Разложим функцию $f(x) = \sin x$ по формуле Маклорена.

Решение. Находим последовательно

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x,\\
f'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\\
f''(x) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),\\
f'''(x) &= \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f^{(n)}(x) &= \sin\left[x + n\frac{\pi}{2}\right],\\
f^{(n+1)}(x) &= \sin\left[x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right].
\end{aligned}$$

Отсюда:

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0,\ f^{(5)}(0) = 1,$$

и т. д.

$$f^{(2k)}(0) = 0,\ f^{(4k+1)}(0) = 1,\ f^{(4k+3)}(0) = -1$$

и, кроме того,

$$f^{(n+1)}(\xi) = \sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Окончательно имеем следующее разложение:

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n!}x^n + \\ + \frac{\sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(n+1)!}x^{n+1}$$

или (считая n — нечётным)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n + \left[\frac{0}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right] + \\ + \frac{\sin\left[\xi + (2n+3)\frac{\pi}{2}\right]}{(2n+3)!}x^{2n+3}. \qquad (1)$$

Оценим ошибку R_{2n+2} приближённого равенства

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Имеем:

$$|R_{2n+2}| = \frac{\left|\sin\left[\xi + (2n+3)\frac{\pi}{2}\right]\right|}{(2n+3)!}|x|^{2n+3} \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

При любом x, $\lim R_{2n+2} = 0$. Значит указанная аппроксимация $\sin x$ полиномом может быть сделана сколь угодно близкой, если взять достаточно большое n. Допущенная при этом ошибка будет меньше чем $\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$.

Положим в предыдущем приближённом равенстве $n = 1$. Имеем:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!},$$

причём абсолютная величина ошибки оценивается неравенством:

$$|R_n| < \frac{|x|^5}{5!}.$$

Разложим функцию $f(x) = \cos x$ по формуле Маклорена.

Решение. Находим последовательно:

$$f(x) = \cos x,$$
$$f'(x) = -\sin x,$$
$$f''(x) = -\cos x = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$f'''(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(x) = -\sin\left[x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right],$$
$$f^{(n+1)}(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Отсюда:

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 1,$$
$$f^{(5)}(0) = 0,\ f^{(6)}(0) = -1, \dots,$$

т. е.

$$f^{(4k)}(0) = 1,\ f^{(2k+1)}(0) = 0,\ f^{(4k+2)}(0) = -1,$$

и, кроме того,

$$f^{(n+1)}(\xi) = -\sin\left(\xi + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Окончательно разложение примет вид:

$$\cos x = 1 + \frac{0}{1}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots -$$
$$- \frac{\sin\frac{\pi(n-1)}{2}}{n!}x^n - \frac{\sin\left(\xi + \frac{\pi n}{2}\right)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

или (считая n — нечётным и заменяя его на $2n+1$):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} + \\ + \left[\frac{0}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right] - \frac{\sin\left(\xi + \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

Пользуясь приближённым равенством

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

мы допускаем ошибку

$$R_{2n+1} = -\frac{\sin\left[\xi + \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

Оценим эту ошибку:

$$|R_{2n+1}| = \frac{\left|\sin\left[\xi + \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\right|}{(2n+2)!} |x|^{2n+2} \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!};$$

полагая $n=2$, находим:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

причём

$$|R_5| < \frac{|x|^6}{6!}.$$

Имеем:

$$\lim_{n=+\infty} |R_{2n+1}| \leqslant \lim_{n=+\infty} \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0,$$

т. е. ошибка, которую мы делаем, аппроксимируя функцию $\cos x$ полиномом Маклорена, может быть сделана меньше любого наперёд заданного числа, если взять достаточно длинный полином.

§ 173. Разложение $\ln(1+x)$ по формуле Маклорена

Функция $\ln(1+x)$ и все её производные непрерывны в интервале $(-1, 1)$, содержащем точку 0. Следовательно, можно эту функцию разложить по формуле Маклорена. Вычислим значения функции и её производных в точке $x=0$; находим:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x), & f(0) &= \ln 1 = 0;\\
f'(x) &= \frac{1}{1+x}, & f'(0) &= 1;\\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, & f''(0) &= -1;\\
f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, & f'''(0) &= 2!;\\
f^{(4)}(x) &= \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}, & f^{(4)}(0) &= -3!;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, & f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)!;
\end{aligned}$$

и, наконец,

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}},\quad f^{(n+1)}(\xi)=(-1)^n\frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}}.$$

Подставив полученные значения в формулу Маклорена, получим окончательно:

$$\ln(1+x)=$$
$$=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}},$$

где ξ заключено между 0 и x.

Отметив, что функцию $\ln x$ нельзя разложить по формуле Маклорена, так как эта функция и её производные не определены в точке $x=0$.

Оценим остаточный член

$$R_n=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}.$$

Для этого рассмотрим все возможные значения x из интервала $(-1, 1)$.

1. $x=0$; тогда $R_n=0$ при любом значении n.

2. $0<x<1$; тогда $x^{n+1}<1$, $1+\xi>1$, $\frac{1}{1+\xi}<1$ и значит:

$$|R_n|=\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}<\frac{1}{n+1},$$

и следовательно,

$$\lim R_n=0.$$

3. Если, наконец, $-1<x<0$, то и тогда $\lim R_n=0$ — доказательство этого читатель найдёт в более полных курсах анализа.

Итак, для всех x из интервала $(-1,1)$ функцию $\ln(1+x)$ можно аппроксимировать полиномом Маклорена с любой степенью точности, взяв n достаточно большим.

§ 174. Некоторые примеры, связанные с разложением функции по формуле Маклорена

Пример 1. Найти предел

$$\lim_{x=+\infty}\frac{e^x}{x^n}.$$

Решение. Имеем

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!},$$

откуда

$$\frac{e^x}{x^n}=\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{2!\,x^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{xe^\xi}{(n+1)!}.$$

В точке $x=+\infty$ первые n слагаемых правой части равенства имеют предел, равный 0, слагаемое $\frac{1}{n!}$ остаётся неизменным. Остаётся исследовать предел последнего слагаемого. Так как исследуется предел в точке $x=+\infty$, то с самого начала будем предполагать, что $x>0$, следовательно и $\xi>0$, откуда $e^{\xi}>e^0=1$. Итак,

$$\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x>\frac{x}{(n+1)!}.$$

В точке $x=+\infty$ имеем $\lim\limits_{n=+\infty}\frac{x}{(n+1)!}=+\infty$, а потому и $\lim\limits_{n=+\infty}\frac{e^{\xi}x}{(n+1)!}=+\infty$.

Окончательно находим:

$$\lim_{x=+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$$

т. е. показательная функция e^x растёт быстрее степенной функции x^n, как бы велик ни был показатель n. Геометрически это означает, что при любом n график функции $y=e^x$ при достаточном удалении вправо окажется выше графика параболы $y=x^n$, причём разность e^x-x^n их ординат становится больше любого наперёд заданного числа N для всех достаточно больших значений x.

Пример 2. Оценить ошибку приближённого равенства

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}=2{,}708\ldots$$

Решение. Ошибка R_n оценивается неравенством

$$R_n\leqslant\frac{e}{5!}<\frac{3}{5!}=\frac{3}{120}=0{,}025.$$

Пример 3. При каком n будет иметь место равенство:

$$e\approx 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

с точностью 0,0001.

Ошибка указанного приближённого равенства оценивается неравенством

$$R_n<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Требуемая точность будет выполнена при условии

$$\frac{3}{(n+1)!}<0{,}0001$$

или

$$(n+1)!>30\,000;$$

но

$$2!=2,\ 3!=6,\ 4!=24,\ 5!=120,\ 6!=720,\ 7!=5040,\ 8!=40\,320,$$

следовательно, при $n+1=8$, т. е. $n=7$ мы достигнем требуемой точности Итак,

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=2{,}7182$$

с точностью до 0,0001.

Пример 4. При каком n полином Маклорена будет давать приближённое значение $\cos\frac{\pi}{10}$ с точностью до 0,00001.

Решение. Имеем:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

причём $|R_{2n+1}| < \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$. Так как $\frac{\pi}{10} < \frac{1}{3}$, то $|R_{2n+1}| < \frac{1}{3^{2n+2}(2n+2)!}$.

Точность 0,00001 будет выполнена при условии

$$\frac{1}{3^{2n+2}(2n+2)!} < 0{,}00001$$

или

$$(2n+2)! \quad 3^{2n+2} > 100\,000.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} n=0: &\quad 2!\cdot 3^2 = 18, \\ n=1: &\quad 4!\cdot 3^4 = 1944, \\ n=2: &\quad 6!\cdot 3^6 = 524880 > 100\,000. \end{aligned}$$

Итак, требуемая точность будет выполнена при $n=2$:

$$\cos\frac{\pi}{10} \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4$$

с точностью до 0,00001.

Пример 5. Какой длины полином достаточно взять, чтобы вычислить $\sin\frac{\pi}{12}$ с точностью до 0,0001.

Для оценки ошибки имеем неравенства (заметим, что $\frac{\pi}{12} < \frac{1}{3}$):

$$|R_{2n+2}| < \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} < \frac{1}{3^{2n+3}(2n+3)!} < 0{,}0001,$$

или

$$3^{2n+3}(2n+3)! > 10\,000.$$

Находим n:

$$\begin{aligned} n=0;&\quad 3^3\cdot 3! = 162, \\ n=1;&\quad 3^5\cdot 5! = 243\cdot 120 > 10\,000. \end{aligned}$$

Итак $n=1$, и окончательно находим

$$\sin 15^\circ = \sin\frac{\pi}{12} \approx \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{12}\right)^3$$

с точностью до 0,0001.

§ 175. Формула Тейлора

Рассмотрим полином:

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} P(a) &= a_0, \\ P'(a) &= a_1, \\ \frac{P''(a)}{2!} &= a_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{P^{(n)}(a)}{n!} &= a_n, \end{aligned}$$

так что всякий полином указанного вида можно записать в виде:

$$P(x)=P(a)+P'(a)(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Определение. *Если функция*

$$y=f(x)$$

имеет в точке $x=a$ производные до порядка n включительно, то полином

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

называется полиномом Тейлора для этой функции, построенным в окрестности точки $x=a$. Разность между функцией $f(x)$ и её полиномом Тейлора называется n-ым остаточным членом формулы Тейлора:

$$f(x)-P_n(x)=R_n(x).$$

Имеем:

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x) \tag{1}$$

или

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x).$$

Эта формула называется формулой Тейлора для функции $f(x)$, записанной в окрестности точки $x=a$.

Если положить $x-a=x'$, то $f(x)=f(a+x')=\varphi(x')$ и формула принимает вид:

$$\varphi(x')=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}x'+\dots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}x'^n+\overline{R}_n(x'),$$

где

$$\overline{R}_n(x')=R_n(x'+a),$$

т. е. для функции $f(a+x')=\varphi(x')$ эта формула является формулой Маклорена.

Для формулы Маклорена

$$\overline{R}_n(x')=\frac{\overset{(n+1)}{\varphi}(\xi)}{(n+1)!},$$

значит

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\xi)}{(n+1)!}, \tag{2}$$

ибо

$$f^{(n+1)}(a+x')=\varphi^{(n+1)}(x');$$

при этом ξ лежит между 0 и $x-a$. Так как значение ξ заключено между 0 и x', т. е. $\xi=\theta x'=\theta(x-a)$, где $0<\theta<1$, то остаточный член можно записать в виде

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{3}$$

Обозначим x через b; получим ещё следующий вид формулы Тейлора:

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(b-a)]}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \tag{4}$$

Эта формула справедлива при всяком n, лишь бы функция $f(x)$ имела производные до $n+1$-го порядка.

Положим $n=0$, получим:

$$f(b)=f(a)+(b-a)+f'[a+\theta(b-a)]; \tag{5}$$

так как $0<\theta<1$, то $a+\theta(b-a)$ есть число, заключённое между a и b. Обозначив это число через ξ, получим

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi),$$

а это и есть формула Лагранжа о конечном приращении.

Обозначив в формуле (4) a через x, $b-a$ через h, т. е. $b=a+$ $+h=x+h$, получим:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Примечание. Формула Тейлора может быть выведена независимо от формулы Маклорена, являющейся её частным случаем.

Пример 1. Найти разложение функции

$$y=f(x)=2-3x+x^2-4x^3$$

по формуле Тейлора в окрестности точки $a=-2$.

Решение. Имеем:

$$f(-2)=44;$$
$$f'(x)=-3+2x-12x^2,\ f'(-2)=-55;$$
$$f''(x)=2-24x,\ f''(-2)=50;$$
$$f'''(x)=-24,\ f'''(-2)=-24.$$

Все дальнейшие производные равны нулю. Итак, взяв $n=3$, получим.

$$f(x)=44-\frac{55}{1!}(x+2)+\frac{50}{2!}(x+2)^2-\frac{24}{3!}(x+2)^3.$$

В этом примере

$$R_n=R_3=0.$$

§ 176. Приложение формулы Тейлора к теории локальных экстремумов функций одного аргумента

Воспользуемся формулой Тейлора для вывода достаточных признаков существования максимума и минимума.

Пусть все производные функции $f(x)$ до $(n-1)$-го порядка включительно равны нулю в точке $x=a$, а производная n-го порядка отлична от нуля:

$$f'(a)=f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0, \quad f^{(n)}(a)\neq 0.$$

При этих условиях и в предположении, что функция удовлетворяет требованиям разложения её по формуле Тейлора, причём $n+1$-я производная ограничена в окрестности исследуемой точки, будем иметь:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \quad 0<\theta<1,$$

или

$$\Delta y=f(a+h)-f(a)=\frac{h^n}{n!}\left[f^{(n)}(a)+\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta h)\right].$$

При достаточно малых значениях $|h|$ знак второго множителя правой части равенства совпадает со знаком $f^{(n)}(a)$ (так как

$$\lim\left[\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta h)\right]=0).$$

Пусть n — нечётное число. Тогда множитель $\frac{h^n}{n!}$ положителен при $h>0$ и отрицателен при $h<0$ и, следовательно, Δy имеет разные знаки слева и справа от a; это означает, что в точке $x=a$ нет экстремума.

Если n — чётное число, то $\frac{h^n}{n!}>0$ независимо от знака h, следовательно, знак Δy совпадает со знаком $f^{(n)}(a)$, т. е. при $f^{(n)}(a)>0$ и $\Delta y>0$ или $f(a+h)>f(a)$ имеем минимум в точке $x=a$; при $f^{(n)}(a)<0$ и $\Delta y<0$ или $f(a+h)<f(a)$ имеем максимум в точке $x=a$.

§ 177. Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \tag{1}$$

где a_i — коэффициенты ряда — являются числами.

Разъясним смысл выражения (1). Полагая $x=x_0$, получим числовой ряд:

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n+\cdots \tag{2}$$

Этот ряд может сходиться, а может и расходиться. Если ряд расходится, то такое значение x_0 мы исключим из рассмотрения. Пусть при $x=x_0$ ряд сходится. Рассмотрим множество всех значений x, для которых ряд (1) сходится. Каждому такому значению x соответствует вполне определённое значение суммы ряда, следовательно, сумма s ряда является функцией аргумента x, а указанное выше множество значений x служит областью определения этой функции. Частичная сумма

$$s_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

первых n членов ряда является полиномом. Пусть n, т. е. число членов полинома s_n, неограниченно растёт. Для каждого значения x, входящего в область определения функций $s(x)$, число s_n представляет частичную сумму сходящегося числового ряда и при $n=+\infty$ эта частичная сумма имеет предел, равный значению функции s при данном x.

Выражение вида

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots \tag{3}$$

также называется степенным рядом. При замене $x-a$ через x', получим:

$$a_0+a_1x'+a_2x'^2+\cdots+a_nx'^n+\cdots$$

Пример 1. Исследовать ряд

$$x+(2x)^2+(3x)^3+\cdots+(nx)^n+\cdots$$

Решение. В первую очередь найдём область определения суммы ряда. По признаку Коши имеем:

$$\lim_{n=+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n=+\infty}|nx|=+\infty, \text{ если } x\neq 0,$$

т. е. ряд расходится при любом значении $x\neq 0$. При $x=0$ имеем:

$$0+0+0+\cdots+0+\cdots;$$

ряд сходится к нулю.

В этом примере сумма ряда представляет функцию, область определения которой состоит только из одной точки $x=0$.

Пример 2. $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$

Находим: $s_n=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{1-x^n}{1-x}$, откуда ясно, что $\lim\limits_{n=+\infty}s_n=\dfrac{1}{1-x}$, если $|x|<1$. Если $|x|\geqslant 1$, то данный ряд расходится.

Итак:

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x},$$

где

$$|x|<1.$$

Примечание. Функция $\dfrac{1}{1-x}$ определена для всех значений x, кроме $x=1$. Функция $1+x+x^2+\cdots$ определена только для значений x, где $|x|<1$. Так как области определения этих функций различны, то различны и сами функции. Но в интервале $(-1, 1)$ эти функции совпадают — в этом и заключается смысл равенства $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}$.

Разность R_n между суммой $s(x)$ ряда и частичной его суммой $s_n(x)$ называется остаточным членом ряда:

$$R_n(x)=s(x)-s_n(x).$$

Ясно, что об остаточном члене ряда имеет смысл говорить лишь для тех значений x, при которых ряд сходится. Остаточный член ряда в свою очередь является суммой ряда

$$a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\cdots+a_{n+k}x^{n+k}+\cdots$$

Для каждого данного значения x из области сходимости ряда остаточный член по модулю может быть сделан меньше любого наперёд заданного положительного числа ε. Для этого нужно лишь взять n достаточно большим.

§ 178. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости

Теорема (Абеля). *Если степенной ряд*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1}$$

сходится при $x=x_0\neq 0$, то он абсолютно сходится при любом значении x, абсолютная величина которого меньше $|x_0|$.

Доказательство. Дано, что ряд

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n+\cdots$$

сходится. Следовательно, для этого ряда выполняется необходимый признак сходимости, т. е. $\lim(a_nx_0^n)=0$, отсюда следует, что последовательность чисел

$$a_0,\ a_1x_0,\ a_2x_0^2,\ \ldots,\ a_nx_0^n,\ \ldots$$

ограничена, т. е. существует число M такое, что $|a_nx_0^n|<M$ при любом n.

Пусть $|x|<|x_0|$, т. е. $\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$. Геометрическая прогрессия

$$M+M\left|\frac{x}{x_0}\right|+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+\cdots+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+\cdots$$

сходится, так как знаменатель прогрессии $\left|\frac{x}{x_0}\right|$ меньше единицы. Сравним ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

с этой прогрессией. Имеем:

$$|a_n x^n| = |a_n| \cdot |x|^n = |a_n| \left| x_0 \frac{x}{x_0} \right|^n =$$

$$= |a_n| \cdot |x_0|^n \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n,$$

т. е. модули членов исследуемого ряда (1) меньше членов сходящегося ряда — геометрической убывающей прогрессии. Отсюда следует, что ряд (1) сходится абсолютно, ч. т. д.

Следствие. *Если при $x = x_0$ ряд (1) расходится, то он расходится при любом значении x, абсолютная величина которого больше чем $|x_0|$.*

Доказательство следует из теоремы Абеля: если бы ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

сходился при $|x| > |x_0|$, то он сходился бы и при x_0, что противоречит условию.

Теорема Абеля даёт ясное представление о структуре области сходимости степенного ряда.

Случай I. Предположим, что ряд сходится только при $x = 0$. В этом случае мы будем говорить, что его радиус сходимости равен нулю.

Случай II. Предположим, что существуют такие числа x_1 и x_0, при которых ряд соответственно сходится и расходится. Пусть $x_0 > 0$. Разделим сегмент $[0, x_0]$ пополам и возьмём тот из двух полученных сегментов $[\alpha_1, \beta_1]$, в одной из границ которого (при $x = \alpha_1$) ряд сходится, а в другой расходится (при $x = \beta_1$). Этот сегмент разделим опять пополам и опять возьмём тот из двух полученных сегментов $[\alpha_2, \beta_2]$, в одной из границ которого ($x = \alpha_2$) ряд расходится, а в другой сходится ($x = \beta_2$) и т. д. Так мы построим две последовательности: $0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$

$$x_0, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_n, \dots,$$

обладающие следующими свойствами:

1) $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots \leqslant \alpha_n \leqslant \dots, x_0 \geqslant \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \dots \geqslant \beta_n \geqslant \dots$

2) Любое $\alpha_i <$ любого β_n;

3) предел разности $\beta_n - \alpha_n$ равен 0. Значит существует и притом только одно число R, являющееся пределом обеих этих последовательностей. Ясно, что если $|x_0| < R$, то при $x = x_0$ рассматриваемый ряд сходится, а при $x = x_0$, где $|x_0| > R$ — расходится.

Определение. *Интервалом сходимости степенного ряда называется такой интервал $(-R, R)$, что для всякого x, лежащего в этом интервале, ряд сходится и притом абсолютно, а для вся-*

кого x, лежащего вне сегмента $[-R, R]$, ряд расходится. Число R называется радиусом сходимости.

На границах $-R$ и R интервала сходимости ряд может расходиться условно или абсолютно.

Случай III. Возможно, что ряд сходится на всей прямой, т. е. интервал сходимости есть $(-\infty, +\infty)$. Для такого ряда условились считать $R=+\infty$.

§ 179. Непрерывность суммы степенного ряда

Пусть $s(x)$ есть сумма степенного ряда

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

и R — его радиус сходимости. Возникает вопрос, является ли функция $s(x)$ непрерывной в точках интервала $(-R, R)$.

Теорема. *Во всякой точке x_0 интервала сходимости $(-R, R)$, $-R<x_0<R$ сумма $s(x)$ степенного ряда непрерывна.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что для всех h, $|h|<\delta$, будет $|s(x_0+h)-s(x_0)|<\varepsilon$, где точка x_0+h не выходит из интервала $(-R, R)$.

Пусть $s_n(x)$ есть частичная сумма первых n членов ряда:

$$s_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$$

и $R_n(x)$ — остаточный член:

$$R_n(x)=a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\ldots+a_{n+k}x^{n+k}+\ldots.$$

Для всякого x из интервала $(-R, R)$ мы имеем:

$$s(x)=s_n(x)+R_n(x).$$

Как бы близка ни была точка x_0 к границе интервала $(-R, R)$, всегда найдётся положительное число C, также заключённое в этом же интервале и ещё более близкое к его границе:

$$|x_0|<C<R.$$

Числовой ряд

$$a_0+a_1C+a_2C^2+\ldots+a_nC^n+\ldots$$

сходится абсолютно, т. е. ряд

$$|a_0|+|a_1C|+|a_2C^2|+\ldots+|a_nC^n|+\ldots,$$

составленный из абсолютных величин его членов, сходится. Обозначим сумму последнего ряда через σ, частичную сумму его через σ_n и остаточный член через r_n:

$$\sigma_n=|a_0|+|a_1C|+|a_2C^2|+\ldots+|a_{n-1}C^{n-1}|,$$
$$r_n=|a_nC^n|+|a_{n+1}C^{n+1}|+\ldots+|a_{n+k}C^{n+k}|+\ldots$$

Предел остаточного члена равен нулю. Следовательно, для числа $\frac{\varepsilon}{3}$ найдётся такое n, что $|r_n|<\frac{\varepsilon}{3}$. Выбрав таким образом n, зафиксируем его и в дальнейших рассуждениях больше не будем менять.

Пусть h — приращение аргумента x_0. Оценим модуль приращения суммы. Имеем:

$$\begin{aligned}|s(x_0+h)-s(x_0)| &= |[s_n(x_0+h)+R_n(x_0+h)]-[s_n(x_0)+R_n(x_0)]| = \\ &= |[s_n(x_0+h)-s_n(x_0)]+R_n(x_0+h)-R_n(x_0)| \leqslant \\ &\leqslant |s_n(x_0+h)-s_n(x_0)|+|R_n(x_0+h)|+|R_n(x_0)|.\end{aligned}$$

При данном (фиксированном) n функция

$$s_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$$

представляет полином, следовательно, эта функция непрерывна при любом значении x, в частности при $x=x_0$. Поэтому найдётся такое $\delta>0$, что для всех h, $|h|<\delta$ будем иметь

$$|s_n(x_0+h)-s_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Итак, если $|h|<\delta$, то

$$|s(x_0+h)-s(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+|R_n(x_0+h)|+|R_n(x_0)|.$$

Остаётся оценить слагаемые $|R_n(x_0+h)|$ и $|R_n(x_0)|$. Докажем, что каждое из них меньше чем $\frac{\varepsilon}{3}$. Потребуем, чтобы для h ещё было $|x_0+h|<C$; для этого нам, возможно, придётся сделать δ ещё меньшим. Так как $|x_0|<C$ и $|x_0+h|<C$, то

$$|a_kx_0^k|<|a_kC^k| \text{ и } |a_k(x_0+h)^k|<|a_kC^k|,$$

откуда

$$\begin{aligned}|R_n(x_0)| &= |a_nx_0^n+a_{n+1}x_0^{n+1}+\ldots+a_{n+k}x_0^{n+k}+\ldots| \leqslant \\ &\leqslant |a_nx_0^n|+|a_{n+1}x_0^{n+1}|+\ldots+|a_{n+k}x_0^{n+k}|+\ldots< \\ &< |a_nC^n|+|a_{n+1}C^{n+1}|+\ldots+|a_{n+k}C^{n+k}|+\ldots=r_n<\frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}|R_n(x_0+h)| &= |a_n(x_0+h)^n+a_{n+1}(x_0+h)^{n+1}+\ldots+a_{n+k}(x_0+h)^{n+k}+\ldots| \leqslant \\ &\leqslant |a_n(x_0+h)^n|+|a_{n+1}(x_0+h)^{n+1}|+\ldots+|a_{n+k}(x_0+h)^{n+k}|+\ldots< \\ &< |a_nC^n|+|a_{n+1}C^{n+1}|+\ldots+|a_{n+k}C^{n+k}|+\ldots=r_n<\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Окончательно имеем:

$$|s(x_0+h)-s(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

для всех h, модуль которых меньше чем δ (и, конечно, таких, чтобы число x_0+h входило в интервал сходимости). А так как положительное число ε было произвольным, то этим доказана непрерывность суммы степенного ряда в произвольной точке x_0 интервала сходимости $(-R, R)$.

Примечание. Из доказанной теоремы не следует непрерывность суммы ряда на концах $x=-R$ и $x=R$ интервала сходимости (в случае, если на них ряд сходится) — в теореме речь шла только о значениях x, модуль которых строго меньше чем R: $-R<x<R$.

§ 180. Интегрирование степенных рядов

Для всех точек интервала сходимости степенного ряда его сумма представляет непрерывную функцию, следовательно, эту функцию можно интегрировать в пределах от a до b, где a и b — любые точки интервала сходимости (границы интервала не входят в интервал и, следовательно, исключаются). Докажем, что для степенных рядов имеет место теорема, аналогичная теореме из интегрального исчисления о том, что интеграл суммы равен сумме интегралов.

Теорема. *Если проинтегрировать почленно степенной ряд*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

в пределах от a до b, где a и b — произвольные точки его интервала сходимости, то получим сходящийся ряд, сумма которого равна интегралу в тех же пределах от суммы данного ряда:

$$\int_a^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots)\, dx =$$

$$= \int_a^b a_0 dx + \int_a^b a_1 x\, dx + \int_a^b a_2 x^2 dx + \ldots + \int_a^b a_n x^n dx + \ldots$$

(т. е. ряд можно интегрировать в промежутке, лежащем в интервале сходимости).

Доказательство. Обозначим через s сумму ряда (1), через s_n частичную сумму и через R_n — остаточный член:

$$s(x) = s_n(x) + R_n(x).$$

Находим:

$$\int_a^b s(x)\, dx = \int_a^b s_n(x)\, dx + \int_a^b R_n(x)\, dx,$$

где a и b — два любых числа из интервала $(-R, R)$ сходимости ряда; так как $s_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$ представляет сумму конечного числа слагаемых, то

$$\int_a^b s_n(x)\, dx = \int_a^b a_0 dx + \int_a^b a_1 x\, dx + \int_a^b a_2 x^2\, dx + \ldots + \int_a^b a_{n-1} x^{n-1}\, dx,$$

т. е. $\int_a^b s_n(x)\, dx$ является частичной суммой ряда

$$\int_a^b a_0 dx + \int_a^b a_1 x\, dx + \int_a^b a_2 x^2\, dx + \ldots + \int_a^b a_{n-1} x^{n-1} dx + \ldots \qquad (2)$$

Требуется доказать, что эта частичная сумма имеет предел в точке $n = +\infty$, равный $\int_a^b s\, dx$. Для этого достаточно доказать, что предел $\int_a^b R_n dx$ равен 0 в точке $n = +\infty$. Пусть ε — произвольное положительное число. Возьмём произвольное положительное число C, заключённое в интервале сходимости — большее чем $|a|$ и чем $|b|$ (точка C — удалена от точки 0 дальше, чем точка a и b, но ближе, чем точка R).

В точке C (так же, как и в любой другой точке интервала сходимости) ряд (1) абсолютно сходится, т. е. сходится ряд

$$|a_0| + |a_1C| + |a_2C^2| + \ldots + |a_{n-1}C^{n-1}| + \ldots;$$

поэтому остаточный его член:

$$r_n = |a_nC^n| + |a_{n+1}C^{n+1}| + \ldots + |a_{n+k}C^{n+k}| + \ldots$$

может быть сделан меньше любого наперёд заданного положительного числа для всех достаточно больших значений n. В частности,

$$r_n < \frac{\varepsilon}{|b-a|},$$

начиная с некоторого n.

Сравним два ряда

$$|a_nC^n| + |a_{n+1}C^{n+1}| + \ldots + |a_{n+k}C^{n+k}| + \ldots$$

и

$$a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots + a_{n+k}x^{n+k} + \ldots,$$

где x подчиняется неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, если $a < b$, или $b \leqslant x \leqslant a$, если $b < a$.

Первый из этих рядов сходится, причём сумма его r_n меньше, чем $\frac{\varepsilon}{|b-a|}$. Члены второго ряда по модулю меньше членов первого, так как $|x| < C$, откуда

$$|a_nx^k| < |a_kC^k|.$$

Следовательно, второй ряд сходится (абсолютно), и сумма его R_n по модулю меньше, чем r_n и, тем более, меньше, чем $\frac{\varepsilon}{|b-a|}$:

$$|R_n| < r_n < \frac{\varepsilon}{|b-a|}.$$

Отсюда, интегрируя, получим:

$$\int_a^b |R_n|\,dx < \left| \int_a^b \frac{\varepsilon\,dx}{|b-a|} \right| = \varepsilon$$

для достаточно больших значений n.

Так как ε было произвольным, то последнее неравенство и означает, что

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b R_n(x)\,dx = 0.$$

Окончательно имеем:

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b a_0dx + \int_a^b a_1x\,dx + \int_a^b a_2x^2dx + \ldots + \int_a^b a_{n-1}x^{n-1}dx + \ldots.$$

Отметим, что в последнем равенстве справа стоят числа: $\int_a^b a_0\,dx$,

$\int\limits_a^b a_1 x\,dx, \ldots,$ т. е. числовой ряд (2) сходится, и сумма его равна числу $\int\limits_a^b s(x)\,dx$. Заменим букву b буквой x и будем считать, что x означает любое число интервала $(-R, R)$. Кроме того, примем $a=0$; тогда последнее равенство запишется так:

$$\int\limits_0^x s(x)\,dx = \int\limits_0^x a_0 dx + \int\limits_0^x a_1 x\,dx + \int\limits_0^x a_2 x^2\,dx + \ldots + \int\limits_0^x a_{n-1} x^{n-1} dx + \ldots$$

Теперь уже в правой части равенства записан степенной ряд: он сходится в интервале $(-R, R)$ и сумма его равна функции $\int\limits_0^x s(x)\,dx$.

Пример 1. Имеем:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots,$$

где $|x| < 1$. Интегрируя ряд от 0 до x, где $|x| < 1$, получим

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{1-x} = \int\limits_0^1 dx + \int\limits_0^1 x\,dx + \int\limits_0^1 x^2 dx + \ldots + \int\limits_0^1 x^{n-1} dx + \ldots$$

или

$$-\ln|1-x| = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots,$$

где

$$|x| < 1.$$

В частности, при $x = \frac{1}{2}$ получим

$$-\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2 =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots$$

§ 181. Дифференцирование степенных рядов

Теорема 1. *Если $s(x)$ есть сумма степенного ряда $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$, то $s(x)$ в каждой точке интервала сходимости имеет производную, причём эта производная равна ряду, полученному почленным дифференцированием данного:*

$$s'(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots)' =$$
$$= a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

Радиус сходимости ряда:

$$a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

равен радиусу сходимости первоначального ряда.

Доказательство:

Ряд

$$1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1}+\ldots,$$

где $|q|<1$, — *сходится.*

Применим признак Даламбера:

$$a_n=nq^{n-1},\ a_{n+1}=(n+1)q^n,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{n+1}{n}|q|;\quad \lim\left|\frac{u_{n+1}}{a_n}\right|=q<1,$$

следовательно, ряд сходится. Теперь докажем, что

если степенной ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

имеет $(-R, R)$ *интервалом сходимости и функцию* $s(x)$ *своей суммой, то ряд, полученный путём его почленного дифференцирования:*

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots \tag{2}$$

имеет тот же интервал сходимости, а сумма его $\sigma(x)$ *равна производной* $s'(x)$, *т. е. степенной ряд «можно» почленно дифференцировать в интервале сходимости.*

Сначала докажем, что для ряда (2) $(-R, R)$ служит интервалом сходимости, т. е. докажем, что в любой точке интервала $(-R, R)$ ряд сходится, а в любой точке вне сегмента $[-R, R]$ ряд расходится.

Пусть x_0 — произвольная точка интервала $(-R, R)$: $|x_0|<R$.

В точке c интервала сходимости, где $|x_0|<c<R$, ряд (1) сходится. Следовательно, предел n-го члена этого ряда равен нулю: $\lim a_{n-1}c^{n-1}=0$. Итак, последовательность чисел $a_0, a_1c, a_2c^2, \ldots, a_{n-1}c^{n-1}, \ldots$ сходится к нулю, поэтому эта последовательность ограничена:

$$|a_nc^n|<M$$

при любом n. Теперь имеем: $|x_0|<c$,

$$|na_nx_0^{n-1}|=n|a_nc^{n-1}|\cdot\left|\frac{x_0}{c}\right|^{n-1}=n|a_nc^n|\cdot\left|\frac{1}{c}\right|\left|\frac{x_0}{c}\right|^{n-1}<$$

$$<n\frac{M}{c}\left|\frac{x_0}{c}\right|^{n-1},\quad \text{причём}\quad \left|\frac{x_0}{c}\right|<1.$$

Ряд, для которого n-й член есть $\frac{M}{c}n\left|\frac{x_0}{c}\right|^{n-1}$, т. е. ряд

$$\frac{M}{c}\cdot 1+\frac{M}{c}\cdot 2\left|\frac{x_0}{c}\right|+\cdots+\frac{M}{c}n\left|\frac{x_0}{c}\right|^{n-1}\cdots=$$

$$=\frac{M}{c}\left[1+2\left|\frac{x_0}{c}\right|+\cdots\right]$$

сходится, а так как члены $na_nx_0^{n-1}$ исследуемого ряда меньше по модулю соответствующих членов этого сходящегося ряда, то и ряд

$$a_1+2a_2x_0+3a_3x_0^2+\ldots+na_nx_0^{n-1}+\ldots$$

сходится. Этим доказано, что в любой точке интервала $(-R, R)$ ряд (2) сходится.

Пусть x_0 — точка, лежащая вне сегмента $[-R, R]$, т. е. $|x_0| > R$. Предположим, что в этой точке ряд (2) сходится. Тогда по теореме Абеля этот ряд сходится абсолютно во всякой точке c, где $c| < |x_0|$. Возьмём точку c, заключённую между R и $|x_0|$.

Из нашего предположения следует сходимость ряда

$$|a_1| + 2|a_2c| + 3|a_3c^2| + \ldots + n|a_nc^{n-1}| + \ldots$$

Умножив все члены последнего ряда на c, получим также сходящийся ряд

$$|a_1c| + 2|a_2c^2| + 3|a_3c^3| + \ldots + n|a_nc^n| + \ldots;$$

так как $|a_nc^n| \leqslant n|a_nc^n|$, то ряд:

$$|a_1c| + |a_2c^2| + |a_3c^3| + \ldots + |a_nc^n| + \ldots,$$

—сходится.

Таким образом, ряд (1) сходится в точке $c > R$. Это противоречие объясняется неверной предпосылкой.

1-я часть теоремы доказана. Перейдём к доказательству 2-й части теоремы:

$(-R, R)$ является интервалом сходимости для ряда (2) из производных, следовательно, на основании теоремы об интегрировании степенных рядов, имеем для любого $|x| < R$:

$$\int_0^x \sigma(x)\,dx = \int_0^x a_1 dx + \int_0^x 2a_2x\,dx + \ldots + \int_0^x na_nx^{n-1}dx + \ldots =$$
$$= a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = s(x) - a_0.$$

Дифференцируя обе части равенства

$$\int_0^x \sigma(x)\,dx = s(x) - a_0,$$

получим

$$\sigma(x) = s'(x),$$

т. е. производная $s'(x)$ от суммы ряда (1) равна сумме $\sigma(x)$ ряда из производных, ч. т. д.

Пример 1. Для $|x| < 1$ имеем

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Дифференцируя, получим равенство:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$$

также верное для $|x| < 1$.

Пример 2. Ряд

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

сходится в интервале $(-1, 1)$, так как при $|x| < 1$ он представляет бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, сумма которой равна $\frac{1}{1+x}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

Дифференцируя последнее равенство, получим равенство

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \ldots + n(-1)^n x^{n-1} + \ldots,$$

верное для $|x| < 1$.

Если $(-R, R)$ есть интервал сходимости данного ряда A, то после интеграции получим ряд B, имеющий тот же интервал сходимости. В самом деле, ряд A является рядом, составленным из производных ряда B, и на основании только что доказанной теоремы они имеют один и тот же интервал сходимости. Невыясненной остаётся лишь сходимость ряда на границах интервала.

Дифференцируя ряд из производных ещё раз, мы снова получим ряд, имеющий тот же интервал сходимости и равный второй производной от суммы первоначального ряда и т. д. Итак, *если ряд*

$$s(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

имеет интервал сходимости $(-R, R)$, то в этом интервале функция $s(x)$ бесконечно дифференцируема *) *и её n-я производная равна сумме ряда, составленного из n-х производных членов данного ряда:*

$$s'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$
$$s''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + 3 \cdot 4 a_4 x^2 + \ldots + (n-1) n a_n x^{n-2} + \ldots,$$
$$s'''(x) = 2 \cdot 3 \cdot a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 a_4 x + 3 \cdot 4 \cdot 5 a_5 x^2 + \ldots$$
$$\ldots + (n-2)(n-1) n a_n x^{n-3} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s^{(p)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p a_p + 2 \cdot 3 \ldots (p+1) a_{p+1} x + \ldots$$
$$\ldots + (n-p+1)(n-p+2) \ldots n a_n x^{n-p} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

все эти ряды имеют один и тот же интервал сходимости (о сходимости каждого из них на границах интервала мы ничего не утверждаем).

---

*) Т. е. имеет производную любого порядка.

§ 182. Ряды Тейлора и Маклорена

Пусть дана функция $s(x)$, бесконечно дифференцируемая в точке $x=a$. Найдём значения функции и её производных в этой точке и составим ряд

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (1)$$

Этот ряд называется **рядом Тейлора** для функции $f(x)$, в частности, если $a=0$, то рядом Маклорена:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (2)$$

Пусть $s(x)$ — сумма ряда (1), $(a-R,\ a+R)$ — его интервал сходимости. В частности, этот интервал может выродиться в одну точку $x=a$ или может оказаться всей прямой. Ряд может сходиться также в одной или обеих границах своего интервала сходимости. Таким образом множество точек сходимости ряда Тейлора состоит из интервала $(a-R,\ a+R)$ и, возможно, ещё из одной или двух его границ $a-R$ и $a+R$:

$$(a-R,\ a+R) \text{ или } [a-R,\ a+R) \text{ или } (a-R,\ a+R]$$

или

$$[a-R,\ a+R].$$

Пока ниоткуда не следует, что сумма $s(x)$ ряда равна функции $f(x)$. Наша задача и заключается в выяснении связи между $s(x)$ и $f(x)$.

Пусть $s_n(x)$ — частичная сумма ряда Тейлора. Разность $f(x)-s_n(x)$ мы назвали остаточным членом формулы (а не ряда!) Тейлора: $R_n(x)=f(x)-s_n(x)$, причём мы его представили в форме Лагранжа:

$$R_n=\frac{f^{(n)}(a+\theta x)}{n!}(x-a)^n.$$

Если для некоторого множества M значений x остаточный член R_n стремится к нулю:

$$\lim_{n=+\infty} R_n=\lim_{n=+\infty}[f(x)-s_n(x)]=0 \text{ или } \lim_{n=+\infty} s_n(x)=f(x),$$

то это и означает, что сумма ряда равна функции $f(x)$ для всех точек множества M, так как по определению суммы ряда она также является пределом s_n в точке $n=+\infty$.

Ясно, что множество M либо совпадает, либо является частью области сходимости ряда (1).

Итак, для всех значений x из множества M и только для них мы вправе писать равенство:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (3)$$

— это и есть разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора. В частности, если $a=0$, то получим:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \tag{4}$$

— разложение функции в ряд Маклорена.

Для каждого значения x из множества M можно взять столь большие n, чтобы $s_n(x)$ было сколь угодно близко к $f(x)$, иначе говоря, на множестве M можно функцию $f(x)$ аппроксимировать полиномами $s_n(x)$ с любой степенью точности. Ошибка, которую мы делаем при этой аппроксимации, равна остаточному члену формулы Тейлора.

При решении задач на разложение функции в ряд Тейлора (или Маклорена) рекомендуется следующая последовательность действий.

1. Найти общую формулу для n-й производной.

2. Найти $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$, если речь идёт о формуле Тейлора, или
$f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$, если речь идёт о формуле Маклорена.

3. Найти остаточный член R_n:

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

в случае разложения в ряд Тейлора и

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

в случае разложения в ряд Маклорена.

4. Найти множество M значений x, для которых $\lim R_n=0$.

В простых случаях это множество состоит из интервала $(a-R,\ a+R)$ сходимости ряда

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

и возможно одной или двух границ этого интервала.

5. Написать разложение в ряд Тейлора

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

или Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots,$$

верное только на множестве M значений x.

§ 183. Разложение e^x в ряд Маклорена

Имеем:

1. $f^{(n)}(x) = e^x$.
2. $f(0) = f^{(n)}(0) = 1$.
3. $R_n = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$.
4. $\lim\limits_{x=+\infty} R_n = 0$ для любого значения x.
5. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

Последнее равенство нужно понимать в смысле определения равенства функций: области определения функций e^x и суммы ряда $1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ — совпадают, эта область представляет интервал $(-\infty, +\infty)$ и значения этих функций при каждом x совпадают.

Функцию e^x можно было с самого начала определить как сумму ряда

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{1}$$

и затем уже вывести все свойства этой функции.

1. Функция e^x (т. е. сумма ряда) непрерывна дифференцируема и интегрируема при любом значении x.

2. Продифференцировав ряд, получим

$$f'(x) = (e^x)' = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots,$$

т. е. мы получили тот же ряд. А это означает, что

$$f'(x) = (e^x)' = e^x = f(x).$$

3. $f(0) = e^0 = 1 + \frac{0}{1!} + \frac{0}{2!} + \ldots + \frac{0}{n!} + \ldots = 1.$

4. Найдём произведение $e^a \cdot e^b$. Имеем:

$$f(a) = e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} + \ldots,$$

$$f(b) = e^b = 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \ldots + \frac{b^n}{n!} + \ldots$$

Перемножим оба ряда, получим:

$$f(a) \cdot f(b) = e^a \cdot e^b = 1 + (a+b) + \frac{(a+b)^2}{2!} + \ldots + \frac{(a+b)^n}{n!} + \ldots = $$
$$= f(a+b) = e^{a+b}.$$

5. Так как формула
$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$
выведена для любых a и b, то отсюда следует, например, что
$$e^a \cdot e^{-a} = e^{a-a} = e^0 = 1,$$
или
$$e^{-a} = \frac{1}{e^a},$$
$$(e^a)^2 = e^a \cdot e^a = e^{a+a} = e^{2a}, \quad (e^a)^n = e^{an}$$
и т. д.

§ 184. Разложение $\sin x$ и $\cos x$ в ряд Маклорена

Для функции $\sin x$ имеем последовательно:

1. $\overset{(n)}{\sin} x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

2. $\overset{(n)}{\sin}(0) = \sin\frac{\pi n}{2}$.

Отсюда следует, что при $x = 0$ производные чётного порядка равны нулю, производные порядка $4k+1$ равны 1, а производные порядка $4k+3$ равны -1.

3. $R_n = \dfrac{\sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$.

4. $\lim\limits_{n=+\infty} R_n = 0$ при любом x.

5. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \tag{1}$$

причём это равенство верно при любом значении x.

Аналогично для функции $\cos x$ имеем:

1. $\cos^{(n)}(x) = -\sin\left[x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]$.

2. $\cos^{(n)}(0) = -\sin\frac{\pi(n-1)}{2}$.

3. $R_n = -\dfrac{\sin\left(\xi + \frac{\pi n}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}$.

4. $\lim\limits_{n=+\infty} R_n = 0$ для любого x.

5. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \tag{2}$$

причём это равенство верно при любом значении x.

Функции $\sin x$ и $\cos x$ можно с самого начала определить как суммы рядов (1) и (2), совершенно не обращаясь к геометрии. Из таких определений будут вытекать все известные формулы из тригонометрии, и все свойства этих функций. Например, их непрерывность, дифференцируемость и т. д. Приведём примеры.

1. Дифференцируем

$$(\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \cos x.$$

2. Дифференцируем $\cos x$:

$$(\cos x)' = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = -\sin x.$$

3. $\sin 0 = 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 0$, $\cos 0 = 1 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 1$.

4. Выведем формулу

$$\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha+\beta).$$

Находим:

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \ldots,$$

$$\cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \frac{\beta^6}{6!} + \ldots$$

Перемножим эти ряды:

$$\sin\alpha\cos\beta =$$

$$= \alpha - \left(\frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha\beta^2}{2!}\right) + \left(\frac{\alpha^5}{5!} + \frac{\alpha^3\beta^2}{2!\,3!} + \frac{\alpha\beta^4}{4!}\right) - \left(\frac{\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^5\beta^2}{5!2!} + \frac{\alpha^3\beta^4}{3!4!} + \frac{\alpha\beta^6}{6!}\right) + \ldots$$

Далее

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots;$$

$$\sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} - \frac{\beta^7}{7!} + \ldots,$$

отсюда:

$$\cos\alpha\sin\beta = \beta - \left(\frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta\alpha^2}{2!}\right) + \left(\frac{\beta\alpha^4}{4!} + \frac{\beta^3\alpha^2}{3!\,2!} + \frac{\beta^5}{5!}\right) -$$

$$- \left(\frac{\beta\alpha^6}{6!} + \frac{\beta^3\alpha^4}{3!4!} + \frac{\beta^5\alpha^2}{5!2!} + \frac{\beta^7}{7!}\right) + \ldots$$

Наконец, сложив ряды для функций $\sin\alpha\cos\beta$ и $\cos\alpha\ \sin\beta$, получим:

$$\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \alpha + \beta - \left(\frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha\beta^2}{2!} + \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta\alpha^2}{2!}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\alpha^5}{5!} + \frac{\alpha^3\beta^2}{2!3!} + \frac{\alpha\beta^4}{4!} + \frac{\beta\alpha^4}{4!} + \frac{\beta^3\alpha^2}{3!2!} + \frac{\beta^5}{5!}\right) -$$

$$- \left(\frac{\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^5\beta^2}{5!2!} + \frac{\alpha^3\beta^4}{3!4!} + \frac{\alpha\beta^6}{6!} + \frac{\beta\alpha^6}{6!} + \frac{\beta^3\alpha^4}{3!4!} + \frac{\beta^5\alpha^2}{5!2!} + \frac{\beta^7}{7!}\right) + \ldots$$

Упростим каждую сумму, заключённую в скобках:

$$\frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha\beta^2}{2!} + \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta\alpha^2}{2!} = \frac{1}{3!}(\alpha^3 + 3\alpha\beta^2 + 3\beta\alpha^2 + \beta^3) = \frac{1}{3!}(\alpha+\beta)^3,$$

$$\frac{\alpha^5}{5!} + \frac{\alpha^3\beta^2}{2!3!} + \frac{\alpha\beta^4}{4!} + \frac{\beta\alpha^4}{4!} + \frac{\beta^3\alpha^2}{2!3!} + \frac{\beta^5}{5!} =$$

$$= \frac{1}{5!}(\alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5) - (\alpha+\beta)^5$$

(вспомните формулу бинома Ньютона);

$$\frac{\alpha^7}{7!}+\frac{\alpha^5\beta^2}{5!\,2!}+\frac{\alpha^3\beta^4}{3!\,4!}+\frac{\alpha\beta^6}{6!}+\frac{\beta\alpha^6}{6!}+\frac{\beta^3\alpha^4}{3!\,4!}+\frac{\beta^5\alpha^2}{5!\,2!}+\frac{\beta^7}{7!}=$$

$$=\frac{1}{7!}(\alpha^7+7\alpha^6\beta+21\alpha^5\beta^2+35\alpha^4\beta^3+35\alpha^3\beta^4+21\alpha^2\beta^5+7\alpha\beta^6+\beta^7)=\frac{1}{7!}(\alpha+\beta)^7$$

и т. д. Окончательно получаем:

$$\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=$$

$$=(\alpha+\beta)-\frac{1}{3!}(\alpha+\beta)^3+\frac{1}{5!}(\alpha+\beta)^5-\frac{1}{7!}(\alpha+\beta)^7+\ldots=\sin(\alpha+\beta).$$

5. Вывод формулы

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

можно было провести тем же способом, каким мы вывели последнюю, именно: вычислить $\sin^2 x=\sin x\cdot\sin x$, $\cos^2 x=\cos x\cdot\cos x$ и сложить полученные ряды. Мы тогда убедимся, что сумма равна 1 (рекомендуем это провести самостоятельно).

Покажем вывод этой формулы, основанный на другом принципе. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x,$$

где $\sin x$ и $\cos x$ определяются при помощи рядов. Докажем, что эта функция тождественно равна 1. Найдём её производную:

$$f'(x)=2\sin x(\sin x)'+2\cos x(\cos x)'.$$

Мы уже знаем, что $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$, следовательно,

$$f'(x)=2\sin x\cdot\cos x-2\cos x\cdot\sin x=0.$$

Оказывается, что производная функции $f(x)$ тождественно равна 0.

Следовательно,

$$\sin^2 x+\cos^2 x=C,$$

где C — число.

Но при $x=0$ имеем $\sin x=0$, $\cos x=1$ и значит

$$\sin^2 0+\cos^2 0=1.$$

Следовательно, и при любом другом значении x будем иметь:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

6. Так как все члены ряда для $\sin x$ содержат x в нечётной степени, то, изменив знак аргумента x, мы этим самым меняем знаки у всех членов ряда. Поэтому и сумма ряда изменит знак. Этим доказано, что

$$\sin(-x)=-\sin x.$$

Так как все члены ряда для $\cos x$ содержат x в чётной степени ($\cos x$ есть чётная функция!), то, изменив знак аргумента, мы не изменим ни одного члена ряда, а поэтому и сумма ряда не изменится. Этим доказано, что $\cos(-x)=\cos x$. Составление таблицы значений синуса и косинуса основано на вычислении частичных сумм рядов Маклорена, построенных для этих функций. Так как ряды для $\sin x$ и $\cos x$ сходятся при любом x, то мы можем вычислить значения этих функций для любого аргумента x и притом с любой степенью точности. Для этого нужно взять достаточно много членов. Ряды (1) и (2) знакочередующиеся, следовательно, взяв сумму n членов, мы делаем ошибку, абсолютная величина которой меньше абсолютной величины $n+1$-го члена. Отметим, что указанные ряды сходятся очень быстро, так как $\frac{x^n}{n!}$ быстро стремится к нулю с возрастанием n. Следовательно, взяв сравнительно немного членов ряда, мы получаем довольно хорошее приближение к сумме ряда, т. е. к $\sin x$ или $\cos x$. Для того чтобы ещё больше упростить вычисления, стараются усилить сходимость ряда. Ясно, что чем меньше $|x|$, тем быстрее уменьшается $\frac{|x|^n}{n!}$, т. е. тем быстрее сходится ряд. Вот почему при помощи формул приведения, известных из тригонометрии ($\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$ $=\cos\alpha$, $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ и т. д.), сводят вычисление синуса и косинуса данного числа к синусу и косинусу числа x, заключённого в сегменте $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, т. е. в сегменте [0; 0,785398...], так как $\frac{\pi}{4}=0{,}785398\ldots$ Итак, мы будем рассматривать наши ряды лишь для положительных значений x, меньших чем 1. Взяв, например,

$$\sin x \approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

и считая $|x| \leqslant \frac{\pi}{4}$, мы сделаем ошибку, меньшую чем

$$\frac{|x|^7}{7!} \leqslant \left(\frac{\pi}{4}\right)^7 \cdot \frac{1}{7!} < \frac{(0{,}79)^7}{7!} = \frac{0{,}192039\ldots}{5040} < \frac{0{,}2}{5000} = 0{,}00004.$$

Взяв для $\cos x$ первые три члена:

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

и считая $|x|<\frac{\pi}{4}$, мы сделаем ошибку, меньшую чем

$$\frac{|x|^6}{6!} < \frac{(0{,}79)^6}{6!} < \frac{0{,}243087\ldots}{720} < 0{,}00035.$$

Мы подсчитали ошибку для значений x, близких к $\frac{\pi}{4}$. С уменьшением $|x|$ ошибка уменьшается и, следовательно, для достижения той же точности достаточно взять ещё меньше членов.

Пример 1. Для каких аргументов x достаточно приближённое равенство

$$\sin x \approx x-\frac{x^3}{3!}$$

при заданной точности 0,0005?

Решение. Так как ошибка меньше $\frac{|x|^5}{5!}$, то остаётся решить неравенство

$$\frac{|x|^5}{5!} < 0{,}0005,$$

откуда

$$|x|^5 < 0{,}0005 \cdot 120 = 0{,}06,$$
$$|x| < 0{,}5696\ldots$$

Итак, при $|x| < 0{,}5696\ldots$ (что в градусной мере соответствует углам, меньшим $32^\circ 38'$) можно при вычислении $\sin x$ с точностью до 0,0005, ограничиться двумя членами ряда.

Упражнения

402. Разложить в ряд Маклорена функции

$$\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \frac{\sin x}{x}.$$

403. Определив $\sin x$ и $\cos x$ при помощи рядов, вывести следующие формулы:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x.$$

404. Для каких аргументов x достаточно приближённое равенство

$$1)\ \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!},$$
$$2)\ \sin x \approx x,$$
$$3)\ \cos x \approx 1$$

при заданной точности 0,0005?

405. Начертить график $\cos x$ и сравнить его с параболами

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!},$$
$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$
$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

§ 185. Ряды с комплексными членами. Связь между показательной функцией и тригонометрическими.

До сих пор мы рассматривали лишь ряды с действительными членами. Понятие ряда можно расширить введением комплексных чисел. Именно выражение вида

$$(\alpha_1 + \beta_1 i) + (\alpha_2 + \beta_2 i) + (\alpha_3 + \beta_3 i) + \ldots + (\alpha_n + \beta_n i) + \ldots, \tag{1}$$

где α_n и β_n — действительные числа, мы называем рядом с комплексными членами. Условимся считать ряд сходящимся, если сходятся оба ряда

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n + \ldots \tag{2}$$

и

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_n + \ldots \tag{3}$$

Если хотя бы один из этих рядов расходится, то будем считать, что расходится и ряд (1). Пусть A — сумма ряда (2), а B — сумма ряда (3). Число $A + Bi$ мы называем суммой ряда (1).

Пример 1. Исследуем ряд

$$(1+i) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}i\right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3}i\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{2^n} + (-1)^n\frac{1}{3^n}i\right) + \ldots$$

Решение сводится к исследованию двух рядов

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots \quad \text{и} \quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{3^n}+\ldots$$

Оба эти ряда сходятся (убывающие геометрические прогрессии) и суммы их A и B соответственно равны:

$$A=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2, \quad B=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

Отсюда следует, что данный ряд сходится и сумма его равна $2+\frac{3}{4}i$.

Пример 2. Исследовать ряд

$$(1+i)+\left(-\frac{1}{2}+2i\right)+\left(\frac{1}{2^2}+2^2i\right)+\ldots+\left((-1)^n\frac{1}{2^n}+2^ni\right)+\ldots$$

Решение. Так как ряд

$$1+2+2^2+\ldots+2^n+\ldots$$

расходится, то расходится и данный ряд.

Пусть дан ряд

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{4}$$

с комплексными членами $u_n=\alpha_n+i\beta_n$. Параллельно с ним рассмотрим ряд

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots, \tag{5}$$

составленный из модулей $|u_n|=|\alpha_n+\beta_n i|=\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}$ членов ряда (4). Имеют место ряд теорем и определений, данные выше для рядов с действительными членами.

Теорема 1. *Если ряд* (5) *сходится, то сходится и ряд* (4).

Доказательство. Так как

$$|\alpha_k|\leqslant\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}=|u_k| \quad \text{и} \quad |\beta_k|\leqslant\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}=|u_k|,$$

то сходятся ряды

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n+\ldots,$$
$$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_n+\ldots,$$

т. е. по определению сходится и ряд (4), ч. т. д.

Обратная теорема не верна: из сходимости ряда (4) не следует сходимость ряда (5).

Определение. *Если сходится ряд* (5), *то ряд* (4) *называется абсолютно сходящимся.* С абсолютно сходящимися рядами можно обращаться как с полиномами: их можно складывать, вычитать, перемножать, делить, переставлять как угодно члены ряда и т. д. Всё это мы оставляем без доказательства.

Пример 3. Ряд

$$(\alpha+\beta i)+\frac{(\alpha+\beta i)^2}{2!}+\frac{(\alpha+\beta i)^3}{3!}+\ldots+\frac{(\alpha+\beta i)^n}{n!}+\ldots,$$

где α и β — любые действительные числа, сходится абсолютно.

Решение. Имеем:

$$u_k=\frac{(\alpha+\beta i)^k}{k!},$$

$$|u_k|=\frac{1}{k!}|(\alpha+\beta i)^k|=\frac{1}{k!}|\alpha+\beta i|^k=\frac{1}{k!}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^k=\frac{1}{k!}a^k,$$

где

$$a=\sqrt{\alpha^2+\beta^2};$$

но ряд

$$a+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\ldots+\frac{a^n}{n!}+\ldots$$

сходится (т. е. сходится ряд, составленный из модулей членов данного ряда), а это по определению и означает абсолютную сходимость данного ряда.

Пример 4. Ряд

$$\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{1^2}+\frac{\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha}{2^2}+\ldots+\frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{n^2}+\ldots \tag{6}$$

сходится абсолютно.

Решение. Имеем:

$$\left|\frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}\sqrt{\cos^2 n\alpha+\sin^2 n\alpha}=\frac{1}{n^2}.$$

Но так как ряд

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

составленный из модулей членов ряда (6), сходится, то этим доказана абсолютная сходимость данного ряда.

Пример 5. Ряды

$$(\alpha+\beta i)-\frac{1}{3!}(\alpha+\beta i)^3+\frac{1}{5!}(\alpha+\beta i)^5-\ldots+(-1)^n\frac{(\alpha+\beta i)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \tag{7}$$

$$1-\frac{(\alpha+\beta i)^2}{2!}+\frac{(\alpha+\beta i)^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{(\alpha+\beta i)^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \tag{8}$$

где α и β — любые действительные числа, сходятся абсолютно. Решение аналогично решению примера 4; рекомендуем его провести самостоятельно.

Ряд

$$a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots+a_nz^n+\ldots, \tag{9}$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ — любые фиксированные числа, а $z=x+iy$, называется **степенным рядом**.

Геометрически число z характеризуется точкой $M(x, y)$ плоскости xOy. Для краткости мы будем z называть точкой. Для каждой точки z степенной ряд превращается в числовой. В части плоскости xOy ряд (9) может сходиться, а в части — расходиться. В частности, ряд может сходиться для всех точек плоскости, что, например, имеет место для ряда

$$z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

Во всяком случае в точке $z=0$ (т. е. в начале координат) ряд (9) всегда сходится и сумма его равна a_0.

Теорема 1 (Абеля). *Если ряд сходится в точке z, то он сходится и притом абсолютно в любой точке, лежащей внутри окружности радиуса*

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

с центром в начале координат. О поведении ряда на границе этой окружности, т. е. в точках окружности радиуса $|z|$, в теореме ничего не сказано: в части или во всех точках этой окружности ряд может сходиться, в части расходиться.

33*

Из этой теоремы следует, что если ряд (9) расходится в некоторой точке z, то он расходится во всех точках плоскости, удалённых от начала координат на расстояние, большее чем $|z|$.

Теорема Абеля приводит нас к понятиям круга и радиуса сходимости степенного ряда, именно: для каждого степенного ряда существует круг радиуса R такой, что во всех точках внутри круга ряд абсолютно сходится, а во всех точках вне этого круга ряд расходится. В частности, если ряд сходится только при $z = 0$, то мы принимаем $R = 0$, а если ряд сходится во всей плоскости, то мы принимаем $R = +\infty$.

Доказательство теоремы Абеля проводится аналогично доказательству этой теоремы для рядов с действительными членами. Мы его приводить не будем.

Выше мы показали, что формулы (1), § 183 и (1) и (2) § 184 могут служить определениями функций e^x, $\sin x$, $\cos x$. Сделаем ещё шаг: пусть x принимает также и комплексные значения. Этим мы определим наши функции и в комплексной плоскости. При таком более общем определении этих функций мы получим ряд интересных соотношений.

Заменив в формуле (1) § 183 x на xi, где x — действительное число, получим:

$$e^{xi} = 1 + \frac{xi}{1} + \frac{(xi)^2}{2!} + \frac{(xi)^3}{3!} + \ldots + \frac{(xi)^n}{n} + \ldots$$

или, отделив действительные и мнимые части (перестановка возможна ввиду абсолютной сходимости):

$$e^{xi} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) + \\ + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right).$$

Отсюда, на основании формул (1) и (2) § 184, получим формулу Эйлера

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x,$$

связывающую показательную и тригонометрические функции. Посредством этой формулы можно установить периодичность функции e^x. В самом деле, заменив в ней x через $x + 2\pi i$, получим

$$e^{x+2\pi i} = e^x \cdot e^{2\pi i} = e^x (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^x$$

или

$$e^{x+2\pi i} = e^x,$$

т. е. прибавление числа $2\pi i$ к аргументу показательной функции не изменило её значения. Следовательно, *e^x есть периодическая функция с периодом $2\pi i$.*

Из формулы Эйлера легко получить много интересных соотношений, например:

$$1)\ e^{\frac{\pi i}{2}} = i,\quad 2)\ e^{\pi i} = -1,\quad 3)\ e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i,\quad 4)\ e^{2\pi i} = 1,$$
$$5)\ e^{\alpha+\beta i} = e^\alpha \cdot e^{\beta i} = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta);$$

в случае действительных α и β мы получим тригонометрическую форму комплексного числа (e^α — действительное число > 0).

6) С одной стороны, имеем:

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{ix+iy} = e^{i(x+y)} = \cos (x + y) + i \sin (x + y),$$

а с другой стороны:

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = (\cos x + i \sin x) (\cos y + i \sin y).$$

Отсюда получаем известную формулу Моавра:

$$(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y).$$

7) Аналогично доказывается соотношение:

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx \qquad (n \text{ — целое число, } > 0).$$

$$8)\quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{xi} + e^{-xi}),\quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{xi} - e^{-xi}).$$

Заменив здесь x на xi, получим:

$$\cos(xi) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\quad \sin(xi) = \frac{1}{2i}(e^{-x} - e^x).$$

Полагая в первой из этих формул $x = 1$, получим:

$$\cos i = \frac{1}{2}(e + e^{-1}) = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) > \frac{1}{2}\cdot 2{,}7 = 1{,}35 > 1$$

— оказывается, косинус (как и синус) может быть и больше чем 1!

§ 186. Логарифмы комплексных и отрицательных чисел

После того, как определена функция e^z (посредством ряда) для комплексных значений z:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

нетрудно обобщить логарифмическую функцию $y = \ln x$ на случай комплексных значений x. Именно условимся называть натуральным логарифмом $\operatorname{Ln} z$ комплексного числа z такое число w, что $z = e^w$.

Пусть $z = x + yi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; x и y действительны, ρ — модуль комплексного числа z, а φ — аргумент; требуется найти комплексное число $w = u + vi$ (u и v действительны).

Из соотношения $z = e^w$, находим:

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} = e^u(\cos v + i\sin v),$$

откуда $\rho = e^u$, т. е. $u = \ln\rho$, а $v = \varphi + 2k\pi$.

Итак,

$$\operatorname{Ln} z = w = u + iv = \ln\rho + (\varphi + 2k\pi)\,i = \ln\rho + \varphi i + 2k\pi i,$$

где k принимает все целые значения.

Таким образом логарифм имеет бесконечное множество значений.

Пример 1. В комплексной области натуральный логарифм 1 равен:

$$\operatorname{Ln} 1 = 2k\pi i,$$

так как $\rho = 1$, $\varphi = 0$. При $k = 0$ имеем $\operatorname{Ln} 1 = 0$ — одно из значений логарифма 1 есть 0.

Пример 2. При нашем определении будут иметь логарифмы и отрицательные числа, например:

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + \pi i + 2k\pi i = (2k+1)\pi i,$$

где k принимает все целые значения.

Пример 3.

$$\operatorname{Ln}(1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi i}{4} + 2k\pi i,$$

$$\operatorname{Ln} i = \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i.$$

и т. д.

§ 187. Разложение $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена

Находим последовательно:

1. $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

2. $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$, $f(0)=\ln 1=0$.

3. $R_n=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$.

4. В интервале $(-1, 1)$ имеем $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n=0$.

Рассмотрим границы этого интервала.

Точка $x=-1$ сразу исключается, так как в этой точке функция теряет смысл ($\ln 0$ — не определён).

Пусть $x=1$. Тогда

$$R_n=(-1)^n\frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}},$$

где $0<\xi<1$; находим:

$$|R_n|=\frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}<\frac{1}{n+1}$$

и значит $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n=0$.

Итак, предел остаточного члена R_n равен 0 в точке $n=+\infty$ для всех значений x из полуинтервала $(-1, 1]$.

5. Имеем равенство

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \tag{1}$$

верное для всех x из полуинтервала $(-1, 1]$.

Замечание. Функция $\ln(1+x)$ определена в интервале $(-1, +\infty)$, а функция $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$ определена лишь в полуинтервале $(-1, 1]$, а раз области определения этих функций не совпадают, то и функции эти различны. Написанные же равенства нужно понимать в том смысле, что в полуинтервале $(-1, 1]$ их значения совпадают.

При $x=1$ имеем:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

Практически полученная формула мало пригодна для вычисления $\ln 2$, так как ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\ldots$ слишком медленно сходится. В самом деле, чтобы гарантировать, например, результат вычислений с точностью до 0,005 (всего 3 знака), нужно чтобы было

$$\frac{1}{n}<0{,}005$$

или

$$n>200.$$

Итак, лишь сумма 201 члена даёт нам требуемую точность.

§ 188. Составление таблиц логарифмов

Хотя разложение $\ln(1+x)$ верно лишь для значений x из полуинтервала $(-1, 1]$, но оно даёт нам возможность вычислять логарифмы всех целых чисел.

Заменив в формуле (§ 187) x на $-x$, получим соотношение,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots \tag{1}$$

верное для всех x из полуинтервала $[-1, 1)$, так как если $-1 < x \leqslant 1$, то $-1 \leqslant -x < 1$. Разность двух сходящихся рядов есть сходящийся ряд, сумма которого равна разности сумм данных.

На основании этого, вычитая из ряда для $\ln(1+x)$ полученный ряд, найдём

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) =$$
$$= 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right) \tag{2}$$

для всех x из интервала $(-1, 1)$. Обе границы интервала следует исключить: левую из-за расходимости ряда для $\ln(1+x)$ при $x=-1$, а правую из-за расходимости ряда для $\ln(1-x)$ при $x=1$.

Последней формулой мы и воспользуемся для вычисления логарифмов целых чисел.

Пусть N — произвольное целое положительное число. Определим x из равенства

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{N+1}{N},$$

откуда

$$x = \frac{1}{2N+1}.$$

Так как $0 < x < 1$, то можно воспользоваться формулой (2). Получим:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\frac{N+1}{N} = \ln(N+1) - \ln N =$$
$$= 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}} + \ldots\right],$$

откуда

$$\ln(N+1) = \ln N + 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}} + \ldots\right]. \tag{3}$$

Таким образом, зная натуральный логарифм числа N, мы можем найти натуральный логарифм числа $N+1$. Полученная формула удобна для вычислений, ибо последний ряд быстро сходится. Вычисляя, например, по этой формуле $\ln 2$, получим:

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots\right).$$

Вычислим ошибку, которую мы сделаем, если в формуле (3) остановимся на n-м члене ряда, т. е. на члене

$$\frac{2}{(2n-1)(2N+1)^{2n-1}}.$$

Остаток ряда равен сумме ряда

$$2\left[\frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)(2N+1)^{2n+3}}+\ldots\right]<$$
$$<2\left[\frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n+3}}+\ldots\right]=$$
$$=\frac{2}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}}\left[1+\frac{1}{(2N+1)^2}+\frac{1}{(2N+1)^4}+\ldots\right]=$$
$$=\frac{2}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{(2N+1)^2}}=$$
$$=\frac{2}{(2n+1)(2N+1)^{2n-1}[(2N+1)^2-1]}=\frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n-1}\,2N(N+1)}.$$

Пример 1. В приближённом равенстве

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}\right)=0{,}6931,$$

имеем $N=1$, $n=3$. Следовательно, ошибка будет меньше чем

$$\frac{1}{7\cdot 3^5\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{6804}<0{,}0002.$$

Пример 2. Вычислить $\ln 2$ с семью десятичными знаками.

Решение. Здесь $N=1$, n мы ищем, кроме того, мы требуем, чтобы первые семь знаков были верны, т. е. чтобы ошибка была меньше чем $\frac{1}{10^8}$. Итак,

$$\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n-1}\cdot 2\cdot 2}<\frac{1}{10^8}$$

или

$$(2n+1)\cdot 3^{2n-1}>25\,000\,000.$$

Подберём n, удовлетворяющее последнему неравенству:

$$\begin{aligned}
n&=3 \quad (2n+1)\,3^{2n-1}=7\cdot 3^5<25\,000\,000,\\
n&=5 \quad (2n+1)\,3^{2n-1}=11\cdot 3^9<25\,000\,000,\\
n&=6 \quad (2n+1)\,3^{2n-1}=13\cdot 3^{11}<25\,000\,000,\\
n&=8 \quad (2n+1)\,3^{2n-1}=17\cdot 3^{15}>25\,000\,000.
\end{aligned}$$

Итак, $n=8$ и, следовательно,

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{11\cdot 3^{11}}+\frac{1}{13\cdot 3^{13}}+\frac{1}{15\cdot 3^{15}}\right)\approx 0{,}69314718,$$

причём первые семь знаков верны.

Пример 3. Вычислить натуральный логарифм 10.

Решение. Так как

$$\ln 10=\ln 2+\ln 5,$$

то остаётся найти $\ln 5$. Формула (3) позволяет это сделать при условии, что известен логарифм 4. Но

$$\ln 4 = 2\ln 2 \approx 2 \cdot 0{,}69314718 = 1{,}38629436.$$

Положив $N=4$, находим:

$$\ln 5 = \ln 4 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \frac{1}{7\cdot 9^7} + \ldots\right)$$

или

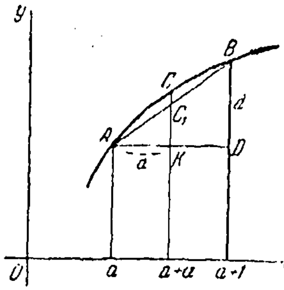
$$\ln 5 = 1{,}38629436 + 2\cdot 0{,}111571775 = 1{,}60943791.$$

Окончательно имеем:

$$\ln 10 = \ln 2 + \ln 5 \approx 0{,}69314718 + 1{,}60943791 = 2{,}30258509.$$

Точность результата равна 0,00000003.

Итак, зная $\ln N$, мы по формуле (3) вычислим $\ln(N+1)$, причём (и это практически очень ценно) по мере увеличения N увеличивается $2N+1$, а следовательно, $\frac{1}{2N+1}$ уменьшается и для сохранения данной точности при составлении таблиц натуральных логарифмов (например, при требовании сохранить верными первые 5 знаков) по мере увеличения N можно оставлять в формуле (3) всё меньше и меньше членов.



Черт. 335.

До сих пор речь шла о вычислении натуральных логарифмов целых чисел, но для практики удобны десятичные логарифмы. Переход от одной системы логарифмов к другой — прост.

Пусть в таблице десятичных логарифмов даны логарифмы чисел a и $a+1$, а нужно вычислить логарифм числа $a+\alpha$, где $0<\alpha<1$. Обычно поступают так: находят разность $\lg(a+1)-\lg a = d$ (часто эта разность даётся в самых таблицах) и условливаются считать, что

$$\lg(a+\alpha) = \lg a + \alpha d.$$

Разъясним это правило сначала геометрически.

Пусть AB — график функции $y=\lg x$ (черт. 335) и абсциссы точек A и B соответственно равны a и $a+1$. Нам нужно найти ординату точки C с абсциссой $a+\alpha$.

Заменим дугу AB графика хордой AB и проведём построение, ясное из чертежа 335.

Точку C заменим точкой C_1, лежащей на хорде. Найдём ординату y точки C_1. Имеем:

$$BD = \lg(a+1) - \lg a = d,$$

$$\frac{BD}{AD} = \frac{d}{1} = d = \operatorname{tg}\alpha,$$

$$y = \lg a + C_1K = \lg a + AK\operatorname{tg}\alpha = \lg a + \alpha d.$$

Итак, указанный способ нахождения логарифма промежуточного числа $a+\alpha$ по логарифмам чисел a и $a+1$ заключается в замене ординаты дуги линии $y=\lg x$ ординатой её хорды.

Вообще, если известны значения какой-либо функции на концах a и b сегмента и находится (приближённо) значение этой функции для промежуточного значения ξ аргумента, то говорят, что *производится интерполяция*. Если интерполяция заключается в замене ординаты дуги графика ординатой её хорды (прямой), то она называется *линейной*.

Вернёмся к нахождению логарифма числа $a+\alpha$. Разъясним проведённую нами линейную интерполяцию аналитически.

Вернёмся опять к приближённому равенству:

$$\ln(a+\alpha)\approx\ln a+\alpha[\ln(a+1)-\ln a].$$

Найдём ошибку этого равенства, т. е. разность между его левой и правой частями:

$$\begin{aligned}\ln(a+\alpha)-\ln a-\alpha[\ln(a+1)-\ln a]&=\\=\ln\frac{a+\alpha}{a}-\alpha\ln\frac{a+1}{a}&=\ln\left(1+\frac{\alpha}{a}\right)-\alpha\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)=\\=\left(\frac{\alpha}{a}-\frac{\alpha^2}{2a^2}+\frac{\alpha^3}{3a^3}-\ldots\right)&-\alpha\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{3a^3}-\ldots\right)=\\=\frac{\alpha(1-\alpha)}{2a^2}-\frac{\alpha(1-\alpha^2)}{3a^3}&+\frac{\alpha(1-\alpha^3)}{4a^4}-\ldots\end{aligned}$$

Рассмотрим ряд, стоящий в правой части равенства. Так как $0<\alpha<1$, то он знакочередующийся и модули его членов убывают. Кроме того, предел его n-го члена равен нулю. Поэтому, на основании признака Лейбница, он сходится и сумма его r меньше 1-го члена:

$$\frac{\alpha(1-\alpha)}{2a^2}.$$

С другой стороны,

$$\alpha(1-\alpha)=-\alpha^2+\alpha=-\left(\alpha^2-\alpha+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$r<\frac{\alpha(1-\alpha)}{2a^2}<\frac{\frac{1}{4}}{2a^2}=\frac{1}{8a^2}.$$

Это и есть граница ошибки. В частности, если число a заключено между 1000 и 10 000, то

$$r=\frac{1}{8a^2}<\frac{1}{8\cdot1000^2}=\frac{1}{8000000};$$

как видно, мы при этом получаем ошибку, вполне допустимую при пользовании школьными таблицами логарифмов.

Аналогично оправдывается линейная интерполяция, при помощи которой мы по данному логарифму находим число (потенцирование), если данного логарифма нет в таблицах (что, обычно, имеет место).

§ 189. Бином Ньютона

Разложим функцию

$$f(x)=(1+x)^m$$

в ряд Маклорена.

Найдём значения этой функции и её производных в нуле:

$$\begin{aligned}f(x)=(1+x)^m,\ f'(x)=m(1+x)^{m-1},\ f''(x)&=\\=m(m-1)(1+x)^{m-2},\ \ldots,\ f^{(n)}(x)&=\\=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n};\end{aligned}$$

$$f(0)=1,\quad f'(0)=m,\quad f''(0)=m(m-1),\ \ldots,$$
$$f^{(n)}(0)=m(m-1)\ldots(m-n+1).$$

Рассмотрим ряд Маклорена:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}x^n+\ldots \qquad (1)$$

Если m — натуральное число, то коэффициенты всех членов ряда, начиная с $m+2$, равны нулю (так как они будут содержать множитель $m-m=0$). В этом случае ряд обрывается на $m+1$-ом члене и мы получаем многочлен:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}x^m,$$

представляющий известную формулу бинома Ньютона разложения $(1+x)^m$ по степеням x. Эта формула была известна математикам и до Ньютона. Заслуга Ньютона в обобщении этой формулы для любых показателей m.

Пусть m — любое ненатуральное число. В этом случае ряд (1) нигде не обрывается. Укажем множество значений x, для которых ряд (1) сходится к данной функции. Расмотрим остаточный член:

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)\,x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (2)$$

Не проводя доказательств, укажем, что $\lim\limits_{n=+\infty}R_n=0$ для всех значений x, для которых $|x|<1$, и $\lim\limits_{n=+\infty}R_n\neq 0$ при $|x|>1$. Что касается границ интервала $(-1, 1)$, то для положительных значений m остаточный член стремится к нулю на обеих границах ± 1, а если $-1<m\leqslant 0$, то он стремится к нулю только в правой границе $x=1$; если, наконец, $m\leqslant -1$, то обе границы исключаются.

Итак, *равенство*

$$(1+x)^m=$$
$$=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \quad (3)$$

верно в интервале $(-1, 1)$.

Обращаем внимание, что функция $(1+x)^m$ определена, например, при $x>1$, но для таких значений x равенство (3) неверно, так как ряд расходится.

Пример 1. Пусть

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}; \quad m=-1.$$

Имеем:

$$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+$$
$$+\frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3+\ldots+1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^nx^n+\ldots,$$

где $-1 < x < 1$ — это разложение мы могли получить также, деля 1 на $1+x$. При $0 < x < 1$ полученный ряд будет знакочередующимся. Оборвав его на 2-м члене, найдём приближённое равенство

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x.$$

Мы можем оценить ошибку этого приближения, именно

$$|r| < |x^2|.$$

Пример 2. Для $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ имеем:

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{-2}{3}}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{-2}{3}\cdot\frac{-5}{3}}{3!}x^3 + \ldots, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Оборвав ряд, получим:

$$\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x.$$

Для оценки ошибки r этого приближения имеем:

$$|r| < \left|\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{-2}{3}}{2!}x^2\right| = \frac{1}{9}x^2.$$

Упражнения

406. Доказать следующие приближённые равенства:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x,$$

$$\sqrt[k]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{k}$$

и указать границы ошибок.

§ 190. Разложение $\operatorname{arc\,tg} x$ в ряд Маклорена. Вычисление π

Рассмотрим прогрессию

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

Этот ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geqslant 1$. Сумма его при $|x| < 1$ равна $\frac{1}{1+x^2}$.

Итак:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

Интегрируя в пределах от 0 до x, получим:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \int_0^x dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x^4 dx - \int_0^x x^6 dx + \ldots + (-1)^n \int_0^x x^{2n} dx + \ldots$$

или

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (1)$$

Интервалом сходимости полученного ряда будет также $(-1, 1)$. Более подробное исследование показывает, что этот ряд сходится к $\operatorname{arc}\operatorname{tg} 1$ также и в точке $x = 1$.

Полагая $x = 1$, получим известный ряд Лейбница для числа π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots \qquad (2)$$

При помощи этого ряда мы можем вычислить π с любой степенью точности.

Полученный ряд для вычисления π практически неудобен, так как он сходится медленно. Воспользовавшись формулой

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc}\operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc}\operatorname{tg} \frac{1}{239},$$

находим:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \ldots\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \ldots\right).$$

Исходя из этой формулы английский математик Машин вычислил π со 100 десятичными знаками. Отметим, что при вычислении π с некоторой заданной точностью при помощи последней формулы необходимо в первом ряде брать больше членов, чем во втором.

Упражнения

407. Найти разложение $\frac{1}{1-x}$ (в формуле бинома заменить x через $-x$).

408. Проинтегрировав ряд для $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в пределах от 0 до x, найти разложения для $\arcsin x$:

409. Построить график функции $\frac{1}{1-x}$ и сравнить его с параболами $y = 1 - x + x^2$, $y = 1 - x + x^2 - x^3$, $y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$.

410. Найти $\sqrt[3]{9}\left(= 2\sqrt[3]{1 + \frac{1}{8}}\right)$ с точностью до 5-го знака.

411. Найти $\sqrt[3]{126}\left(=5\sqrt[3]{1+\frac{1}{125}}\right)$ с точностью до 3-го знака.

412. Доказать справедливость формулы

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}$$

и, пользуясь ею, написать выражение для вычисления π. Вычислить π с точностью до 0,000001.

413. Доказать, что

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx=x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}+\ldots$$

$$\int_0^x \frac{\cos x}{x}\,dx=$$

$$=\ln\frac{x}{a}-\frac{x^2-a^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^4-a^4}{4\cdot 4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}-a^{2n}}{2n\cdot(2n)!}+\ldots,\quad \begin{matrix} a>0,\\ x>0.\end{matrix}$$

$$\int_a^x \frac{e^x}{x}\,dx=\ln\frac{x}{a}+\frac{x-a}{1}+\frac{x^2-a^2}{2\cdot 2!}+\ldots+\frac{x^n-a^n}{n\cdot n!}+\ldots,\quad \begin{matrix} a>0,\\ x>0.\end{matrix}$$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Для построения точки F надо предварительно построить квадрат со стороной, равной масштабному отрезку. Для построения точки G надо предварительно построить прямоугольник со сторонами, равными $2OE$ и $5OE$; тогда длина диагонали такого прямоугольника (при выбранном масштабном отрезке) будет равна $\sqrt{29}$. **2.** 1) 3; 2) -10; 3) -5; 4) 6. **3.** $\gamma = x - 0 = x$. **4.** $-25° - (-10°) = -15°$; отрицательный результат указывает на понижение температуры. **5.** 1) 5; 2) 5; 3) 4. **6.** 1) $-2 < x < 4$, $(-2, 4)$; 2) $|x-1| < 1$, $(0, 2)$; 3) $(-1, 1)$, $-1 < x < 1$; 4) $|x-2| < 5$, $(-3, 7)$; 5) $[3, 7]$, $3 \leqslant x \leqslant 7$; 6) $[1, 10]$; 7) $\left|x - \frac{9}{2}\right| < \frac{11}{2}$, $(-1, 10)$; 8) $|x-7| \leqslant 2$, $[5, 9]$; 9) $[6, +\infty]$; 10) $(-\infty, 3)$; 11) $(-4, +\infty)$; 12) $(-\infty, 0]$; 13) $|x| < 3$; $(-3, 3)$; 14) $x < 3$; 15) $x > 2$. **7.** $(ABC) = \frac{3}{7}$, $(ACB) = -\frac{10}{7}$, $(BAC) = -\frac{3}{10}$, $(BCA) = -\frac{7}{10}$, $(CAB) = -\frac{10}{3}$, $(CBA) = \frac{7}{3}$. **8.** 1. **9.** $(ABC) = -\frac{5}{8}$, $(ACB) = -\frac{3}{8}$, $(BAC) = \frac{5}{3}$, $(BCA) = -\frac{8}{3}$, $(CAB) = \frac{3}{5}$, $(CBA) = -\frac{8}{5}$. **10.** 1) -1; 2) 8; 3) -6; 4) -10. **11.** Примем отрезок AB за масштабный отрезок OE; тогда координата точки A будет равна нулю, а координата точки B будет равна 1. Координата точки P будет равна $\frac{\lambda}{1+\lambda}$, а координата точки Q будет $\frac{\mu}{1+\mu}$. Теперь находим искомые отношения:

$$(PAQ) = \frac{0 - \frac{\lambda}{1+\lambda}}{\frac{\mu}{1+\mu} - 0} = -\frac{\lambda}{\mu}\,\frac{1+\mu}{1+\lambda},\quad (PBQ) = \frac{1 - \frac{\lambda}{1+\lambda}}{\frac{\mu}{1+\mu} - 1} = -\frac{1+\mu}{1+\lambda}.$$

12. $-\frac{1}{2}$. **13.** Принимая отрезок AC за масштабный, найдём координату точки B: $\frac{\lambda}{1+\lambda}$, а теперь находим

$$(ACB) = \frac{1-0}{\frac{\lambda}{1+\lambda} - 1} = -1 - \lambda,\quad (BAC) = \frac{0 - \frac{\lambda}{1+\lambda}}{1-0} = -\frac{\lambda}{1+\lambda},$$

$$(BCA) = \frac{1 - \frac{\lambda}{1+\lambda}}{1-0} = -\frac{1}{1+\lambda},\quad (CAB) = \frac{0-1}{\frac{\lambda}{1+\lambda} - 0} = -\frac{1+\lambda}{\lambda},$$

$(CBA)=\dfrac{\frac{\lambda}{1+\lambda}-1}{0-\frac{\lambda}{1+\lambda}}=\dfrac{1}{\lambda}$. **14.** -3. **15.** Координата x центра тяжести системы равна: $x=\dfrac{1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3+\ldots+10\cdot 10}{1+2+3+\ldots+n}=7$. **16.** $-2, -6, -1{,}1$. **17.** -2. **18.** При переносе $x'=x-a$, где a — старая координата нового начала; так как старая координата старого начала равна нулю: $x=0$, то $x'=0-a=-a$ будет новая координата старого начала; отсюда искомая сумма: $a+(-a)=0$. **21.** $M(0, 3)$, $P(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$. **22.** $M\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$, $P\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$, где k принимает все целые значения. **23.** Для точки $M: r=\sqrt{13}$, $\cos\varphi=-\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\varphi=-\frac{3}{\sqrt{13}}$; отсюда $\varphi=\pi+\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}+2k\pi$; для точки N: $r=5$, $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\sin\varphi=-\frac{4}{5}$, $\varphi=-\arcsin\frac{4}{5}+2k\pi$. **24.** 1) $\left(\frac{1}{3}, \frac{14}{3}\right)$; 2) $\left(-\frac{7}{4}, \frac{17}{4}\right)$; 3) $(-18, 1)$; 4) $\left(-\frac{17}{4}, \frac{15}{4}\right)$. **25.** $\left(\frac{5}{2}, -1\right)$. **26.** Если или $x\neq 0$ или $y\neq 0$, то точки $M_1(x, y)$ и $M_2(-x, -y)$ различны; середина отрезка M_1M_2 имеет координаты $0, 0$; т. е. совпадает с началом координат. Если же $x=y=0$, то обе точки M_1 и M_2 совпадают с началом координат. **27.** Абсцисса середины отрезка с концами $M_1(x, y)$ и $M_2(-x, y)$ равна нулю. Ордината отрезка с концами $M_1(x, y)$ и $M_2(x, -y)$ равна нулю. **28.** $\left(-\frac{37}{10}, \frac{21}{10}\right)$. **29.** Координаты центра тяжести будут $x=2$, $y=3$, если на оси Oy лежит больший катет, а на оси Ox — меньший. **30.** $A(0, 7)$, $B(4, 1)$, $C(-5, 7)$. **31.** $-a$ и $-b$. **32.** $O(5, -1)$. **33.** 1) 5; 2) $\sqrt{74}$. **34.** Координаты центра окружности определятся из уравнений $(x-3)^2+(y-1)^2=(x+2)^2+y^2=(x-1)^2+(y-4)^2$, откуда $x=\frac{11}{34}$, $y=\frac{47}{34}$. Радиус $r=\frac{\sqrt{8450}}{34}$. **35.** $(2\pm 4\sqrt{3}, 0)$. **36.** $\left(0, -\frac{31}{2}\right)$. **37.** 1) 1; 2) ориентированная площадь равна $-\frac{7}{2}$; площадь равна $\frac{7}{2}$. **38.** Ориентированные площади треугольников $M_1M_3M_4$ и $M_2M_3M_4$ одного знака (сделать чертёж). **40.** Не лежит (см. предыдущую задачу; для внутренних точек треугольника и только для таких точек числа σ_1, σ_2, σ_3 одного знака). **41.** Отрезки M_1M_2 и M_3M_4 пересекаются тогда и только тогда, когда точки M_1 и M_2 лежат по разные стороны от прямой M_3M_4 и точки M_3 и M_4 лежат по разные стороны от прямой M_1M_2; иначе говоря: ориентированные площади треугольников $M_1M_3M_4$ и $M_2M_3M_4$ должны быть противоположных знаков и ориентированные площади треугольников $M_3M_1M_2$ и $M_4M_1M_2$ должны быть разных знаков. Это не имеет места в данной задаче и, значит, данные отрезки M_1M_2 и M_3M_4 не пересекаются (проверьте построением). **42.** $\frac{1}{2}\bmod\begin{vmatrix}0 & y & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 1\end{vmatrix}=8$, откуда $|2y+2|=16$, $2y+2=\pm 16$, $(0, -9)$ и $(0, 7)$. **43.** 1) $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — две различные точки; тогда $M_1'(a_1x_1+b_1y_1+c_1, a_2x_1+b_2y_1+c_2)$ и $M_2'(a_1x_2+b_1y_2+c_1, a_2x_2+b_2y_2+c_2)$ также различны, так как, предполагая противное, будем иметь: $a_1x_1+b_1y_1+c_1=a_1x_2+b_1y_2+c_1$, $a_2x_1+b_2y_1+c_2=a_2x_2+b_2y_2+c_2$ или $a_1(x_1-x_2)+b_1(y_1-y_2)=0$, $a_2(x_1-x_2)+b_2(y_1-y_2)=0$, и так как $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то $x_2-x_1=0$, $y_2-y_1=0$, т. е. точки M_1

и M_2 совпадают (противоречие); 2) прообраз точки (α, β) мы найдём, решив систему: $\alpha = a_1x + b_1y + c_1$, $\beta = a_2x + b_2y + c_2$; эта система разрешима в силу того, что её детерминант отличен от нуля; 3) разрешая данные соотношения относительно x и y, получим снова линейные соотношения с определителем $\frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, т. е. с определителем, отличным от нуля; 4), 5), 6). Доказательства такие же, как и в случае сдвига или сжатия (лишь несколько видоизменяются выкладки). **44.** 1) $5x - 3y = 0$; 2) $6x + y = 0$; 3) $x + y = 0$. **45.** 1) $x + 3y - 18 = 0$; 2) $x + y - 1 = 0$; 3) $y = 5$; 4) $x + 4 = 0$. **47.** 1) $3x + 2y - 6 = 0$; 2) $5x - 3y + 15 = 0$; 3) $x - y - 1 = 0$. **48.** 1) $y = 3x$; 2) $y = -\frac{1}{2}x$ или $x + 2y = 0$. **49.** $x - 3y + 13 = 0$. **50.** $k = 12$. **53.** 1) $k = \frac{3}{2}$; $b = 2$; 2) $k = -2$, $b = 3$. **54.** $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$. **55.** $a = -\frac{4}{3}$, $b = 2$. **56.** $C \neq 0$. **57.** 1) $A = 0$, $C \neq 0$; 2) $B = 0$, $C \neq 0$. **58.** 1) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$; 2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **59.** Искомое уравнение можно взять в виде: $4x - 2y + C = 0$; координаты точки $(1, 3)$ должны удовлетворять этому уравнению: $4 - 6 + C = 0$, $C = 2$; ответ: $2x - y + 1 = 0$. **60.** $x - y = 0$. **61.** Угловой коэффициент данной прямой равен -7, а углы между данной прямой и любой из искомых равны 45° и 135°; $\pm 1 = \pm\frac{k + 7}{1 - 7k}$, откуда $k_1 = -\frac{3}{4}$, $k_2 = \frac{4}{3}$. Искомые уравнения $y - 3 = -\frac{3}{4}(x - 2)$, $y - 3 = \frac{4}{3}(x - 2)$ или $3x + 4y - 18 = 0$, $4x - 3y + 1 = 0$. **62.** $\frac{|4x + y - 2|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$ или $4x + y - 2 = \pm 17$, $4x + y - 19 = 0$, $4x + y + 15 = 0$. **63.** $x - 3y + 22 = 0$. $x - 3y + 2 = 0$, $3x + y - 4 = 0$, $3x + y - 24 = 0$. **64.** $\frac{13}{\sqrt{41}}$, $\frac{13}{\sqrt{34}}$, $\frac{13}{\sqrt{5}}$. **65.** $\frac{10}{\sqrt{17}}$. **66.** $-\frac{2}{\sqrt{17}}$. **67.** $\frac{x + y - 2}{\sqrt{2}} = \pm\frac{7x - y + 4}{\sqrt{50}}$ или $6x + 2y - 3 = 0$, $x - 3y + 7 = 0$. **68.** $\frac{3x + y - 4}{\sqrt{10}} = \pm\sqrt{10}$ или $3x + y - 14 = 0$, $3x + y + 6 = 0$. **69.** $x^2 + y^2 - 1 = 0$. **70.** $(x + 5)^2 + (y + 6)^2 = 9$. **71.** $x^2 + y^2 + 10x - 2y = 0$. **72.** $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 25 = 0$. **73.** $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. **74.** $x^2 + y^2 - 2ay = 0$. **75.** $x^2 + y^2 - x - y - 6 = 0$. **76.** Уравнение $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - a^2 = 0$ можно переписать так:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - a^2 = 0.$$

Возьмём теперь уравнение $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$; перепишем его так $\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C$. Это уравнение определяет окружность тогда и только тогда, когда $A^2 + B^2 - 4C > 0$. **77.** 1) $x^2 + y^2 + 2x + 4y = (x + 1)^2 + (y + 2)^2 - 5$; уравнение 1) определяет окружность с центром в точке $(-1, -2)$ и радиусом $\sqrt{5}$. Для второго примера перепишем уравнение $2x^2 + 2y^2 + 3x + 7y - 8 = 0$ в виде $x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}y - 4 = 0$ или $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{61}{8} = 0$. Центр окружности в точке $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}\right)$; радиус равен $\sqrt{\frac{61}{8}}$. **78.** $3x - 4y + 25 = 0$. **79.** $y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$ или

$x_1x+y_1y=a^2$, так как $x_1^2+y_1^2=a^2$. **80.** Пусть $A(x-3)+B(y-5)=0$ — уравнение одной из касательных. Расстояние от неё до начала координат равно 3 (радиусу окружности):

$$\frac{|-3A-5B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=3, \quad 21AB+16B^2=0,$$

откуда или $B=0$ или $A:B=16:-21$. Искомые уравнения: $x-3=0$, $16(x-3)-21(y-5)=0$ или $16x-21y-57=0$. **81.** $x-3y=0$, $9x+2y=0$. **82.** $48x+25y-169=0$. **83.** $x+2y-5=0$. **84.** $\frac{x^2}{\frac{113}{4}}+\frac{y^2}{16}=1$. **85.** $3\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$.

86. $\left(-\frac{25}{9}, \pm\frac{8}{9}\sqrt{14}\right)$. **87.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **88.** $2x-3y=0$, $2x+3y=0$. **89.** $x-y=0$, $9x-4y=0$. **90.** $x+2y-4=0$. **91.** $15x-2y-73=0$. **92.** $4x-15y-1=0$. **93.** $x+9y-6=0$. **94.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **95.** $\frac{x}{2}\pm\frac{y}{3}=0$, $F(\pm\sqrt{13}, 0)$. **96.** 1) $y=(x-1)^2$; вершина в точке $(1, 0)$, парабола вогнута вверх; 2) $y=-(x+2)^2$, вершина в точке $(-2, 0)$, парабола вогнута вниз; 3) $y-\frac{3}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$, вершина в точке $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, парабола вогнута вверх; 4) $y+4=(x-3)^2$, вершина в точке $(3-4)$, парабола вогнута вверх; 5) $y+3=-(x-1)^2$, вершина в точке $(1, -3)$, парабола вогнута вниз; 6) $y-4=-(x-9)^2$; вершина $(9, -4)$. **97.** $k=2ah=2\cdot 6\cdot 3=36$. **98.** Уравнение диаметра параболы $y=3x^2$, проходящего через точку $(1, 5)$, будет $x=1$. Угловой коэффициент хорд, сопряжённых этому диаметру, $k=2ah=2\cdot 3\cdot 1=6$. Искомое уравнение хорды: $y-5=6(x-1)$ или $6x-y-1=0$. **99.** $y+1=2x$ или $2x-y-1=0$. **100.** $y+y_0=6x_0x$; $6x_0=2x_0=3y_0=27{,}18x-y-27=0$. **101.** $20=\frac{1}{4\cdot\frac{1}{8}}+y_0$, откуда $y_0=18$, $x_0=\pm\sqrt{8y_0}=\pm 12$; искомых точек две: $(\pm 12, 18)$. **102.** $\frac{1}{a}$.

103. 1) Составляем и решаем уравнение $\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}\operatorname{tg}\alpha-1=0$, $\operatorname{tg}^2\alpha-1=0$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$; формулы $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$, $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$ принимают вид: $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$; данное уравнение принимает вид

$$5\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2+8\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\,\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}+5\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2-18\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}-18\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}+9=0$$

или

$$9x'^2+y'^2-18\sqrt{2}\,x'+9=0,$$

или $9(x'-\sqrt{2})^2+y'^2-9=0$. Полагая $x'-\sqrt{2}=X$, $y'=Y$, будем иметь $9X^2+Y^2=9$ или $\frac{X^2}{1}+\frac{Y^2}{9}=1$; — эллипс с полуосями $a=1$, $b=3$. Из соотношения $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ находим: $x'=\frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $y'=\frac{-x+y}{\sqrt{2}}$ и значит: $X=\frac{x+y}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\frac{x+y-2}{\sqrt{2}},\qquad Y=\frac{-x+y}{\sqrt{2}};\qquad(\alpha)$

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}=\frac{X-Y+\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}=\frac{X+Y+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.\qquad(\beta)$$

Уравнение осей симметрии в канонической системе:

$X=0$ (большая ось),
$Y=0$ (меньшая ось),

а в начальной: $x+y-2=0$ и $x-y=0$ [из формул (α)].

Координаты вершин в канонической системе

$$X_{A_1}=1,\ Y_{A_1}=0;\ X_{A_2}=-1,\ Y_{A_2}=0;\ X_{B_1}=0,\ Y_{B_1}=3;\ X_{B_2}=0,\ Y_{B_2}=-3,$$

а в начальной системе [см. формулы (β)]:

$$x_{A_1}=\frac{1-0+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y_{A_1}=\frac{1+0+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$A_1\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Точно так же найдём:

$$A_2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right),\ B_1\left(\frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}\right),$$

$$B_2\left(\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}}\right).$$

Наконец: фокусы лежат на большой оси симметрии, т. е. на оси OY на расстоянии $\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$ от центра симметрии эллипса. Значит, их канонические координаты

$$X_{F_1}=0,\ Y_{F_1}=2\sqrt{2};\ X_{F_2}=0,\ Y_{F_2}=-2\sqrt{2};$$

координаты по отношению к начальной системе:

$$x_{F_1}=\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1,\ y_{F_1}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3,\ F_1\ (-1,\ 3)$$

и точно так же найдём F_2 $(3, -1)$. Координаты центра $X=Y=0$, откуда

$$x=1,\quad y=1,$$

$$2)\ \operatorname{tg}^2\alpha+\frac{-3}{-2}\operatorname{tg}\alpha-1=0,\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2},\quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x'-y'),\quad y=\frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y').$$

Данное уравнение принимает следующий вид:

$$\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)^2-4\,\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\,\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}+4\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right)^2-2\,\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}-$$
$$-\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}+2=0.$$

или $5y'^2-\sqrt{5}\,x'+2=0$ или $5y'^2-\sqrt{5}\left(x'-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=0$. Полагая $y'=Y$, $x'-\frac{2}{\sqrt{5}}=X$, найдём $5Y^2-\sqrt{5}\,X=0$ или $Y^2-\frac{1}{\sqrt{5}}X=0$ (сделать чертёж). Для построения параболы $Y^2-\frac{1}{\sqrt{5}}X=0$ в канонической системе полезно заметить, что она проходит через точки $(\sqrt{5}, \pm 1)$. Найдём формулы преобразования: из соотношений

$$x=\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}},\quad y=\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}$$

находим:

$$x'=\frac{2x+y}{\sqrt{5}},\quad y'=\frac{-x+2y}{\sqrt{5}}$$

и, значит,

$$X=\frac{2x+y}{\sqrt{5}}-\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2x+y-2}{\sqrt{5}},\quad Y=\frac{-x+2y}{\sqrt{5}};$$

обратно

$$x=\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}=\frac{2\left(X+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-Y}{\sqrt{5}}=\frac{2X-Y}{\sqrt{5}}+\frac{4}{5},$$

$$y=\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}=\frac{X+\frac{2}{\sqrt{5}}+2Y}{\sqrt{5}}=\frac{X+2Y}{\sqrt{5}}+\frac{2}{5}.$$

Уравнение оси симметрии $(OX): Y=0$ или $x-2y=0$; уравнение касательной в вершине параболы: $X=0$ или $2x+y-2=0$ координаты вершины $X=Y=0$, откуда $x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{2}{5}$; координаты фокуса $X=\frac{1}{4\sqrt{5}}$, $Y=0$; отсюда $x=\frac{9}{10}$, $y=\frac{9}{20}$. **105.** 1) $z=0$; 2) $x=0$; 3) $y=0$; 4) $y=z=0$; 5) $x=z=0$; 6) $x=y=0$; 7) $x=y=z=0$. **106.** $-x$, $-y$, $-z$. **107.** $P(0, y, z)$, $Q(x, 0, z)$, $R(x, y, 0)$. **108.** 1) Отрезок MN коллинеарен плоскости xOy, т. е. лежит в этой плоскости или параллелен ей и середина этого отрезка лежит на оси Oz; 2) $MN \parallel Ox$, и середина отрезка MN лежит в плоскости yOz; 3) $MN \parallel xOz$; точка N лежит на оси Oy; 4) $MN \parallel Oy$, и середина отрезка MN лежит в плоскости xOz. **109.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right)$. **110.** Рассмотрим точку $\left(\frac{3+\lambda}{1+\lambda}, \frac{2+\lambda}{1+\lambda}, \frac{5-2\lambda}{1+\lambda}\right)$, делящую данный отрезок в отношении λ. Приравнивая нулю поочерёдно каждую из координат этой точки, найдём две остальные. Ответ:

$$\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right),\quad \left(-1, 0, -9\right),\quad \left(\frac{11}{7}, \frac{9}{7}, 0\right).$$

111. $A(-4, 3, -4)$, $B(-7, 4, 0)$, $C(-8, -5, 1)$. **112.** Старые координаты нового начала 2, 6, -6, а новые координаты старого начала отличаются от указанных знаками, т. е. они соответственно равны

$-2, -6, 6$. **113.** $\sqrt{19}$. **114.** $3\sqrt{2}$. **115.** $\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$. **116.** $\left(0, 0, \frac{15}{2}\right)$.
117. $\pm \frac{17}{\sqrt{14}\sqrt{29}}$. **118.** Ось $Ox: l=1$, $m=0$, $n=0$ и т. д. направляющие точки осей соответственно E_1, E_2 и E_3. **119.** $\parallel yOz$; 2) $\parallel zOx$; 3) $\parallel xOy$.
120. $\cos\alpha_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta_{1,2} = \pm\frac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma_{1,2} = \pm\frac{3}{\sqrt{4}}$, где $\alpha_{1,2}$ — углы прямой с осью Ox, $\beta_{1,2}$ — с осью Oy, $\gamma_{1,2}$ с осью Oz. **121.** 60 и 120°.
122. $\sqrt{629}$. **123.** 13. **125.** $x=t$, $y=7t$, $z=-4t$. **126.** $x=3t$, $y=7t$, $z=-t$. **127.** $x=2-5t$, $y=1$, $z=7-3t$. **128.** $x=t$, $y=0$, $z=0$ (ось Ox), $x=0$, $y=t$, $z=0$ (ось Oy); $x=0$, $y=0$, $z=t$ (ось Oz). **129.** $x=t$, $y=t$, $z=t$. **130.** $3(x-3)-2(y+1)+z-2=0$ или $3x+2y+z-13=0$. **131.** $x=3$, $y=1$, $z=2$. **132.** $2x-3z=0$. **133.** $x-4y+1=0$. **134.** 1) $A\neq 0$, 2) $B^2+C^2\neq 0$, 3) $B\neq 0$ и $C\neq 0$. **135.** $6x-5y-3z+2=0$.
136. $x+y-z=0$. **137.** $10x-13+4z-7=0$. **138.** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$.
139. $20x+15y-12z-60=0$. **140.** $x+y+z+2=0$, $x-y+z+6=0$, $x-y-z+4=0$, $x+y-z=0$. **141.** $\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{3}{2\sqrt{21}}$. **142.** $\cos\alpha_{1,2} = \pm\frac{3}{\sqrt{19}}$, $\cos\beta_{1,2} = \pm\frac{3}{\sqrt{19}}$, $\cos\gamma_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{19}}$, где $\alpha_{1,2}$ — углы данной плоскости с плоскостью Ox, $\beta_{1,2}$ — углы данной плоскости с плоскостью Oy, $\gamma_{1,2}$ — углы данной плоскости с плоскостью Oz. **143.** $1\cdot 3+1\cdot(-2)+(-1)\cdot 1=0$. **144.** $\sin\varphi = \frac{6}{\sqrt{11}\sqrt{14}}$. **145.** Если α, β, γ — углы, образованные данной плоскостью с осями координат, то $\sin\alpha = \frac{4}{3\sqrt{2}}$, $\sin\beta = \frac{1}{3\sqrt{2}}$, $\sin\gamma = \frac{1}{3\sqrt{2}}$. **146.** $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{6}}$. **147.** Уравнения перпендикуляра, опущенного на ось Ox: $x=a$, $cy-bz=0$. Уравнения перпендикуляра, опущенного на ось Oy: $y=b$, $az-cx=0$, уравнения перпендикуляра, опущенного на ось Oz: $z=c$, $bx-ay=0$. **148.** $x+y-z+4=0$, $x+z=0$.
149. $5y-z+1=0$, $5x+11z+1=0$, $x-11y-2=0$. **150.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **151.** $y+z+1=0$, $2x-y+z-7=0$. **152.** $\frac{14}{\sqrt{74}}$. **153.** $x^2+y^2+z^2=16$.
154. $(x-3)^2+(y+5)^2+(z-1)^2=25$ или $x^2+y^2+z^2-6x+10y-2z+10=0$. **155.** Данное уравнение можно переписать так: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2-14=0$; центр сферы $(1, 2, -3)$; радиус $\sqrt{14}$. **156.** 1) Эллиптический цилиндр с образующими, параллельными оси Oy; направляющая линия — эллипс — лежит в плоскости xOz; его уравнение в этой плоскости $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; 2) гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oy; направляющая линия, гипербола, лежит в плоскости xOz, её уравнение в этой плоскости $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (гипербола, для которой ось Ox — действительная ось, а ось Oz — мнимая); 3) параболический цилиндр с обра-

зующими, коллинеарными оси Oy; направляющая линия — парабола — лежит в плоскости xOz и её уравнение в этой плоскости $z=ax^2$ (Oz — ось симметрии); 4) эллиптический цилиндр с образующими, параллельными оси Ox, направляющая линия — эллипс — лежит в плоскости yOz; его уравнение в этой плоскости имеет вид: $\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 5) гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Ox; направляющая линия — гипербола — лежит в плоскости zOy; её уравнение в этой плоскости имеет вид: $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; 6) параболический цилиндр с образующими, коллинеарными оси Ox. Направляющая линия — парабола — лежит в плоскости yOz; её уравнение в этой плоскости имеет вид: $z^2=2py$ (ось Oy — ось симметрии); 7) гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz; направляющей линией является гипербола, уравнение которой в плоскости xOy имеет вид $xy=1$ (оси Ox и Oy являются асимптотами этой гиперболы); 8) параболический цилиндр с образующими, коллинеарными оси Oz; направляющей кривой является парабола, лежащая в плоскости xOy; её уравнение в этой плоскости имеет вид: $y=ax^2+bx+c$; 9) круговой цилиндр с образующими, коллинеарными оси Oz. Направляющей линией является окружность, уравнение которой в плоскости xOy имеет вид $x^2+y^2-2y=0$ или $x^2+(y-1)^2=1$; центр этой окружности находится в точке $(0, 1, 0)$, радиус равен 1.

Читателю рекомендуется начертить все заданные цилиндрические поверхности. **157.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$. **158.** $ah^2x^2+bhxz-zhy+cz^2=0$. **159.** $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}-\frac{(z-h)^2}{h^2}=0$. **160.** 1) $y^2+z^2=(ax^2+bx+c)^2$, 2) $y^2+z^2=\sin^2 x$. **161.** $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$, $f(0)=-2$, $f(-1)=-1$, $f(5)=\frac{1}{2}$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{3}{2}$, $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+2$, $f(1)$ — не определено. **162.** $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$; $f(3)=\frac{3}{4}$, $f(a)=\frac{2a}{a^2-1}$, $f(-a)=-\frac{2a}{a^2-1}$, $f(a^2)=\frac{2a^2}{a^4-1}$, $[f(a)]^2=\frac{4a^2}{(a^2-1)^2}$, $f(-1)$ — не определено. **163.** $(-\infty, +\infty)$; $f(t)+1=t^3$, $f(t+1)=(t+1)^3-1$, $f(t^2)=t^6-1$, $f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^3}-1$, $\frac{f(1)}{t}=0$, $f(-t)=-t^3-1$, $f(2t)=8t^3-1$, $2f(t)=2t^3-2$. **164.** 1) $x_1=10$, $x_2=-8$; 2) $x_1=3$, $x_2=-1$. **165.** $f(-1)=f(1)=1$, $f(-a)=f(a)=a^4-3a^2+\frac{1}{a^2}$. **166.** $f(3)=f\left(\frac{1}{3}\right)=3^2-2\cdot 3+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2\cdot 3}$. **167.** $f(x)f(y)=a^xa^y$; $f(x+y)=a^{x+y}$. **168.** $f(x+y)=k(x+y)$, $f(x)+f(y)=kx+ky$, откуда $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Далее $f(Cx)=k\,Cx=C\,(kx)=Cf(x)$. **169.** $r=\frac{1}{\sqrt{\pi h}}$. Область определения — интервал $(0, +\infty)$, т. е. $0<h<+\infty$. **170.** $v=\frac{\pi h(4-h^2)}{3}$. Область определения — интервал $(0, 2)$, $0<h<2$. **171.** 1) $(-\infty, +\infty)$; 2) $(-1, 1)$; 3) множество интервалов $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, где k принимает все целые значения; 4) $(-\infty, -2)$ и $(1, +\infty)$; 5) $(0, 3)$, $(5, +\infty)$; 6) все действительные числа кроме 0; 7) все действительные числа, кроме трёх: 1, -2 и 6; 8) $(-\infty, -3]$, $(0, 1)$, $[2, +\infty)$; 9) множество всех целых чисел;

10) множество интервалов $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, где k принимает все целые значения; 11) $(-\infty, -2)$, $(0, +\infty)$; 12) все действительные числа кроме нуля; 13) все действительные числа; 14) все действительные числа, кроме $x=0$; данная функция может быть задана ещё так: $y=0$, если $x\neq 0$. **173.** $v=8\pi(l-3)(6-l)$. Область определения — интервал $(3, 6)$, т. е. $3<l<6$, график — дуга параболы. **174.** $t=\frac{100\tau-3300}{179}$.

Если считать абсолютный нуль за $-273°$, а также допустить существование сколь угодно высоких температур, то область определения этой функции будет полусегмент $\left[-\frac{2297}{6}, +\infty\right)$. График данной функции состоит из точек прямой $t=\frac{5}{9}\tau-\frac{160}{9}$ с абсциссами, большими или равными $-\frac{45\,567}{100}$ (т. е. полупрямая). **175.** $J=\frac{E}{10}$. Область определения — полуинтервал $[0, +\infty)$, т. е. $0\leqslant E<+\infty$.

График—полупрямая, соответствующая точкам прямой с неотрицательными абсциссами. **177.** $y=1-x$. **178.** $y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. **179.** $y=\begin{cases}0, & \text{если } x<3,\\ \frac{1}{x}, & \text{если } x>5.\end{cases}$

Область определения — два интервала: $(-\infty, 3)$ и $(5, +\infty)$. **180.** $\sin(-x)=-\sin x$, $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cosec}(-x)=-\operatorname{cosec} x$, $\cos(-x)=\cos x$, $\operatorname{ctg}(-x)=\operatorname{ctg} x$, $\sec(-x)=\sec x$. **181.** $\frac{x}{1-x^2}+\frac{2}{1-x^2}$. **182.** Множество M должно удовлетворять условию: если x—любое число из множества M, то $-x$ также входит в M. Равенство $f(x)=f(-x)$ (для чётной функции) и $f(-x)=-f(x)$ (для нечётной) должно выполняться при всех $x\in M$. **183.** Определим функцию $\varphi(x)$ так: $\varphi(x)=\varphi(-x)=f(x)$ при всех x из области определения функции $f(x)$. При этом область определения функции $\varphi(x)$ будет дополнена всеми числами, симметричными числам области определения $f(x)$. Нечётная функция строится так: $\varphi(x)=-\varphi(-x)=f(x)$ при всех x из области определения $f(x)$.

Геометрически это построение заключается в том, что функция $\varphi(x)$ определяется графиком функции $f(x)$, дополненным его зеркальным отражением в оси Oy, а график функции $\psi(x)$ определяется графиком функции $f(x)$, дополненным точками, симметричными всем точкам этого графика относительно начала координат. **184.** $x^2-4x+3=x^2-4x+4-1=(x-2)^2-1>-2$; значит, функция x^2-4x+3 ограничена снизу (числом -2). Докажем, что она не ограничена сверху. Возьмём любое число P, пусть Q — любое положительное число, большее чем P; тогда уравнение $x^2-4x+3=Q$ имеет действительные корни (почему?); пусть x_1 — какой-нибудь из двух действительных корней этого уравнения; тогда $f(x_1)=x_1^2-4x_1+3=Q>P$. Итак, какое бы число мы ни взяли, найдётся $x=x_1$ такой, что $f(x_1)>P$, а это и значит, что функция $f(x)$ не ограничена сверху. **185.** $-x^2+8x=-(x^2-8x+16-16)=16-(x-4)^2<15$. Функция ограничена сверху. Для доказательства неограниченности снизу будем рассуждать так: пусть p — любое число. Возьмём отрицательное число $t<p$. Тогда уравнение $-x^2+8x=t$ будет иметь действительные корни (почему?). Пусть $x=x_1$ — один из таких корней; тогда $f(x_1)=t<p$, а это как раз и означает, что функция $f(x)=-x^2+8x$ не ограничена снизу. **186.** $\frac{x}{x^2+1}-1=\frac{-x^2+x-1}{x^2+1}<0$ при всех x (почему?); $1+\frac{x}{x^2+1}=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}>0$ при всех x (почему?). Следовательно, $-1 < \frac{x}{x^2+1} < 1$ при всех x. **187.** Пусть $|f(x)| < P$ и $|\varphi(x)| < Q$ при всех $x \subset M$. Тогда $|f(x) \pm \varphi(x)| \leqslant |f(x)| + |\varphi(x)| < P + Q$ и $|f(x)\varphi(x)| = |f(x)|\,|\varphi(x)| < PQ$ $(P > 0$ и $Q > 0)$.

188. $$y_1 - y_2 = \frac{x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{x_1 + x_1x_2^2 - x_2 - x_1^2x_2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}.$$

Если $x_1 > 1$, $x_2 > 1$ и $x_1 < x_2$, то $1 - x_1x_2 < 0$, $x_1 - x_2 < 0$, значит, $y_1 - y_2 > 0$. **189.** Или во множестве M найдётся два разных аргумента $x_1 \neq x_2$ такие, что $f(x_1) = f(x_2)$ или во множестве M найдутся такие 4 значения аргумента $x_1 < x_2$ и $x_3 < x_4$, такие, что $f(x_1) < f(x_2)$, но $f(x_3) > f(x_4)$. **190.** $y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2)$ и т. д. **191.** $y_1 - y_2 = \sqrt{1-x_1^2} - \sqrt{1-x_2^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2}} > 0$, если $-1 < x_1 < x_2 < 0$. **192.** Имеем, например, $f(-3) = 3$, $f(-1) = -1$, $f(3) = 15$. **193.** Область определения функции $\operatorname{tg} x$ удовлетворяет условию: если в неё входит x, то в неё входит и $x+\pi$; при этом $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$ при всех x из области определения $\operatorname{tg} x$. Возьмём любое число $0 < l_1 < \pi$; тогда, например, $\operatorname{tg} 0 \neq \operatorname{tg} l_1$ $\left(\text{при } l_1 = \frac{\pi}{2},\ \operatorname{tg} l_1 \text{ даже и не определён!}\right)$. Значит, число π — наименьший период. **195.** Да. $l = 2\pi$. **196.** $y = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } 2k < x \leqslant 1 + 2k, \\ x^2, & \text{если } 1 + 2k < x < 2 + 2k. \end{cases}$

197. 1) $\frac{\sin\alpha}{2}, \frac{\sin 2\alpha}{3}, \frac{\sin 3\alpha}{4}, \ldots$; 2) $\frac{2}{1}, \frac{2^2}{2!}, \frac{2^3}{3!}, \frac{2^4}{4!}, \ldots$; 3) $\cos\alpha - 1$, $2\cos 2\alpha - 2!$, $3\cos 3\alpha - 3!, \ldots$; 4) $\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$; 5) $3, 0, 3^3, 0, 3^5, 0, \ldots$; 6) $\frac{1}{1}, 1+\frac{1}{2^2}, \frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2^4}, \frac{1}{5}, 1+\frac{1}{2^6}, \ldots$; 7) $1, -2^2, 1, 2^4, 1, -2^6, 1, 2^8, \ldots$; 8) $-1, -1, 1, 1, -1, \ldots$ **198.** 1) $a_n = 4n - 3$; 2) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 8$, $a_n = 0$ при $n > 3$; 3) $a_n = 2^{n+1}$;

4) $a_n = \begin{cases} \frac{2}{n+2} & \text{при } n \text{ чётном}, \\ \frac{n+1}{2} & \text{при } n \text{ нечётном} \end{cases}$ или $a_{2n} = \frac{1}{n+1}$, $a_{2n-1} = n$; 5) $a_n = (-1)^{n+1}2$;

6) $a_n = \frac{n!}{2^n}$; 7) $a_n = \frac{1}{n!}$; 8) $a_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; 9) $a_1 = 1, a_2 = -\frac{3}{5}$, а при $n > 2$ $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$, 10) $a_n = \frac{2 \cdot 5 \ldots (3n+1)}{5 \cdot 9 \ldots (4n-3)}$. **199.** $f(x+l) = f(x)$, но $x + l \neq x$. **200.** $f(-x) = f(x)$, но $x \neq -x$ (если $x \neq 0$). **201.** Да. **202.** Нет. Пример: $f(x) = x$, $\varphi(x) = -x$ — взаимно однозначные функции. Их сумма $f(x) + \varphi(x) = 0$ — не взаимно однозначная функция. **203.** $x = \frac{y-b}{k}$. **204.** 1) $x = -1 - \sqrt{y-5}$; 2) $x = -1 + \sqrt{y-5}$. **205.** $x = -\sqrt{1-y^2}$. **206.** $x = \frac{1}{y}$ в обоих случаях. Обратная функция равна исходной (в обоих случаях).

207. Симметричны относительно биссектрисы угла xOy. **208.** График функции $f(x)$ должен быть симметричен относительно биссектрисы угла xOy. **209.** $x = \begin{cases} y, & \text{если } -1 \leqslant y < 1, \\ \sqrt{y}; & \text{если } y \geqslant 4. \end{cases}$ **210.** Проверить условие $\Delta > 0$. **211.** При умножении $f(x)$ на λ детерминант Δ также умножается на λ. **212.** Уравнение $y = \sqrt{1-x^2}$ определяет полуокружность радиуса с центром в начале координат, расположенную в области положительных ординат. Геометрически положительная выпуклость функции, определяемой таким графиком, очевидна. Это можно установить и аналитически. **213.** Проверить условие $\Delta > 0$.

215. Следствие из 211. **216.** $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ ax_1^2+bx_1+c & ax_2^2+bx_2+c & ax_3^2+bx_3+c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= a\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ x_1^2 & x_2^2-x_1^2 & x_3^2-x_1^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a(x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2+x_1 & x_3+x_1 \end{vmatrix} =$$

$= a(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$ и это выражение >0 при $a>0$, $x_1<x_2<$ $<x_3$ и оно <0, если $a<0$, $x_1<x_2<x_3$.

217. $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d & ax_2^3+bx_2^2+cx_2+d & ax_3^3+bx_3^2+cx_3+d \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ ax_1^3+bx_1^2 & ax_2^3+bx_2^2 & ax_3^3+bx_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ ax_1^3+bx_1^2 & a(x_2^3-x_1^3)+b(x_2^2-x_1^2) & a(x_3^3-x_1^3)+b(x_3^2-x_1^2) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)[a(x_3^2+x_3x_1-x_2^2-x_1x_2)+b(x_3-x_2)] =$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)[a(x_3-x_2)(x_1+x_2+x_3)+b(x_3-x_2)] =$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)[a(x_1+x_2+x_3)+b].$$

Если $x_1<x_2<x_3$, то $(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)>0$, и вопрос сводится к исследованию знака

$$a(x_1+x_2+x_3)+b.$$

Рассмотрим интервал $\left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right)$.

Если x_1, x_2, x_3 входят в этот интервал; $x_1 < -\frac{b}{3a}$, $x_2 < -\frac{b}{3a}$, $x_3 < -\frac{b}{3a}$, то $x_1+x_2+x_3 < -\frac{b}{a}$; пусть $a>0$; тогда $a(x_1+x_2+x_3)+b<0$, т. е. на интервале $\left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right)$ функция имеет отрицательную выпуклость. Если $a<0$, то $a(x_1+x_2+x_3)+b>0$ и на интервале $\left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right)$ функция имеет положительную выпуклость. Аналогичные заключения можно сделать и для интервала $\left(-\frac{b}{3a}, +\infty\right)$. **218.** 1) $|f(x)-f(a)|=|2x+1-(2a+1)|=$ $=2|x-a|$. Пусть $\varepsilon>0$ — любое число, тогда, если взять $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, то при $|x-a|<\delta$ мы будем иметь $|x-a|<\frac{\varepsilon}{2}$, $2|x-a|<\varepsilon$ или $|2x+1-$ $-(2a+1)|<\varepsilon$; 2) $|f(x)-f(a)|=|1-5x-(1-5a)|=5|x-a|$ и можно взять $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$; 3) $|f(x)-f(a)|=|\cos x-\cos a|=\left|2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right|<$ $<2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|<|x-a|$. Значит, если дано любое положительное число $\varepsilon>0$, то, полагая $\varepsilon=\delta$, будем иметь: если $|x-a|<\delta$, то и подавно $|\cos x-$ $-\cos a|<\varepsilon$; 4) $|f(x)-f(a)|=|x^3-a^3|=|x-a||x^2+ax+a^2|$, и вопрос сводится к доказательству ограниченности функции x^2+ax+a^2 в окрестности $x=a$. Пусть $|x-a|<1$; тогда $|x|<|a|+1$, значит, $|x^2+ax+a^2|\leqslant$ $\leqslant|x|^2+|a||x|+a^2<(|a|+1)^2+|a|(|a|+1)+a^2$; 5) $|f(x)-f(a)|=$ $=|2x-x^2-(2a-a^2)|=|2x-2a-(x-a)(x+a)|=|x-a||2-x+a|$, и вопрос сводится к доказательству ограниченности функции $2-x+a$ в окрестности $x=a$. **219.** Пусть $x=a$ — любое число из отрезка $[-1, 1]$. Предположим сначала, что $x\neq 1$ и $x\neq -1$, тогда

$$|f(x)-f(a)|=|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-a^2}|=\frac{|x+a||x-a|}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-a^2}},$$

и вопрос сводится к доказательству ограниченности функции

$$\frac{|x+a|}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-a^2}}$$

в окрестности $x=a$. Но это очевидно, так как функция $|x+a|$ ограничена в окрестности $x=a$ и при этом

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-a^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Докажем ещё непрерывность функции $\sqrt{1-x^2}$, например, при $x=1$. Так как функция $\sqrt{1-x^2}$ не определена при $x>1$, то для доказательства непрерывности функции $\sqrt{1-x^2}$ при $x=1$ надо показать, что если ε — любое положительное число, то найдётся такое положительное число δ, что

$$|f(x)-f(1)|=|\sqrt{1-x^2}-0|=\sqrt{1-x^2}<\varepsilon,$$

если только $1-\delta<x\leqslant 1$, причём значения x берутся, конечно, из области, определения функции $\sqrt{1-x^2}$. Ограничим сначала x условием $0<x\leqslant 1$; тогда $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\leqslant\sqrt{1-x}\sqrt{2}$. Далее, для того чтобы было выполнено неравенство $\sqrt{1-x}\sqrt{2}<\varepsilon$, надо взять $x>1-\frac{\varepsilon^2}{2}$. Назовём через δ положительное число, меньшее 1:

$$0<\delta<1$$

и меньшее чем

$$\frac{\varepsilon^2}{2}:\delta<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Тогда

$$1-\delta>1-\frac{\varepsilon^2}{2},$$

и значит, если мы возьмём $1 \geqslant x > 1 - \delta$, то и подавно будет выполнено неравенство $x > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$, т. е. $\sqrt{1-x}\sqrt{2} < \varepsilon$. Но в силу условия $0 < \delta < 1$ число $1-\delta$ положительное, значит, из выполнения условия $1 \geqslant x > 1-\delta$ будет следовать $1 \geqslant x > 0$ и значит, из неравенства $\sqrt{1-x}\sqrt{2} < \varepsilon$ будет следовать $\sqrt{1-x^2} < \varepsilon$. Аналогично доказывается непрерывность функции $\sqrt{1-x^2}$ при $x=-1$. **220.** Пусть $x=n$ — любое целое число. Тогда $E(n)=n$. Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и любое $\delta > 0$. Возьмём число x_0, большее чем $n-1$, чем $n-\delta$ и меньшее чем n; тогда $E(x_0)=n-1$, и мы видим, что $|E(x)-E(x_0)| = 1 > \frac{1}{2}$ для x, входящего в δ-окрестность точки $x=n$. **221.** Возьмём $\varepsilon = 1$ и любое $\delta > 0$. Найдём $|f(x)-f(1)| = |f(x)-1|$. Считая $x<1$, находим: $|f(x)-1| = |2x+4|$. Возьмём число x_0 бóльшим 0 и $1-\delta$, но мéньшим 1; тогда $|2x_0+4| > 4$. **222.** $|f(x)-f(0)| = \left|\frac{1}{x} - k\right| \geqslant \left|\frac{1}{|x|} - |k|\right|$. Возьмём $\varepsilon=1$ и любое число $\delta > 0$. Решим неравенство $\frac{1}{|x|} - |k| > 1$. Находим $|x| < \frac{1}{1+|k|}$. Обозначим через x_0 любое положительное число, меньшее чем δ и чем $\frac{1}{1+|k|}$; тогда $\frac{1}{|x_0|} - |k| > 1$, а значит, и подавно $\left|\frac{1}{x_0} - k\right| > 1$. Итак, в любой δ-окрестности нуля нашлось значение x_0, при котором $\left|\frac{1}{x_0} - k\right| > 1$, т. е. больше выбранного значения ε.

223. 1) Функция x^2+1 непрерывна, так как является полиномом (см. пример 1 этого параграфа); 2) непрерывность функции $\sin y$ при любом y доказана в примере § 93. Отсюда на основании теоремы о непрерывности сложной функции следует непрерывность функции $\sin(x^2+1)$ при любом значении $x=a$. Аналогично, на основании теорем этого параграфа, доказывается непрерывность остальных функций. **224.** Да. Пример: функция $\chi(x)$ Дирихле разрывна при любом значении $x=a$. Функция $x^2-\chi(x)$ также разрывна, а сумма этих функций $x^2-\chi(x)+\chi(x)=x^2$ непрерывна при любом значении $x=a$. **225.** Возьмём $\varepsilon=1$. Тогда в любой окрестности числа a найдутся числа x_0 (меньшие a), в которых $E(x_0)=a-1$ и значит, $|E(x_0)-E(a)| = \; > \varepsilon$. **226.** 1) См. предыдущий пример; 2) непрерывна; 3) непрерывна только слева; 4) непрерывна только справа.

227. 1) $\frac{1}{5}$; 2) 0; 3) 0; 4) 6. **228.** 1) -2; 2) nx^{n-1}; 3) $\lim \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} =$

$$= \lim_{x=0} \frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x=0} \frac{1-1+x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2};$$

$$4) \lim_{x=0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{16+x^2}-4} = \lim_{x=0} \frac{x^2(\sqrt{16+x^2}+4)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x=0} \frac{\sqrt{16+x^2}+4}{\sqrt{1+x^2}+1} = 4;$$

$$5) \lim_{x=0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x=0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1.$$

229. *Пусть* $l \neq 0$ — *любое число. Возьмём* $\varepsilon = |l|$. В любой окрестности числа a найдутся иррациональные точки x, в которых $\chi(x_0) = 0$, значит, $|\chi(x_0) - l| = |l| = \varepsilon$.

Если же $l = 0$, то надо в δ-окрестности числа a выбрать рациональное число. **230.** Если a не есть целое число, то, выбирая δ столь малым, чтобы в интервал $(a - \delta, a + \delta)$ не попало ни одного целого числа, будем иметь:

$$|E(x) - E(a)| = |E(a) - E(a)| = 0 < \varepsilon,$$

где ε — любое положительное число. Если же a — целое число, то $E(a) = a$ и в любой δ-окрестности числа a найдутся числа (меньшие a), в которых $E(x) = a - 1$. Отсюда легко доказать, что никакое число l не может быть пределом $E(x)$ в точке $x = a$. **231.** Да. Этот предел равен 0, так как функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна при $x = 0$; её значение при $x = 0$ равно 0 и точка $x = 0$ *предельная для области определения.* **232.** $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| < |x|$ при всех x из области определения функции $x \sin \frac{1}{x}$; значит, если дано $\varepsilon > 0$, то, полагая $\delta = \varepsilon$, будем иметь: $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$, если $|x - 0| < \delta$; кроме того, ясно, что точка $x = 0$ предельная для функции $x \sin \frac{1}{x}$, значит,

$$\lim_{x=0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0.$$

233. Нет, так как точка $x = a$ может не быть предельной для области определения функции $f(x)\varphi(x)$. Пример $f(x) = x$, $\varphi(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; нельзя сказать, что $\lim\limits_{x=0} [x\sqrt{x^2 - 1}] = 0$, так как в достаточно малой окрестности $x = 0$ функция $x\sqrt{x^2 - 1}$ нигде не определена. Если же точка $x = a$ предельная для области определения произведения $f(x)\varphi(x)$, то $\lim\limits_{x=a} [f(x)\varphi(x)] = 0$.

В самом деле: пусть функция $\varphi(x)$ ограничена числом $K > 0$ в δ_1-окрестности точки $x = a$:

$$|\varphi(x)| < K, \text{ если } |x - a| < \delta_1;$$

пусть $\varepsilon > 0$—любое число. Возьмём δ_2 таким, чтобы

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$$

для всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству

$$|x - a| < \delta_2.$$

Тогда при всех x из области определения произведения $f(x)\varphi(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$ (δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2) мы будем иметь:

$$|f(x)\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon,$$

а это как раз и означает, что

$$\lim_{x=a} [f(x)\varphi(x)] = 0.$$

234. Точка $x = 0$ *предельная для области определения данной функции.*

Пусть N — любое число, а Q — любое положительное число, большее чем N. Тогда неравенство $\left|\frac{1}{x}\right| > Q$ будет выполнено, если $|x| < \frac{1}{Q}$. Итак: $\delta = \frac{1}{Q}$. Если $|x| < \delta$, т. е. $|x| < \frac{1}{Q}$, то $\left|\frac{1}{x}\right| > Q > N$, а это как раз и означает, что

$$\lim_{x=0} \frac{1}{x} = \infty.$$

235. Точка $x = 3$ предельная для области определения данной функции. Положим $|x-3| < 1$, т. е. $2 < x < 4$; тогда

$$x^2 + 2x + 2 > 2^2 + 2 \cdot 2 + 2 = 10.$$

Пусть N — любое число, а Q — положительное число, большее чем N; тогда неравенство $\frac{1}{(x-3)} > \frac{Q}{10}$ будет выполнено, если $|x-3| < \sqrt{\frac{10}{Q}}$. Пусть δ — наименьшее из двух чисел 1 и $\sqrt{\frac{10}{Q}}$. Тогда при $|x-3| < \delta$ будут выполнены неравенства

$$x^2 + 2x + 2 > 10,$$

$$\frac{1}{(x-3)^2} > \frac{Q}{10}$$

и, значит,

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-3)^2} > 10 \cdot \frac{Q}{10} = Q > N,$$

т. е.

$$\lim_{x=3} \frac{x^2+2x+2}{(x-3)^2} = +\infty.$$

236. Точка $x = 0$ предельная для области определения данной функции.

Пусть N — любое число, а Q — положительное число, большее чем N; неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x}} > Q$$

будет выполнено, если $0 < x < \frac{1}{Q^2}$. Итак, полагая $\delta = \frac{1}{Q^2}$, будем иметь: при всех x, входящих в область определения данной функции ($x > 0$) и удовлетворяющих неравенству $|x| < \delta$, т. е. $|x| < \frac{1}{Q^2}$, $\frac{1}{\sqrt{x}} > Q > N$.

237. 1) $\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| = \frac{1}{|x+1|} < \varepsilon$; пусть $x < -1$; тогда $x+1 < 0$ и, значит, $|x+1| = -x-1$, т. е. неравенство $\frac{1}{|x+1|} < \varepsilon$ принимает вид: $\frac{1}{-x-1} < \varepsilon$ или $-x-1 > \frac{1}{\varepsilon}$, $-x > 1 + \frac{1}{\varepsilon}$, $x < -1 - \frac{1}{\varepsilon}$. Значит, если $N = -1 - \frac{1}{\varepsilon}$, то при $x < N$ будут выполнены все предыдущие неравенства.

$$2) \left|\frac{x}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2|2x+1|} < \varepsilon;$$

значит,

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

241. Пусть $\lim\limits_{x=a} f(x) = l$, где a и l — числа. Докажем, что $c = +\infty$ не есть предел функции $f(x)$ в точке $x = a$. Для доказательства надо установить, что существует такое положительное число ε и такое число N, что каково бы ни было положительное число δ, найдётся значение x_0, входящее в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющее неравенству $|x_0 - a| < \delta$, что $f(x_0) < N$. Возьмём $\varepsilon = 1$. Так как $\lim\limits_{x=a} f(x) = l$, то найдётся число $\delta_1 > 0$, что при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta_1$, мы будем иметь $|f(x) - l| < 1$, т. е. $l - 1 < f(x) < l + 1$. Возьмём $N = l + 1$; тогда мы можем утверждать, что в любой окрестности точки $x = a$ найдётся такое значение x_0, входящее в область определения функции $f(x)$, что $f(x_0) < N$, а это значит, что $+\infty$ не есть предел функции $f(x)$ в точке $x = a$. Точно так же доказывается, что $-\infty$ не есть предел функции $f(x)$ в точке $x = a$. Далее: 1) Пусть $\lim\limits_{x=a} f(x) = l$, где $a = +\infty$, l — число. Возьмём число $c \neq 0$ и докажем, что это число не есть предел функции $f(x)$ в точке $a = +\infty$. Для доказательства надо установить, что найдётся такое положительное число ε, что каково бы ни было число N, найдётся значение аргумента x_0, входящее в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющее неравенству $x_0 > N$, что $|f(x_0) - c| \geqslant \varepsilon$. Выберем окрестности $(c - \varepsilon', c + \varepsilon')$ и $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ точек c и l так, чтобы они не имели общих точек. Так как $\lim\limits_{x=+\infty} f(x) = l$, то найдётся такое число N, что $|f(x) - l| < \varepsilon$ при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $x > N$. Из неравенства $|f(x) - l| < \varepsilon$ следует $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. Пусть P — любое число. Ясно, что мы всегда найдём x_0, большее чем P (это будет любое значение x из области определения функции $f(x)$, большее чем P и N; такие значения x существуют, ибо по определению предела в точке $x = +\infty$ предполагается, что область определения функции $f(x)$ не ограничена сверху), что $f(x_0)$ будет в интервале $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, т. е.

$$|f(x_0) - c| > \varepsilon:$$

значит c не есть предел функции $f(x)$ в точке $x = +\infty$. Аналогично доказывается, что $+\infty$ и $-\infty$ не являются пределами $f(x)$ в точке $a = +\infty$. 2) Если $\lim\limits_{x=-\infty} f(x) = l$, где l — число, то доказательство, что число $c \neq l$ и несобственные числа $+\infty$ и $-\infty$ не являются пределами функции $f(x)$ в точке $x = -\infty$, проводится аналогично предыдущему. 3) Пусть $\lim\limits_{x=a} f(x) = +\infty$, где a — число. Докажем, что любое число c не есть предел функции $f(x)$ в точке $x = a$, т. е. что найдётся такое число $\varepsilon > 0$, что, каково бы ни было число $\delta > 0$, найдётся такое значение аргумента x_0 из области определения функции $f(x)$, что $|x_0 - a| < \delta$, но $|f(x_0) - c| \geqslant \varepsilon$. Возьмём $\varepsilon = 1$. Так как $\lim\limits_{x=a} f(x) = +\infty$, то найдётся такое число $\delta_1 > 0$, что при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta_1$, мы будем иметь $f(x) > c + 1$, значит, $f(x) - c > 1$ или $|f(x) - c| > 1$. Если мы теперь возьмём любое положительное число δ, то в силу того, что a есть предельная точка для области определения функции $f(x)$, в δ-окрестности точки $x = a$ найдётся значение x такое, что $|f(x_0)-c|>1$, значит, число c не есть предел функции $f(x)$ в точке $x=a$. Нетрудно также доказать, что $-\infty$ не есть предел функции $f(x)$ в точке $x=a$. 4) Если $\lim\limits_{x=a} f(x)=-\infty$, где a — число, то никакое число c не есть предел функции $f(x)$ в точке $x=a$; несобственное число $+\infty$ также не есть предел этой функции в той же точке. Доказательство аналогично предыдущему. 5) Пусть $\lim\limits_{x=+\infty} f(x)=+\infty$. Докажем, что никакое число c не есть предел функции $f(x)$ в точке $+\infty$, т. е. что найдётся такое число $\varepsilon>0$, что при любом N найдётся $x_0>N$ такое, что $|f(x_0)-c|\geqslant\varepsilon$. Возьмём $\varepsilon=1$. Так как $\lim\limits_{x=+\infty} f(x)=+\infty$, то найдётся такое число P, что при всех $x>P$, входящих в область определения функции $f(x)$, мы будем иметь $f(x)>c+1$, т. е. $|f(x)-c|>1$. Возьмём любое число N и возьмём значение аргумента x_0, большее N и P и входящее в область определения функции $f(x)$. Такое значение аргумента найдётся, так как область определения функции $f(x)$ не ограничена сверху. Для указанного значения аргумента $x=x_0$ мы будем иметь $|f(x_0)-c|>1$, а значит, c не есть предел функции $f(x)$ в точке $+\infty$. Докажем ещё, что несобственное число $-\infty$ не есть предел функции $f(x)$ в точке $x=+\infty$, т. е. что найдётся такое число N, что, каково бы ни было число P, найдётся $x_0>P$, такое, что $f(x_0)>N$. Нетрудно видеть, что таким числом N может быть любое число, например 0. В самом деле: пусть $N=0$; тогда в силу равенства $\lim\limits_{x=+\infty} f(x)=+\infty$ найдётся такое число Q, что при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $x>Q$, мы будем иметь $f(x)>Q$. Если P — любое число, то достаточно взять x_0 из области определения функции $f(x)$, удовлетворяющее неравенствам $x_0>Q$ и $x_0>P$; тогда $f(x_0)>0$. Такое значение аргумента $x=x_0$ найдётся, так как область определения функции $f(x)$ не ограничена сверху. 6), 7), 8) Рассуждения аналогичны предыдущему. **242.** Верна. Доказательство по существу не меняется. Надо только неравенство $|x-a|<\delta$ заменить неравенством $x>N$, где N — любое число. **243.** Пусть $\lim\limits_{x=+\infty} f(x)=l$, где l — число; тогда для любого $\varepsilon>0$ найдётся число N такое, что при всех x из области определения функции $f(x)$, удовлетворяющих неравенству $x>N$, мы будем иметь $|f(x)-l|<\varepsilon$, а значит, тем более $||f(x)|-|l||<\varepsilon$, ибо $||f(x)|-|l||\leqslant|f(x)-l|$. Аналогично доказывается теорема 3 в случае $a=-\infty$. Если $\lim\limits_{x=a} f(x)=+\infty$ или $\lim\limits_{x=a} f(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x=a}|f(x)|=+\infty$ независимо от того, будет ли a число собственное или одно из несобственных ($+\infty$ или $-\infty$). Докажем, например, что если a — число и $\lim\limits_{x=a} f(x)=-\infty$, то $\lim\limits_{x=a}|f(x)|=+\infty$. Возьмём любое положительное число N и положительное число $Q>N$. Так как $\lim\limits_{x=a} f(x)=-\infty$, то найдётся такое число $\delta>0$ что при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$, и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, мы будем иметь: $f(x)<-Q$; но $Q>0$, значит, $f(x)<0$. Из неравенства $f(x)<-Q$ следует $-f(x)>Q$ или $|f(x)|>Q$, ибо $f(x)<0$; но $Q>N$, значит, $|f(x)|>N$, т. е. $\lim\limits_{x=a}|f(x)|=+\infty$. **244.** В случае $l=+\infty$ теорема верна. Доказательство: возьмём $N=0$. Тогда найдётся такое число $\delta>0$, что при всех x из области определения функции $f(x)$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, мы будем иметь $f(x)>0$. Теорема верна и в случае $a=+\infty$ и в случае $a=-\infty$. Формулировка видоизменяется так: если $\lim\limits_{x=+\infty} f(x)=l$, где l — положительное число или $l=+\infty$, то найдётся такое положительное число N, что $f(x)>0$ при всех $x>N$, входящих в область определения функции $f(x)$. В случае $a=-\infty$ формулировка видоизменяется так: если $\lim\limits_{x=-\infty} f(x)=l$, где l — положительное число или $l=+\infty$, то найдётся такое число N, что $f(x)>0$ при всех $x<N$, входящих в область определения функции $f(x)$. Доказательство предлагается провести читателю самостоятельно. **245.** Теорема 6 верна для случаев $a=+\infty$ или $a=-\infty$. В доказательстве неравенства $|x-a|<\delta_1$ и $|x-a|<\delta_2$ придётся заменить неравенствами $x>N_1$ и $x>N_2$ и затем выбрать N наибольшим из чисел N_1 и N_2. Утверждение теоремы сводится в этом случае к тому, что $f(x)<\varphi(x)$ при всех x, входящих одновременно в область определения функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ и удовлетворяющих неравенству $x>N$. Теорема 6 верна в случае, если $\lambda=+\infty$, l — число или l — несобственное число $-\infty$. Теорема 6 верна в случае $l=-\infty$, а $\lambda=+\infty$. Доказательство предлагается провести читателю самостоятельно. **246.** В случае, если $a=+\infty$ или $a=-\infty$, а l — число, теорема 7 верна. В случае же, если $l=+\infty$ или $l=-\infty$, теорема 7 не верна.

Докажем, например, что если $\lim\limits_{x=-\infty} f(x)=l$, где l — число, то $f(x)$ ограничена при всех x, меньших некоторого числа N и входящих в область определения функции $f(x)$. В самом деле, возьмём, например, $\varepsilon=1$. Так как $\lim\limits_{x=-\infty} f(x)=l$, то найдётся такое число N, что при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $x<N$, мы будем иметь $|f(x)-l|<1$ или $||f(x)|-|l||<1$, откуда

$$|l|-1<|f(x)|<|l|+1.$$

247. Теорема 8 верна в случае $a=+\infty$ или $a=-\infty$. В доказательстве неравенства $|x-a|<\delta_1$ и $|x-a|<\delta_2$ надо соответственно заменить неравенствами $x>N_1$ и $x>N_2$, а затем выбрать число N, наибольшее из чисел N_1 и N_2. В случае $l=+\infty$ и $\lambda=+\infty$ теорема 8 видоизменяется так: если $\lim\limits_{x=a} f(x)=+\infty$, а $\lim\limits_{x=a} \varphi(x)=+\infty$ и если точка $x=a$ предельная для суммы $f(x)+\varphi(x)$, то $\lim\limits_{x=a}[f(x)+\varphi(x)]=+\infty$. Аналогично видоизменяется формулировка в случае $l=-\infty$, $\lambda=-\infty$. Если же $l=+\infty$, а $\lambda=-\infty$ или $l=-\infty$, а $\lambda=+\infty$, то о пределе $f(x)-\varphi(x)$ в точке $x=a$ ничего определённого сказать нельзя.

Например:

1) $\lim\limits_{x=+\infty} x=+\infty$, $\lim\limits_{x=+\infty}(-x)=-\infty$, $\lim\limits_{x=+\infty}[x+(-x)]=0$;

2) $\lim\limits_{x=+\infty} 2x=+\infty$, $\lim\limits_{x=+\infty}(-x)=-\infty$, $\lim\limits_{x=+\infty}[2x+(-x)]=+\infty$;

3) $\lim\limits_{x=+\infty} x=+\infty$, $\lim\limits_{x=+\infty}(-2x)=-\infty$, $\lim\limits_{x=+\infty}[x+(-2x)]=-\infty$;

4) $\lim\limits_{x=0}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x=0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x=0}\left[\left(2+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{x^2}\right]=2$ и т. д.

248. Если $a=+\infty$, то в доказательстве теоремы 10 неравенства $|x-a|<\delta_1$, $|x-a|<\delta_2$ заменяются соответственно неравенствами $x>N_1$, $x>N_2$. Затем надо выбрать N, наибольшее из чисел N_1 и N_2. Аналогично видоизменяется доказательство в случае $a=-\infty$. Если $l=+\infty$, $\lambda>0$, то теорема видоизменится так: если $\lim\limits_{x=a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x=a}\varphi(x)=\lambda>0$, причём точка $x=a$ предельная для области определения произведения $f(x)\varphi(x)$, то $\lim\limits_{x=a}[f(x)\varphi(x)]=+\infty$. В остальных случаях, при условии, что точка

$x=a$ предельная для области определения произведения, мы будем иметь:

Если $\lim\limits_{x=a} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x=a} \varphi(x)=\lambda>0$, то $\lim\limits_{x=a}[f(x)\varphi(x)]=-\infty$.

Если $\lim\limits_{x=a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x=a} \varphi(x)=\lambda<0$, то $\lim\limits_{x=a}[f(x)\varphi(x)]=-\infty$.

Если $\lim\limits_{x=a} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x=a} \varphi(x)=\lambda<0$, то $\lim\limits_{x=a}[f(x)\varphi(x)]=+\infty$.

Если одна из функций в точке $x=a$ имеет бесконечный предел, а другая предел, равный нулю, то ничего определённого о пределе их произведения сказать нельзя. Примеры:

1) $\lim\limits_{x=0}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x=0} x^2=0$, $\lim\limits_{x=0}\left[\frac{1}{x^2}\cdot x^2\right]=1$;

2) $\lim\limits_{x=0}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x=0}|x|=0$, $\lim\limits_{x=0}\left[\frac{1}{x^2}\cdot|x|\right]=+\infty$;

3) $\lim\limits_{x=0}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x=0} x^4=0$, $\lim\limits_{x=0}\left[\frac{1}{x^2}\cdot x^4\right]=0$.

249. Пусть $\varepsilon>0$ — любое число: для выполнения неравенства $\left|\frac{1}{\varphi(x)}\right|<\varepsilon$ достаточно, чтобы было выполнено неравенство $|\varphi(x)|>\frac{1}{\varepsilon}$. Так как $\lim\limits_{x=a}\varphi(x)=+\infty$, то найдётся такое δ, что при всех x из области определения функции $f(x)$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, мы будем иметь

$$|\varphi(x)|>\frac{1}{\varepsilon},$$

откуда и следует, что $\left|\frac{1}{\varphi(x)}\right|<\varepsilon$, т. е.

$$\lim_{x=a}\frac{1}{\varphi(x)}=0.$$

Доказательство по существу не меняется, если $a=+\infty$ (или $a=-\infty$) только надо заменить неравенство $|x-a|<\delta$ неравенством $x>N$ (в случае $a=-\infty$ неравенством $x<N$). **250.** Можно, если точка $x=a$ предельная для области определения функции $\frac{1}{\varphi(x)}$. **251.** Следствие из теоремы о пределе суммы двух функций. **252.** Пусть $\varepsilon>0$ — любое число. Найдётся такое положительное число P и такое число $\delta_1>0$, что при всех x, входящих в область определения функции $\varphi(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta_1$, мы будем иметь $|\varphi(x)|<P$. Так как $\lim\limits_{x=a} f(x)=0$, то найдётся такое число $\delta_2>0$, что при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta_2$, мы будем иметь: $|f(x)|<\frac{\varepsilon}{P}$. Значит, при всех x из области определения функции $f(x)\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$ (δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2), мы будем иметь $|f(x)\varphi(x)|<$ $<P\cdot\frac{\varepsilon}{P}=\varepsilon$; значит, $\lim\limits_{x=a}[f(x)\varphi(x)]=0$. Доказательство существенно не изменится, если $a=+\infty$ или $a=-\infty$. **253.** Точка $x=a$ предельная для области определения функции $f(x)$; точка $y=l$ предельная для области определения функции $\varphi(y)$. Точка $x=a$ предельная для функции $\varphi[f(x)]$.

Доказательство. Возьмём любое число N; тогда найдётся число $\delta_1 > 0$, что при всех y из области определения функции $\varphi(y)$, удовлетворяющих неравенству $|y - l| < \delta_1$, мы будем иметь $\varphi(y) > N$. С другой стороны, так как $\lim\limits_{x=a} f(x) = l$, то найдётся такое число $\delta > 0$, что при всех x из области определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$ мы будем иметь $|f(x) - l| < \delta_1$. Значит, $\varphi[f(x)] > N$ при всех x из области определения этой функции $\varphi[f(x)]$ и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$. Значит,

$$\lim_{x=a} \varphi[f(x)] = +\infty.$$

254. Можно. **255.** Из неравенства $|\varphi(x)| < \varepsilon$ следует $|f(x)| < \varepsilon$. Теорема верна также в случае $a = +\infty$ или $a = -\infty$. **256.** Пусть l — число. Из равенства $\lim\limits_{x=+\infty} f(x) = l$ следует, что область определения функции $f(x)$ не ограничена сверху; отсюда следует, что $y = 0$ есть предельная точка для области определения функции $f\left(\frac{1}{y}\right)$. Возьмём любое положительное число ε. Найдётся такое число N, что при всех x, входящих в область определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $x > N$, мы будем иметь: $|f(x) - l| < \varepsilon$. Возьмём положительное число $P > N$; тогда при всех $x > P$ и входящих в область определения функции $f(x)$ мы будем иметь $|f(x) - l| < \varepsilon$. Из неравенства $x > P$ следует $\frac{1}{x} < \frac{1}{P}$. Неравенство же $|f(x) - l| < \varepsilon$ можно переписать так: $\left| f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) - l \right| < \varepsilon$. Значит, полагая $\frac{1}{x} = y$, $\frac{1}{P} = \delta$, получим $\left| f\left(\frac{1}{y}\right) - l \right| < \varepsilon$, если $0 < y < \delta$, это как раз и означает, что

$$\lim_{y=0+} f\left(\frac{1}{y}\right) = l.$$

Доказательство теоремы в случае $l = +\infty$ или $l = -\infty$ затруднений не вызывает. **257.** Доказательство. Возьмём $\delta_1 > 0$ такое, что при всех x из области определения функции $f(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta_1$ мы будем иметь: $c < f(x)$. Возьмём любое число N и положительное число $Q > N$. Так как $\lim\limits_{x=a} \varphi(x) = 0$, то найдётся такое число $\delta_2 > 0$, что при всех x, входящих в область определения функции $\varphi(x)$ и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta_2$, мы будем иметь $|\varphi(x)| < \frac{c}{Q}$. В таком случае для всех x из области определения функции $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$ (δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2) мы будем иметь:

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| = \frac{|f(x)|}{|\varphi(x)|} > \frac{c}{\frac{c}{Q}} = Q > N,$$

значит,

$$\lim_{x=a} \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| = +\infty.$$

Теорема верна в случае $a = +\infty$ или $a = -\infty$.

258. 1) $\lim\limits_{x=+\infty}\frac{2x^2+x+1}{5x^2+6x-2} = \lim\limits_{x=+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{5+\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2}} = \lim\limits_{y=0+}\frac{2+y+y^2}{5+6y-2y^2} = \frac{2}{5}$;

2) $\lim\limits_{x=0}\frac{|x^2+x+1|}{x} = -\infty$ (см. упражнение 257);

3) $\lim\limits_{x=-\infty}\frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x=-\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{y=0-}\frac{y}{1+y^2} = 0$;

4) $\lim\limits_{x=3}\left|\frac{x^2+x+5}{x-3}\right| = +\infty$ (см. упражнение 257).

259. $\frac{1}{n} < \varepsilon$ при $n > \frac{1}{\varepsilon}$. **260.** Нет. **261.** Только необходимым. **262.** Нет. **264.** a) 8; b) 10; c) 8; d) 0; e) 0. **265.** Нет. **266.** Нет. **267.** Условие $|a_n - L| < \varepsilon$ будет выполняться для всех n, начиная с некоторого. **268.** Площадь ступенчатой фигуры отличается от площади треугольника на число, которое при всех n, больших некоторого N, может быть сделано $<$ любого числа $\varepsilon > 0$. **269.** Длина указанной линии, составленной из полуокружностей, равна $\frac{a\pi}{2}$. Приведённое в конце рассуждение ошибочно, так как из факта геометрического приближения одной линии к другой не следует, что будут сближаться их длины, и приведённое рассуждение как раз и служит этому доказательством. **270.** См. предыдущий пример. **271.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$.

272. l не есть предел функции $f(x)$ в точке $x = a$, предельной для области определения этой функции, если найдётся хотя бы одно такое положительное число ε и хотя бы одна такая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, сходящаяся к a и входящая в область определения функции $f(x)$, что последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ будет расходиться или сходиться к числу, отличному от l. **273.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) a; 3) k; 4) $\frac{a}{b}$; 5) $\frac{a}{b}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) 0; 8) $\sin 2\beta$; 9) $\frac{1}{2}$; 10) 1; 11) 1; 12) $+\infty$; 13) $-\sqrt{2}$; 14) $\frac{2}{\pi}$; 15) $-\frac{a}{\pi}$. **274.** Всевозможные пары значений x, y; уравнение определяет плоскость; $f(0,0) = -1$, $f(2, -1) = 0$, $f(a, b^2) = a + b^2 - 1$, $f(x+y, y-3) = x + 2y - 4$, $f(x, y) + 2 = x + y + 1$, $f(2x, 2y) = 2x + 2y - 1$, $2f(x, y) = 2x + 2y - 2$. **275.** 1) Множество всех точек, лежащих в I и III четвертях (точки на осях Ox и Oy исключаются); 2) то же, что и в 1); 3) множество всех точек плоскости, исключая множество всех точек прямой $x + y = 0$; 4) множество всех точек плоскости, лежащих над прямой $x + y = 0$, исключая саму прямую; 5) все точки плоскости, кроме точек, расположенных на осях координат; 6) то же, что и 1), включая и оси; 7) все точки плоскости, расположенные над прямой $x + y - 1 = 0$, включая и точки этой прямой; 8) множество всех точек плоскости, расположенных в паре вертикальных углов, образованных прямыми $x + y - 1 = 0$ и $x - y + 1 = 0$, включая и точки этих прямых; 9) все точки плоскости; 10) множество всех точек плоскости, расположенных над графиком функции $y = |x|$, включая и точки этого графика; 11) все точки плоскости, не расположенные на множестве гипербол: $xy = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k принимает все целые значения; 12) часть плоскости между биссектрисами координатных углов, исключая эти биссектрисы. **276** и **277.** Результаты упражнения 276 вытекают из 277; имеем:

$$|f(x)+\varphi(y)-f(a)-\varphi(b)|\leqslant|f(x)-f(a)|+|\varphi(y)-\varphi(b)|.$$

Находим $\delta_1>0$ такое, что $|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$ при $|x-a|<\delta_1$ и $\delta_2>0$ такое, что $|\varphi(y)-\varphi(b)|<\frac{\varepsilon}{2}$ при $|x-a|<\delta_2$. Если δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2, то при $|x-a|<\delta$, $|y-b|<\delta$ все предыдущие неравенства будут выполнены. **278.** 1) $2+\frac{1}{t_0^2}$; 2) $-2\sin 2t_0$; 3) $4t_0+1$. **279.** $t_1=2$ сек., $t_2=3$ сек. **280.** $s=2t^2$, $v_{\text{ср}}=4$ *м/сек*, $v(2)=8$ *м/сек*, $v(4)=16$ *м/сек*, $v(10)=40$ *м/сек*. **281.** Средняя скорость за первые 2 сек. равна 5 *м/сек*, за первые 8 сек. она равна $\frac{13}{2}$ *м/сек*, за первые 5 сек. средней скорости по данным определить нельзя. Средняя скорость за промежуток времени от $t=2$ сек. до $t=8$ сек. равна 7 *м/сек*. Скорость в моменты 0, 2, 5, 8 сек. по данным задачи определить нельзя. **282.** $11x-y-17=0$. **283.** 1) $y-2=0$; 2) $\frac{(2k+1)\pi}{6}$, 3) $\frac{2k\pi}{2}\pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{6\sqrt{3}}$, где k принимает все целые значения. **284.** $(0, -2)$. **285.** Нет. **286.** $\Delta y=7$. **287.** 1) 19; 2) 1, 261. **288.** 1) $4x$; 2) $3x^2+1$; 3) $-\frac{6}{x^3}$; 4) $-\frac{1}{(x+1)^2}$; 5) $2x+3$; 6) $-\frac{4}{(3x-1)^2}$; 7) $\frac{x^2-5x}{(x-2)^2}$. **289.** 1) 2; 2) 4; 3) -1; 4) 0; 5) -2. **290.** 1) $3x+y-4=0$; 2) $3x-y-3=0$; 3) $3x+y-\pi=0$; 4) $x+9y-6=0$. 5) $x-2\sqrt{5}y+5=0$. **292.** 1) $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$; 2) $8\cos 4x$; 3) $2x\cos x^2$. 4) $-\frac{1}{2\cos^2 x\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}$; 5) $\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$; 6) $\frac{2v^2(3-2v^2)}{(1-v^2)^2}$; 7) $-21(1-y)^{20}$;

8) $\dfrac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$; 9) $\cos^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$; 10) $-\frac{3(\arccos x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$;

11) $\dfrac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$; 12) $\dfrac{\sqrt{3}(1+x^2)}{x^4+x^2+1}$; 13) $\arcsin x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

14) $\dfrac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$; 15) $\dfrac{2x}{\ln 3(x^2+1)}$; 16) $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$;

17) $2x\ln x+x$; 18) $\frac{2}{x}$; 19) $\dfrac{1}{\sin x\cos x}$; 20) $\dfrac{\cos(\ln x)}{x}$; 21) $-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$

22) $\dfrac{1}{x\ln x}$; 23) $2^x\ln 2$; 24) $-\dfrac{\ln 5}{5^x}$; 25) $-3^x\ln 3\sin(3^x)$; 26) $2^{-x}-x2^x\ln 2$;

27) $5^{2x-\sqrt{x}}\left(2-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ln 5$; 28) $2^{-x}\left(\dfrac{1}{x}-\ln 2\ln x\right)$;

29) $(x^2-1)(x^3+1)(x-1)\left[\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{3x^2}{x^3+1}-\dfrac{1}{x-1}\right]$;

30) $e^x\sin x\ln x+e^x\cos x\ln x+\dfrac{e^x\sin x}{x}$; 31) $\dfrac{2x}{5\sqrt[5]{(x^2-1)^4}}$

32) $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x^2+1}}\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{2x}{x^2+1}\right]$;

33) $\ln y = x\ln x$, $\frac{y'}{y} = 1 + \ln x$, $y' = y(1+\ln x) = x^x(1+\ln x)$;

34) $-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}\,[1-(\arcsin x)^2]}\sqrt{\frac{1+\arcsin x}{1-\arcsin x}}$;

35) $\frac{x(x-1)\sin x}{e^x(x^2+1)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\operatorname{ctg} x - 1 - \frac{2x}{x^2+1}\right)$.

293. $y = \arcsin\sqrt{x}$, $x = \sin^2 y$, $x' = 2\sin y\cos y = 2\sqrt{x}\sqrt{1-x}$, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$. **294.** См. 293. **295.** Если $f(x) = f(-x)$, то $f'(x) = -f'(-x)$; если $f(-x) = -f(-x)$, то $f'(-x) = -f'(x)(-1)$, откуда $f'(-x) = f'(x)$. **296.** $f'(0)=0$. **297.** 1) Разрывна; 2) непрерывна, но не дифференцируема. **298.** Непрерывна, но не дифференцируема. **299.** 1) $-\sqrt{\frac{y}{x}}$; 2) $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$; 3) $\frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}$; 4) $\frac{\rho^2\sin\varphi + 3a^2\cos 3\varphi}{2\rho\cos\varphi}$. 5) $\frac{v}{u}+1+\frac{v^2}{u^2}\Big)$.

300. Нет. **301.** 1) $x-3y+4$, 2) $x=1$, 3) $4x+3y-24=0$. **302.** $\operatorname{tg}\varphi_{1,2} = \pm\frac{3x_0^2+6x_0^2y_0-12y_0+4x_0y_0}{2y_0+4y_0^2+18x_0^2-6x_0^3}$, где (x_0, y_0) — точка пересечения данных линий. **303.** $\operatorname{tg}\varphi_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$. **304.** $x-2y+3=0$. **305.** $6x+8yy'=0$, $10x-8yY'=0$, $y' = -\frac{3x}{4y}$, $Y' = \frac{5x}{4y}$, $y'Y' = -\frac{15x^2}{16y^2}$. С другой стороны, из данных уравнений находим: $5(3x^2+4y^2)-27(5x^2-4y^2)=0$, откуда $\frac{15x^2}{15y^2}=1$, значит, $y'Y'=-1$. **306.** $\operatorname{tg}\varphi\approx -0{,}16$. **307.** $45°$. **308.** $\Delta y = 2{,}01$; $dy = 1{,}9$. Абсолютная погрешность 0,11. Относительная погрешность $\delta\approx 0{,}05$ (5%). **309.** 1) $\Delta s = 8{,}25$; $ds = 8$; $\delta\approx 3\%$; 2) $\Delta s = 17$, $ds = 16$, $\delta\approx 6\%$; 3) $\Delta s = 1{,}61$; $ds = 1{,}6$; $\delta\approx 0{,}6\%$. **310.** $f(1)+f'(1)\Delta x = 1{,}88$. **311.** $\operatorname{tg} 45°4'30'' = \operatorname{tg} 45° + \frac{\frac{\pi}{2400}}{\cos^2 45°} = 1 + \frac{\pi}{1200} \approx 1{,}0025$. **312.** $\bar{1},84873$. **313.** Геометрически очевидно, что при небольшом приращении радиуса окружности приращение Δs площади окружности приблизительно равно длине L окружности, умноженной на приращение радиуса: $\Delta s = L\,\Delta r$ (сделать чертёж), отсюда $\frac{\Delta s}{\Delta r}\approx L$. **314.** Геометрически очевидно, что $\Delta v\approx s\,\Delta r$. **315.** $y'' = 6x-4$, $y''' = 6$, $y^{(4)} = 0$. **316.** $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5(x-1)$. **317.** $-7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 10ax^{-12}$. **318.** $\frac{5x+8}{4(x+2)^{5/2}}$. **319.** 1) $\frac{h^2-ab}{(hx+by)^3}$; 2) $\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$. **320.** $-2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\left[\frac{1}{(x-1)^6}+\frac{3}{(x-8)^6}\right]$. **321.** $8e^x\sin x$. **322.** $[x^3+3nx^2+3xn(n-1)+n(n-1)(n-2)]\,e^x$. **323.** $e^x + a^x(\ln a)^n$. **324.** Дело сводится к проверке равенства $f(b)-f(a) = (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

325. Применить теорему Ролля. **326.** -2. **327.** $\frac{a}{\sqrt[4]{4}}$. **328.** $\frac{2}{3}$. **329.** В интервалах $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$ функция возрастает; в интервале $(-2, 2)$ убывает; 2) в интервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{11}{18}, +\infty\right)$ функция возрастает; в интервале $\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{18}\right)$ убывает; 3) в интервале $(-\infty, c)$ убывает; в интервале $(c, +\infty)$ возрастает; 4) функция возрастает в интервалах $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, убывает в интервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. **330.** Данная функция возрастает на интервале $(-\infty, 0)$ и убывает на интервале $(0, \infty)$. Так как при $x=0$ её значение равно 0, то при всех других значениях x они будут <0. **331.** Указание: исследовать на возрастание и убывание функции $\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$ и $x - \ln|1+x|$. 1) Так как $1 - \cos x - \frac{x^2}{2} < 0$, то функция $x - \sin x - \frac{x^3}{6}$, производная которой равна $1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$, убывает, а так как $\left(x - \sin x - \frac{x^3}{6}\right)_{x=0} = 0$, то $x - \sin x - \frac{x^3}{6} > 0$ при $x<0$ и $x - \sin x - \frac{x^3}{6} < 0$ при $x>0$. Далее, функция $\frac{x^2}{2} + \cos x - \frac{x^4}{24} - 1$, производная которой равна $x - \sin x - \frac{x^3}{6}$, растёт в интервале $(-\infty, 0)$ и убывает в интервале $(0, +\infty)$, а так как её значение при $x=0$ равно 0, то $\frac{x^2}{2} + \cos x - \frac{x^4}{24} - 1 < 0$ при всех x; далее $\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$ обращается в нуль при $x=0$ и производная этой функции $\frac{x^2}{2} + \cos x - \frac{x^4}{24} - 1 < 0$; значит, эта функция всюду убывает и значит при $x>0$ $\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} < 0$, что и требовалось. Соотношение $x > \ln(1+x)$ доказывается просто. **332.** $(x + \cos x - a)' = 1 - \sin x \geqslant 0$; при $x=0$ $x + \cos x - a = 1 - a > 0$, значит, при $a<1$ уравнение $x + \cos x - a = 0$ положительных корней не имеет; если же $a>1$, то при $x=0$ $x + \cos x - a = 1 - a < 0$, уравнение $x + \cos x - a = 0$ имеет положительный корень и только один ввиду возрастания функции $x + \cos x - a$. **333.** Функция $xl^x - 2$ при $x=0$ и $x=1$ обращается в -2 и $e-2$ — числа разных знаков и на интервале $(0, 1)$ она возрастает. **334.** 1) $y_{\max} = 2{,}5$ при $x=-1$; $y_{\min} = -3{,}9$ при $x=3$; 2) $y_{\min} \approx -3{,}3$ при $x = \frac{1}{8}$; 3) $y_{\max} = -6$ при $x=-3$; $y_{\min} = 6$ при $x=3$; 4) функция принимает максимальное значение при $x = \frac{12}{5}$; 5) $y_{\min} = 0$ при $x=0$; 6) минимум при $x = \frac{5\pi}{4}$, максимум при $x = \frac{\pi}{4}$; 7) при $|a| \leqslant |b|$ нет экстремума. При $|a| \geqslant |b|$ бесконечное множество экстремумов при значениях x, для которых $\sin ax = \frac{b}{a}$. **335.** 1) Наибольшее значение $f(3) = -3$, наименьшее $f(7) = -11$; 2) наибольшее значение $f(4) = \frac{3}{5}$, наименьшее $f(0) = -1$; 3) наибольшее значение $f(1) = 0$; наименьшее — нет; 4) наибольшее значение

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$, наименьшее $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$. **336.** $p=-6$, $q=14$.
337. Квадрат. **338.** Квадрат. **339.** Наибольшая площадь равна r^2, где $r=\frac{p}{4}$ — радиус круга при центральном угле $\alpha=2$ радианам. **341.** 1) Радиус основания цилиндра равен $\frac{2}{3}$ радиуса основания конуса; 2) $\frac{1}{2}$ радиуса основания конуса.
342. Высота конуса равна $\frac{4}{3}$ радиуса шара. **343.** Высота вдвое больше диаметра шара. **344.** Отношение высоты палатки к радиусу её основания равно $\sqrt{2}$.
345. 50×100. **346.** Искомые отрезки $a+\sqrt{ab}$, $b+\sqrt{ab}$. **347.** Сторона квадрата $x=\frac{1}{6}(a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab})$; если $a=b$, то $x=\frac{a}{6}$.
348. $\alpha=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 293°24'$. **349.** $60°$. **350.** $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$. **351.** Расстояние от источника силы J_1 равно $\frac{L\sqrt[3]{J_1}}{\sqrt[3]{J_1}+\sqrt[3]{J_2}}$. **352.** $a=\frac{R}{\sqrt{2}}$. **353.** Точка перегиба $(1,\ -2)$; слева от неё линия имеет отрицательную выпуклость, справа — положительную; 2) $(2,\ 62)$ и $(4,\ 206)$ — точки перегиба; в интервалах $(-\infty,\ 2)$ и $(4,\ +\infty)$ линия положительно выпукла, а в интервале $(2,\ 4)$ отрицательно выпукла. **354.** $\alpha=-\frac{20}{3}$, $\beta=\frac{4}{3}$. Точки $(0,\ 0)$ и $\left(-2,-\frac{5}{2}\right)$ также будут точками перегиба. **355.** Применить теорему Ролля. **356.** Абсциссы точек перегиба $x_1=0$, $x_2=a\sqrt{3}$, $x_3=-a\sqrt{3}$. **357.** $s=t^3+2$.
358. $v=\sin t$. **359.** 1) $3x^3-21x^2+49x+c$; 2) $\frac{1}{2}\sin(2x+1)+c$;
3) $x-\operatorname{arc\,tg} x+c$; 4) $\frac{12}{13}x^{13/12}+\frac{4}{5}x^{5/4}+c$; 5) $-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|+c$;
6) $\frac{1}{7}\ln|\sin(7x+5)|+c$; 7) $\frac{1}{6}\ln(3x^2+2)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+c$;
8) $\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{8}\ln(3+4x^2)$; 9) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+c$; 10) $\sqrt{1+x^2}+c$;
11) $\frac{1}{2}(\ln|x|)^2+c$; 12) $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$; 13) $x-\ln(e^x+1)+c$; 14) $\frac{1}{7}e^{7x-4}+c$;
15) $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+c$; 16) $-\frac{1}{6}\cos^6 x+c$; 17) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+c$; 18) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+c$; 19) $x+\operatorname{tg} x+c$; 20) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$;
21) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+2\cos x)^2}+c$; 22) $-\frac{1}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}+c$; 23) $-\frac{2}{9}\ln|2+3\cos^3 x|+c$; 24) $\frac{1}{2}\cos^2 x-\ln\cos x+c$; 25) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x}+c$; 26) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c$.
360. Разделим высоту h конуса точками M_0, $M_1, \ldots, M_n$ на n равных частей. Радиус M_kN_k-го цилиндра определится из пропорции

$$\frac{h}{r}=\frac{\frac{k}{n}h}{M_kN_k},$$

откуда

$$M_kN_k=\frac{k}{n}r.$$

Объём v_k цилиндра высотой $\frac{h}{n}$ и радиусом $\frac{kr}{n}$ будет равен $\pi\frac{k^2r^2}{n^2}\frac{h}{n}$, а объём конуса будет приближённо равен сумме $\pi\frac{1^2\cdot r^2}{n^3}h+\pi\frac{2^2\cdot r^2}{n^3}h+$

$$+\pi\frac{3^2\cdot r^2}{n^3}h+\ldots+\pi\frac{n^2\cdot r^2}{n^3}h=\frac{\pi h}{n^3}r^2(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)\,^{*})=$$

$=\frac{\pi hr^2}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{\pi r^2h}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$. В точке $n=+\infty$ предел равен $\frac{\pi r^2h}{3}$. **361.** Разбивая поверхность вертикальной грани на n равных прямоугольников, найдём давление на k-й прямоугольник: $\frac{3}{n}\cdot 2\cdot\frac{k-1}{n}$; отсюда давление на всю стенку приближённо будет равно:

$$\frac{6}{n^2}[0+1+2+\ldots+(n-1)]=\frac{6}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}=3\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

В точке $n=+\infty$ предел равен 3. Итак, давление на вертикальную стенку равно 3 тоннам (ибо все измерения произведены в метрах, а 1 $м^3$ воды весит 1 тонну). **362.** 1) $\frac{65}{4}$; 2) 2; 3) $-\frac{1}{2}\ln 2$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{1}{2}\ln 3$; 6) $\frac{1}{2}\ln 13$.

363. Данные параболы пересекаются в двух точках (0, 0) и (1, 1). Искомая площадь s будет равна разности площадей криволинейных трапеций, ограниченных линиями $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$, осью Ox и прямыми $x=0$ и $x=1$,

$$s=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\frac{1}{3}.\qquad \mathbf{364.}\ s=\int_0^2(2x-x^2)\,dx=\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{4}{3}.$$

365. $\ln n$. **366.** $s=\int_0^x\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$. **367.** Данные линии

---

*) Рассмотрим тождество:

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1;$$

полагая здесь $n=0, 1, 2, \ldots, n$, будем иметь:

$$\begin{aligned}&1^3-0^3=1,\\&2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1,\\&3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1.\end{aligned}$$

Складывая почленно эти равенства, будем иметь $(n+1)^3=3\sigma+3\frac{n(n+1)}{2}+$ $+n+1$, где $\sigma=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$. Из последнего равенства находим:

$$\sigma=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

пересекаются в точках (0, 0) и (12, 12). Ответ: $s=12$. **368.** Разрешая уравнение астроиды относительно y, получим: $y=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, откуда $\frac{1}{4}s=\int\limits_0^a (a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,dx$. Находим неопределённый интеграл $\int (a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}dx$. Положим $x=a\sin^3\varphi$; тогда $dx=3a\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi$,

$$\int (a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,dx=\int (a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\cdot 3a\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi=$$

$$=3a^2\int \sin^2\varphi\cos^4\varphi\,d\varphi=\frac{3}{4}a^2\int 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{3}{8}a^2\int\sin^2 2\varphi\,(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=\frac{3}{8}a^2\int\sin^2 2\varphi\,d\varphi+\frac{3}{8}a^2\int\sin^2 2\varphi\cos 2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{3}{16}a^2\int(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi+\frac{3}{16}a^2\int\sin^2 2\varphi\cos 2\varphi\,d\,(2\varphi)=$$

$$=\frac{3}{16}a^2\varphi-\frac{3}{64}a^2\sin 4\varphi+\frac{1}{16}a^2\sin^3 2\varphi.$$

Для определения новых пределов интеграции положим $0=a\sin^3\varphi$ и $a=a\sin^3\varphi$; отсюда $\varphi=\alpha=0$ и $\varphi=\beta=\frac{\pi}{2}$, и, значит, новыми пределами интегрирования будут 0 и $\frac{\pi}{2}$, т. е. $\frac{1}{4}s=\left[\frac{3}{16}a^2\varphi-\frac{3}{64}a^2\sin 4\varphi+\frac{1}{16}a^2\sin^3 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$ $=\frac{3}{32}a^2\pi$, откуда $s=\frac{3}{8}\pi a^2$. **369.** $\frac{1}{2}s=\int\limits_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{2px}\,dx=\frac{p^2}{3}$, откуда $s=\frac{2}{3}p^2$.

370. $s=\int\limits_0^1 x\,dx-\int\limits_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{6}$. **371.** $v=\pi\int\limits_0^2(2x-x^2)^2\,dx=\frac{16}{15}\pi$.

372. $v=\pi\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\pi^2$. **373.** $v=\pi\int\limits_{-a}^{a}(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3\,dx=\frac{32}{105}\pi a^3$.

374. Располагая оси координат соответствующим образом, получим уравнение окружности в виде $(y+\alpha)^2+x^2=r^2$, откуда $y=\sqrt{r^2-x^2}-\alpha$. Искомый объём

$$v=\pi\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}[\sqrt{r^2-x^2}-\alpha]^2dx=\pi\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(r^2-x^2-2\alpha\sqrt{r^2-x^2}+\alpha^2)\,dx=$$

$$=\pi h\left(r^2+\alpha^2-\frac{h^2}{12}\right)-2\pi\alpha\left(h\sqrt{r^2-\frac{h^2}{4}}+r^2\arcsin\frac{h}{2r}\right).$$

Если дана точка, то мы имеем возможность легко измерить радиус её среднего сечения (r_2), радиус r_1 основания, а также высоту h. Между тем в последнюю формулу входят a и r. Определить их просто, зная r_1, r_2 и h, именно

$$a=\frac{h^2}{8(r_2-r_1)}-\frac{r_1+r_2}{2},\quad r=\frac{h^2}{8(r_2-r_1)}+\frac{r_2-r_1}{2}.$$

Введите эти формулы! **375.** Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Её мы должны вращать вокруг мнимой оси, т. е. вокруг оси Oy. Нетрудно сообразить, что в этом случае

$$v=\pi\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}x^2dy=\pi\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}a^2\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\pi a^2h\left(1+\frac{h^2}{12b^2}\right).$$

376. Проводя сечение цилиндрического отрезка плоскостью, перпендикулярной диаметру OK перпендикулярного сечения на расстоянии x от точки 0, получим в сечении прямоугольный треугольник ABC, площадь s которого $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\cdot AC^2$; но $AC^2=AK\cdot AO=(2r-x)x$, поэтому $S=\frac{1}{2}(2rx-x^2)\operatorname{tg}\alpha$ и значит, $v=\int_0^{2r}\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha(2rx-x^2)\,dx=\frac{2}{6}r^3\operatorname{tg}\alpha=$ $=\frac{2}{3}r^2h$, где $h=r\operatorname{tg}\alpha$ — высота цилиндрического отрезка. **377.** Объём шарового сегмента $=\frac{h}{3}\left[0+4\pi\cdot\frac{h}{2}\left(2r-\frac{h}{2}\right)+\pi h(2r-h)\right]=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)$. Объём шарового слоя $=\frac{h}{6}(\pi r_1^2+\pi r_2^2+4\pi\rho^2)$, где ρ — радиус среднего сечения; его мы определим из соотношения

$$\rho^2+\left(a+\frac{h}{2}\right)^2=r_2^2+a^2,$$

а a найдём из соотношения $r_1^2+(h+a)^2=r_2^2+a^2$.

Таким образом, найдём $\rho^2=\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2)+\frac{h^2}{4}$; подставляя это значение ρ в предыдущее выражение для объёма, получим $\frac{\pi h}{2}\left(r_1^2+r_2^2+\frac{h^2}{3}\right)$; объём усечённого конуса $=\frac{h}{6}\left[\pi r_1^2+4\pi\frac{(r_1+r_2)^2}{4}+\pi r_2^2\right]=\frac{\pi h}{3}(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$. Объём сегмента параболоида вращения $=\frac{h}{6}\left(0+4\frac{s}{2}+s\right)=\frac{sh}{2}$, где s — площадь основания. **378.** Можно. **379.** Нет. **380.** Если рассмотреть пирамиду, имеющую с данным конусом одинаковую высоту и взять площадь основания пирамиды равновеликой площади основания конуса, то в силу того, что площадь сечения пирамиды или конуса плоскостью, параллельной основанию, — пропорциональна расстоянию от этой плоскости до вершины, мы получим одну и ту же функцию $s(x)$ распределения площадей сечения пирамиды и конуса указанными плоскостями. По принципу Кавальери объёмы указанных тел будут равны и раз объём пирамиды равен одной трети произведения площади её основания на высоту, то так же будет вычисляться и объём конуса. Аналогичными рассуждениями могут быть выведены формулы, определяющие объёмы цилиндра и усечённого конуса.

381. $\int\limits_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)^2}\,dx = \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. **382.** $\frac{1}{64}\left(410+\frac{81}{2}\ln 3\right)$.

383. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **384.** $a\left(e-\frac{1}{e}\right)$. **385.** Разрешая уравнение линии относительно y, получим $y=-x\sqrt{x+\frac{1}{3}}$ (берём знак минус, тогда получаем уравнение верхней части петли). Находим:

$$y'=\frac{-3x-\frac{2}{3}}{2\sqrt{x+\frac{1}{3}}},\quad \sqrt{1+y'^2}=\frac{3x+\frac{4}{3}}{2\sqrt{x+\frac{1}{3}}};\quad \frac{1}{2}s=\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{3x+\frac{4}{3}}{2\sqrt{x+\frac{1}{3}}}dx.$$

Полагая $x+\frac{1}{3}=t^2$, получим: при $x=-\frac{1}{3}$ $t=0$, а при $x=0$ $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Далее, $dx=2t\,dt$ и, значит,

$$\frac{1}{2}s=\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{3\left(t^2-\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{3}}{2t}2t\,dt=\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(3t^2+\frac{1}{3}\right)dt=\frac{2}{3\sqrt{3}},\ \text{откуда}\quad s=\frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

386. $2\pi rh$, где h — высота слоя, r — радиус шара.

387. $\sigma=2\pi\int\limits_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=-2\pi\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,d(\cos x)$. Полагая $\cos x=t$, получим:

$$\sigma=-2\pi\int\limits_1^{-1}\sqrt{1+u^2}du=-2\pi\left[\frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]_1^{-1}=$$

$$=\pi[2\sqrt{2}+\ln(3+2\sqrt{2})].$$

388. $\frac{12}{5}\pi a^2$. **389.** При соответствующем расположении осей координат уравнение образующей конуса будет $y=\frac{r_2-r_1}{h}x+r_1$. Отсюда

$$\sigma=2\pi\int\limits_0^h\left[\frac{r_2-r_1}{h}x+r_1\right]\sqrt{1+\frac{(r_2-r_1)^2}{h^2}}dx;$$

но

$$\sqrt{1+\frac{(r_2-r_1)^2}{h^2}}=\frac{1}{h}\sqrt{h^2+(r_2-r_1)^2}=\frac{l}{h},$$

где l — образующая. Значит,

$$\sigma=\frac{2\pi l}{h}\left[\frac{r_2-r_1}{2h}x^2+r_1x\right]_0^h=\frac{2\pi l}{h}\left(\frac{r_2-r_1}{2h}h^2+r_1h\right)=\pi l(r_1+r_2).$$

390. $\frac{4}{3}\pi\sqrt{2p}\left[\left(h+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$. **391.** 1) $(1+y^2)x^2-c(1+x^2)=0$; 2) $10x^3+3y^5=c$; 3) $y=cx$; 4) $e^x(x-1)=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)\right|+c$. **392.** Интегральные линии: $xy=c$ — семейство равносторонних гипербол; интегральными линиями являются также и оси координат (ибо данное уравнение удовлетворяется и при $x=0$ и при $y=0$. Через точку (2, 3) проходит единственная интегральная линия $xy=6$; через точку $(-2, 3)$ проходит интегральная линия $xy=-6$.

393. $(1+x^2)y^2=c$. **394.** 1) $x^4+2x^2y^2=c$; 2) $y^2-x^2=cy^3$; 3) $e^{\frac{y^2}{x^2}}=cx$. **395.** 1) $y=x^2+cx^2e^{\frac{1}{x}}$; 2) $y=1+ce^{-\frac{1}{x^3}}$; 3) $y=2+c\sqrt{x^2-1}$; 4) $y=ce^{3x}+\frac{1}{10}(\sin x-3\cos x)$. **396.** 1) $c_1e^x+c_2e^{7x}$; 2) $e^{\frac{3x}{2}}\left(c_1\cos\frac{x\sqrt{31}}{2}+c_2\sin\frac{x\sqrt{31}}{2}\right)$; 3) $e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$; 4) $e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+c_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$; 5) $c_1\cos x+c_2\sin x$; 6) $c_1e^x+c_2e^{-x}$; 7) $e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{x\sqrt{31}}{2}+c_2\sin\frac{x\sqrt{31}}{2}\right)$; 8) $e^{-3x}(c_1x+c_2)$; 9) $e^{-5x}(c_1x+c_2)$; 10) $e^{-x}(c_1x+c_2)$. **397.** 1) $2+c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$; 2) $c_1e^{\frac{7+\sqrt{29}}{2}x}+c_2e^{\frac{7-\sqrt{29}}{2}x}+\frac{1}{125}(25x^2+70x+88)$; 3) $e^x\left(c_1x+c_2+\frac{1}{2}x^2\right)$; 4) $c_1e^x+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x$; 5) $e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+c_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{x}\right)+\frac{e^x}{13}(-3\cos x+2\sin x)$; 6) $e^{-2x}(c_1x+c_2)+\frac{1}{128}(8x^2-8x-5)e^{2x}$; 7) $c_1e^{x\sqrt{2}}+c_2e^{-x\sqrt{2}}-\frac{x}{2}$; 8) $e^{-6x}(c_1x+c_2)+\frac{1}{6}x^3e^{-6x}$; 9) $e^{-6x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+\frac{1}{4}x\sin 2xe^{-6x}$; 10) $e^{-x}(c_1x+c_2)+\frac{1}{2}(1-x)\cos x+\frac{1}{2}\sin x$. **398.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{a_1d}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) 1. **399.** 1) расходится; 2) сходится (признак Даламбера); 3) сходится (признак Даламбера); 4) сходится (применить признак Коши); 5) сходится (см. пред. пример); 6) сходится (признак Коши); 7) сходится (признак Даламбера); 8) расходится; 9) $u_n<v_n$, где $v_n=\frac{1}{2^n}$ — общий член геометрической прогрес-

сии; 10) сходится (признак Даламбера); 11) если $q<1$, то сходится, если $q \geqslant 1$, то расходится; 12) сходится (признак Коши); 13) сходится (признак Коши); 14) $\frac{n+1}{n^2} > \frac{1}{n}$ — расходится; 15) сходится; 16) $\frac{3+n}{2+n^2} > \frac{1}{2+n}$ — расходится; 17) расходится; 18) сходится $\left(u_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\frac{1}{2}\right.$, так что легко найти и сумму ряда; 19) сходится; 20) сходится; 21) сходится (признак Коши); 22) сходится (признак Коши); 23) расходится $\left(u_n > \frac{1}{n+1}\right)$; 24) если $a>1$, то сходится, если $a \leqslant 1$, то расходится; 25) сходится (признак Коши); 26) расходится (признак Даламбера); 27) сходится (признак Даламбера); 28) сходится $u_n < \frac{1}{n!}$, затем применить признак Даламбера; 29) сходится (признак Даламбера); 30) если $0<a<1$, то сходится, если $a \geqslant 1$, то расходится; 31) $u_n > \frac{1}{n^2}$ — сходится. **400.** Да. **402.** $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$; $\sin 2x$ и $\cos 2x$ разлагаются в ряды, полученные из рядов для $\sin x$ и $\cos x$ заменой x на $2x$; $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots$ **404.** 1) $\frac{|x^4|}{4!} < 0{,}0005$; $|x| < \sqrt[4]{0{,}012}$; 2) $\frac{|x^3|}{6} < 0{,}0005$, $x < \sqrt[3]{0{,}003}$; 3) $x < \sqrt{0{,}001}$. **406.** 1) $|Rn| < \frac{x^2}{8}$; 2) $|Rn| < \frac{x^2}{2n^2}$, если $k>1$.

407. $1 + x + x^2 + \ldots$ **408.** $(1-x)^{2^{-\frac{1}{2}}} = 1^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}1^{-\frac{3}{2}}(-x^2) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)1^{-\frac{5}{2}}(-x^2)^2 + \ldots$ **410.** $2\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^3\right]$. **411.** $5\left(1 + \frac{1}{3\cdot 125}\right)$. **413.** Поделить ряды Маклорена для функций $\sin x$, $\cos x$, e^x на x и проинтегрировать в указанных пределах.

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Α, α Альфа	Ι ι Йота	Ρ, ρ Ро
Β, β Бета	Κ, κ Каппа	Σ, σ Сигма
Γ, γ Гамма	Λ, λ Ламбда	Τ, τ Тау
Δ, δ Дельта	Μ, μ Ми	Υ, υ Ипсилон
Ε, ε Эпсилон	Ν, ν Ни	Φ, φ Фи
Ζ, ζ Дзета	Ξ, ξ Кси	Χ, χ Хи
Η, η Эта	Ο, ο Омикрон	Ψ, ψ Пси
Θ, θ, ϑ Тета	Π, π Пи	Ω, ω Омега